

Vorlesung 13

Elementare komplexe Funktionen

Komplexe Exponentialfunktion. 1. Definiert man für jedes $x \in \mathbb{C}$ und $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ die Funktion $E_n : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ durch die Teilsumme $E_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} x^k$, so bezeichnet man die Potenzreihe (E_n) als *komplexe Exponentialreihe*. Aufgrund der Beziehung $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k!}{(k+1)!} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k+1} = 0$ konvergiert die komplexe Exponentialreihe (E_n) in $\mathbb{C}$ gegen eine analytische Grenzfunktion $\text{Exp} : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, die durch

$$\text{Exp}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \quad \text{für } x \in \mathbb{C}$$

definiert und *komplexe Exponentialfunktion* genannt wird.

2. Da die summandenweise differenzierte Potenzreihe (DE_n) wiederum mit der Potenzreihe (E_n) übereinstimmt, gilt $D^k \text{Exp} = \text{Exp}$ für alle $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Additionstheorem der Exponentialfunktion. Für alle $x, y \in \mathbb{C}$ und $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ liefert die binomische Formel die Cauchy-Produkte

$$\sum_{\ell=0}^k \frac{x^\ell}{\ell!} \cdot \frac{y^{k-\ell}}{(k-\ell)!} = \frac{1}{k!} \sum_{\ell=0}^k \binom{k}{\ell} x^\ell y^{k-\ell} = \frac{(x+y)^k}{k!}.$$

Durch Multiplikation von Exponentialreihen erhält man das Additionstheorem

$$\text{Exp}(x+y) = \text{Exp}(x) \text{Exp}(y) \quad \text{für alle } x, y \in \mathbb{C}.$$

Nullstellenfreiheit der Exponentialfunktion. Die komplexe Exponentialfunktion hat *keine* Nullstellen, denn es gilt $\text{Exp}(x) \text{Exp}(-x) = \text{Exp}(0) = 1$ für alle $x \in \mathbb{C}$.

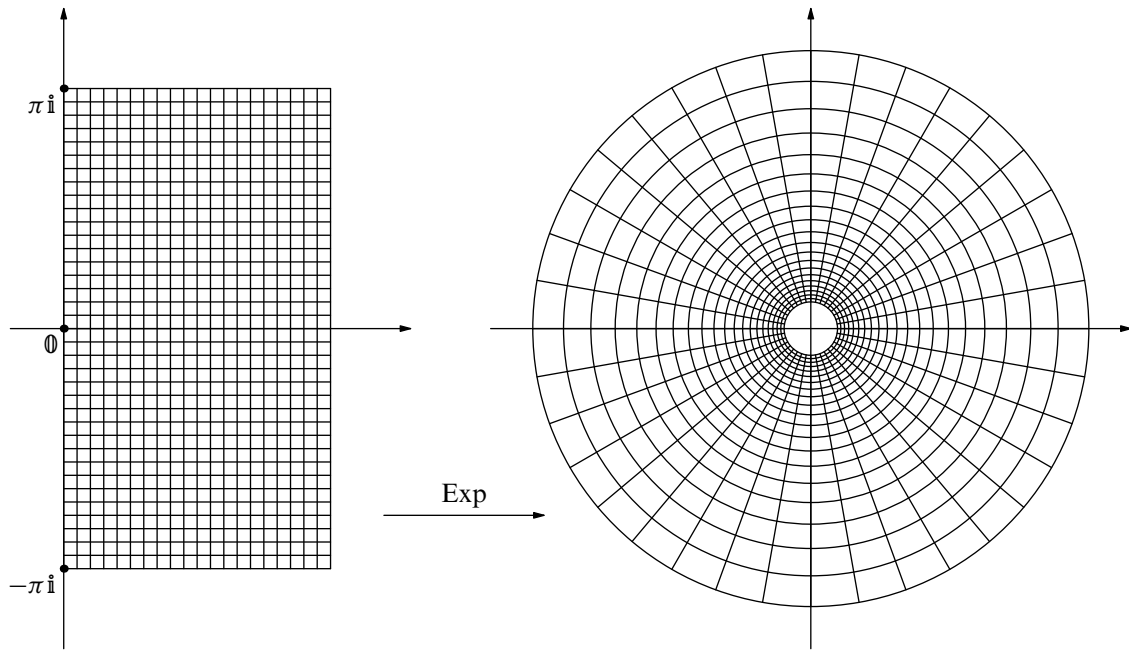
Periodizität der Exponentialfunktion. 1. Für alle $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ folgt aus

$$\begin{aligned} \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{1}{\ell!} (\alpha, 0)^\ell &= \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \alpha^k, 0 \right) = (\exp(\alpha), 0), \\ \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{1}{\ell!} (0, \beta)^\ell &= \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} \beta^{2k}, \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} \beta^{2k+1} \right) = (\cos \beta, \sin \beta), \end{aligned}$$

durch Multiplikation die Darstellung der Exponentialfunktion

$$\text{Exp}(x) = \exp(\alpha)(\cos \beta, \sin \beta) \quad \text{für alle } x = (\alpha, \beta) \in \mathbb{C}.$$

2. Für alle $x = (\alpha, \beta) \in \mathbb{C}$ gilt $|\text{Exp}(x)| = \exp(\alpha) > 0$.
3. Für $x = (\alpha, \beta) \in \mathbb{C}$ gilt genau dann $|\text{Exp}(x)| = 1$, wenn $\alpha = 0$ ist.
4. Es gilt $\{x \in \mathbb{C} \mid \text{Exp}(x) = 1\} = \{2\pi k i \mid k \in \mathbb{Z}\}$.
5. Es gilt $\{x \in \mathbb{C} \mid \text{Exp}(x+y) = \text{Exp}(y) \text{ für jedes } y \in \mathbb{C}\} = \{2\pi k i \mid k \in \mathbb{Z}\}$.



Wertebereich der Exponentialfunktion. Wird $w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ durch Polarkoordinaten $r \in \mathbb{R}$, $r > 0$ sowie $\beta \in \mathbb{R}$ in der Form $w = (r \cos \beta, r \sin \beta)$ dargestellt, dann besteht die Menge aller Lösungen $x \in \mathbb{C}$ der Gleichung $\text{Exp}(x) = w$ aus den Zahlen

$$x_k = (\ln(r), \beta + 2\pi k) \in \mathbb{C} \quad \text{für } k \in \mathbb{Z}.$$

Somit hat die komplexe Exponentialfunktion den Wertebereich $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Logarithmische Potenzreihe. 1. Die *logarithmische Potenzreihe* (s_n) um $w_0 = 0$ mit den Koeffizienten $a_0 = 0$ und $a_k = (-1)^{k-1} \frac{1}{k}$ für $k \in \mathbb{N}$ konvergiert wegen $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k}{k+1} = 1$ in $\mathbb{E} = \{w \in \mathbb{C} \mid |w| < 1\}$ gegen eine analytische Grenzfunktion $L : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{C}$, die durch die Summe

$$L(w) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} w^k \quad \text{für alle } w \in \mathbb{E} \text{ gegeben ist.}$$

2. Die summandenweise differenzierte Potenzreihe (Ds_n) um $w_0 = 0$ mit den Koeffizienten $((k+1)a_{k+1})$ konvergiert in $\mathbb{E}$ gegen die Ableitung $DL : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{C}$ der Grenzfunktion $L : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{C}$, welche die Gestalt

$$DL(w) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k w^k = \sum_{k=0}^{\infty} (-w)^k = \frac{1}{1+w} \quad \text{für alle } w \in \mathbb{E} \text{ besitzt.}$$

Binomische Potenzreihe. 1. Für $x \in \mathbb{C}$ definiert man den *Binomialkoeffizienten*

$$\binom{x}{0} = 1, \quad \binom{x}{k} = \prod_{\ell=1}^k \frac{x - \ell + 1}{\ell} \in \mathbb{C} \quad \text{für } k \in \mathbb{N}.$$

Dabei ergibt sich für $k \in \mathbb{N}$ erneut die bekannte Beziehung

$$\begin{aligned} \binom{x}{k-1} + \binom{x}{k} &= \prod_{\ell=1}^{k-1} \frac{x - \ell + 1}{\ell} + \prod_{\ell=1}^k \frac{x - \ell + 1}{\ell} = \frac{k + (x - k + 1)}{k} \prod_{\ell=1}^{k-1} \frac{x - \ell + 1}{\ell} \\ &= \frac{x + 1}{k} \prod_{\ell=1}^{k-1} \frac{x - \ell + 1}{\ell} = \prod_{\ell=1}^k \frac{x + 1 - \ell + 1}{\ell} = \binom{x+1}{k} \in \mathbb{C}. \end{aligned}$$

Man beachte, daß im Falle $x \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ stets $\binom{x}{k} = 0$ für alle $k \in \mathbb{N}$ mit $k > x$ gilt.

2. Sei der Exponent $x \in \mathbb{C}$ vorgegeben. Die *binomische Potenzreihe* (s_n) um $w_0 = 0$ mit den Koeffizienten $a_k = \binom{x}{k} \in \mathbb{C}$ für $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ konvergiert wegen

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left| \prod_{\ell=1}^{k+1} \frac{x - \ell + 1}{\ell} \cdot \prod_{\ell=1}^k \frac{\ell}{x - \ell + 1} \right| = \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{x - k}{k + 1} \right| = 1$$

in $\mathbb{E} = \{w \in \mathbb{C} \mid |w| < 1\}$ gegen eine analytische Grenzfunktion $B_x : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{C}$, wobei

$$B_x(w) = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{x}{k} w^k \quad \text{für alle } w \in \mathbb{E} \text{ und } x \in \mathbb{C} \text{ gilt.}$$

Wegen $\binom{x+1}{k} = \binom{x}{k-1} + \binom{x}{k}$ folgt daraus für alle $w \in \mathbb{E}$ und $x \in \mathbb{C}$ die Beziehung

$$B_{x+1}(w) = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{x+1}{k} w^k = w \sum_{k=1}^{\infty} \binom{x}{k-1} w^{k-1} + \sum_{k=0}^{\infty} \binom{x}{k} w^k = (1 + w) B_x(w).$$

3. Die summandenweise differenzierte Potenzreihe (Ds_n) um $w_0 = 0$ mit den Koeffizienten $((k+1)a_{k+1})$ konvergiert in $\mathbb{E}$ gegen die Ableitung $DB_x : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{C}$, wobei

$$\begin{aligned} (1 + w) DB_x(w) &= \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) \binom{x}{k+1} w^k + \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) \binom{x}{k+1} w^{k+1} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} (x - k) \binom{x}{k} w^k + \sum_{k=0}^{\infty} k \binom{x}{k} w^k = \sum_{k=0}^{\infty} x \binom{x}{k} w^k = x B_x(w) \end{aligned}$$

für alle $w \in \mathbb{E}$ gilt. Die durch $G(w) = B_x(w) \exp(-xL(w))$ für $w \in \mathbb{E}$ definierte Funktion $G : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{C}$ ist differenzierbar, und wegen $(1 + w) DB_x(w) = x B_x(w)$ gilt

$$DG(w) = \left(DB_x(w) - \frac{x B_x(w)}{1 + w} \right) \exp(-xL(w)) = 0 \quad \text{für alle } w \in \mathbb{E}.$$

Der Mittelwertsatz liefert $|G(w) - G(0)| \leq |w| \sup_{\theta \in [0,1]} |DG(\theta w)| = 0$ für alle $w \in \mathbb{E}$ und somit $G(w) = G(0) = B_x(0) \exp(-xL(0)) = 1$. Daraus folgt schließlich die Darstellung $B_x(w) = \exp(xL(w))$ für alle $w \in \mathbb{E}$ und $x \in \mathbb{C}$.

Komplexe hyperbolische Funktionen. 1. Die beiden Potenzreihen (C_n) und (S_n) von Funktionen $C_n : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ und $S_n : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, die durch die beiden Teilsummen $C_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{1}{(2k)!} x^{2k}$ und $S_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{1}{(2k+1)!} x^{2k+1}$ für $x \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ definiert werden, heißen *komplexe hyperbolische Cosinus-* bzw. *Sinusreihe*.

Da für jedes $x \in \mathbb{C}$ die Reihen der Absolutbeträge Teilreihen der Exponentialreihe $(\sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} |x|^k)$ sind, konvergiert die komplexe hyperbolische Cosinus- bzw. Sinusreihe gegen eine analytische Grenzfunktion $\text{Cosh} : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ bzw. $\text{Sinh} : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, die durch

$$\text{Cosh } x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!} \quad \text{bzw.} \quad \text{Sinh } x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} \quad \text{für } x \in \mathbb{C}$$

definiert und *komplexe hyperbolische Cosinus-* bzw. *Sinusfunktion* genannt wird.

2. Die Differentiation beider Reihen liefert $D \text{Cosh} = \text{Sinh}$ und $D \text{Sinh} = \text{Cosh}$.

3. Für alle $x \in \mathbb{C}$ folgen aus $\text{Exp}(x) = \text{Cosh } x + \text{Sinh } x$ sowie $\text{Cosh}(-x) = \text{Cosh } x$ und $\text{Sinh}(-x) = -\text{Sinh}(x)$ die Beziehungen

$$\text{Cosh } x = \frac{\text{Exp}(x) + \text{Exp}(-x)}{2} \quad \text{und} \quad \text{Sinh } x = \frac{\text{Exp}(x) - \text{Exp}(-x)}{2}.$$

Additionstheoreme für hyperbolische Funktionen. Für alle $x, y \in \mathbb{C}$ folgen aus $\text{Exp}(\pm(x+y)) = (\text{Cosh } x \text{Cosh } y \pm \text{Sinh } x \text{Sinh } y) \pm (\text{Sinh } x \text{Cosh } y + \text{Sinh } y \text{Cosh } x)$

$$\text{Cosh}(x \pm y) = \text{Cosh } x \text{Cosh } y \pm \text{Sinh } x \text{Sinh } y,$$

$$\text{Sinh}(x \pm y) = \text{Sinh } x \text{Cosh } y \pm \text{Sinh } y \text{Cosh } x.$$

Nullstellen und Wertebereich der hyperbolischen Funktionen. Es gilt

$$\text{Cosh } x = (\cosh \alpha \cos \beta, \sinh \alpha \sin \beta) \quad \text{und} \quad \text{Sinh } x = (\sinh \alpha \cos \beta, \cosh \alpha \sin \beta)$$

für alle $x = (\alpha, \beta) \in \mathbb{C}$, woraus sich jeweils die Nullstellenmenge

$$\{x \in \mathbb{C} \mid \text{Cosh } x = 0\} = \left\{ \left(\frac{\pi}{2} + \pi k \right) \mathbf{i} \mid k \in \mathbb{Z} \right\},$$

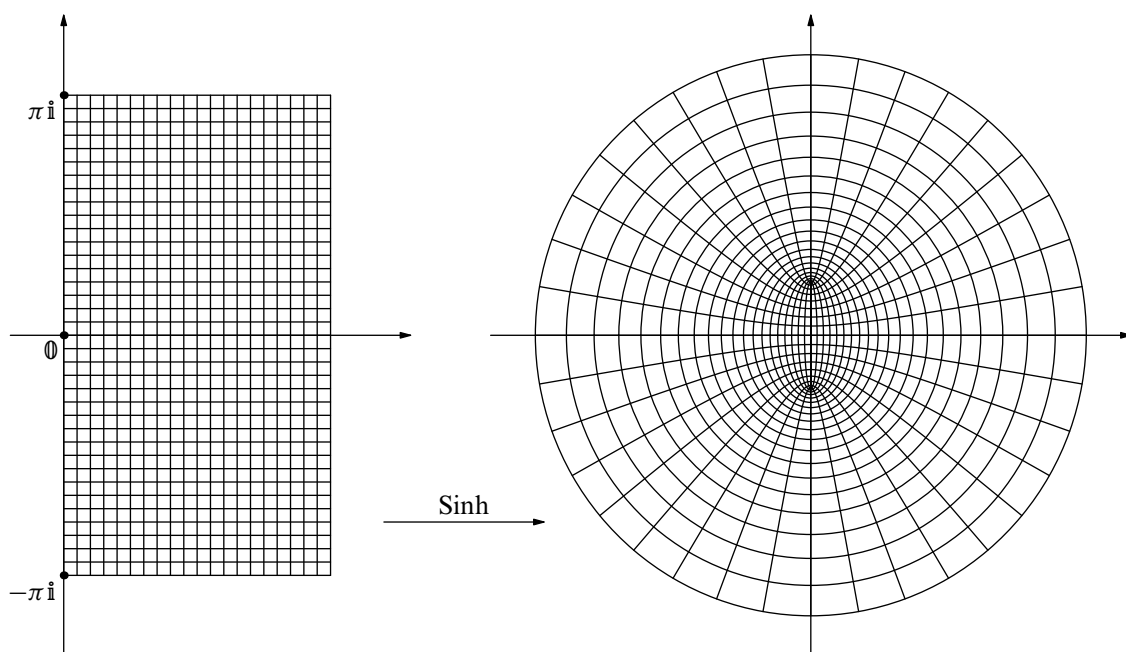
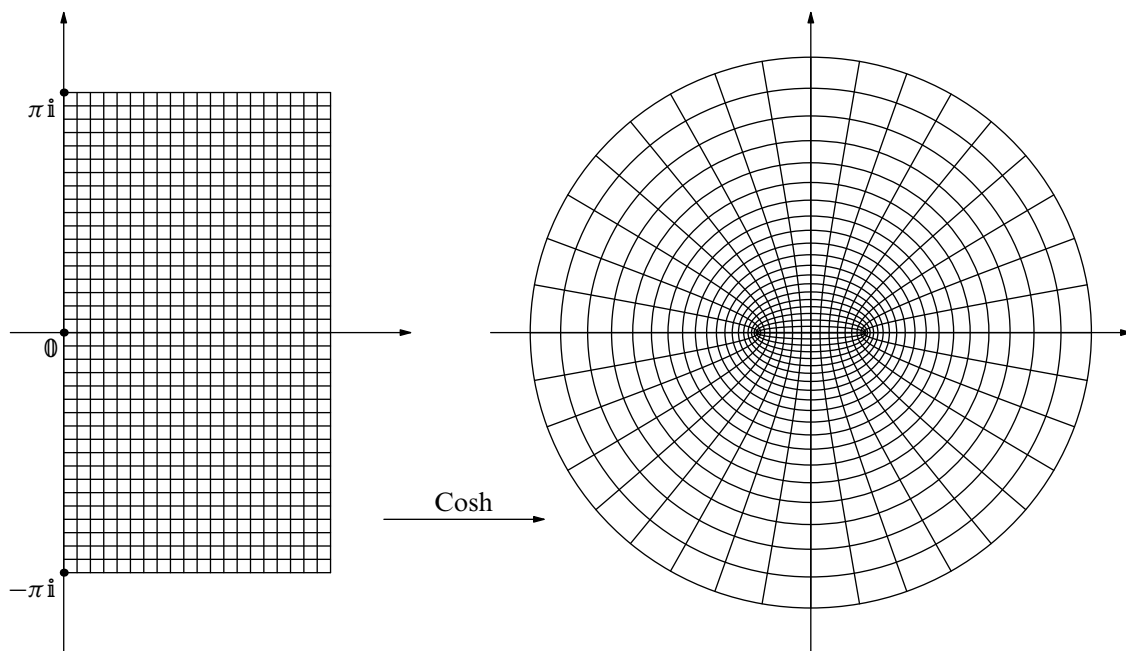
$$\{x \in \mathbb{C} \mid \text{Sinh } x = 0\} = \{ \pi k \mathbf{i} \mid k \in \mathbb{Z} \}$$

sowie jeweils der volle Wertebereich $\mathbb{C}$ für die Funktion Cosh bzw. Sinh ergibt.

Periodizität der hyperbolischen Funktionen. Es gelten die Beziehungen

$$\{x \in \mathbb{C} \mid \text{Cosh}(x+y) = \text{Cosh } y \text{ für jedes } y \in \mathbb{C}\} = \{2\pi k \mathbf{i} \mid k \in \mathbb{Z}\},$$

$$\{x \in \mathbb{C} \mid \text{Sinh}(x+y) = \text{Sinh } y \text{ für jedes } y \in \mathbb{C}\} = \{2\pi k \mathbf{i} \mid k \in \mathbb{Z}\}.$$



Komplexe trigonometrische Funktionen. 1. Die Potenzreihen (C_n) und (S_n) von Funktionen $C_n : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ und $S_n : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, welche durch die beiden Teilsummen $C_n(x) = \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{1}{(2k)!} x^{2k}$ und $S_n(x) = \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{1}{(2k+1)!} x^{2k+1}$ für $x \in \mathbb{C}$ und $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ definiert werden, heißen *komplexe Cosinus-* bzw. *Sinusreihe*.

Da für jedes $x \in \mathbb{C}$ die Reihen der Absolutbeträge Teilreihen der Exponentialreihe $(\sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} |x|^k)$ sind, konvergiert die komplexe Cosinus- bzw. Sinusreihe gegen eine analytische Grenzfunktion $\text{Cos} : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ bzw. $\text{Sin} : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, die durch

$$\text{Cos } x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k} \quad \text{bzw.} \quad \text{Sin } x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} \quad \text{für } x \in \mathbb{C}$$

definiert und *komplexe Cosinus-* bzw. *Sinusfunktion* genannt wird.

2. Die Differentiation beider Reihen liefert $D \text{Cos} = -\text{Sin}$ und $D \text{Sin} = \text{Cos}$.

Euler-Formeln. Durch den Grenzprozeß $n \rightarrow \infty$ in der aufgespaltenen Summe

$$\sum_{\ell=0}^{2n+1} \frac{1}{\ell!} (\text{i}x)^\ell = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k} + \text{i} \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1}$$

erhält man für jedes $x \in \mathbb{C}$ die *Euler-Formeln*

$$\text{Exp}(\text{i}x) = \text{Cos } x + \text{i} \text{Sin } x, \quad \text{Cos } x = \frac{\text{Exp}(\text{i}x) + \text{Exp}(-\text{i}x)}{2} = \text{Cosh}(\text{i}x),$$

$$\text{Exp}(-\text{i}x) = \text{Cos } x - \text{i} \text{Sin } x, \quad \text{Sin } x = \frac{\text{Exp}(\text{i}x) - \text{Exp}(-\text{i}x)}{2\text{i}} = -\text{i} \text{Sinh}(\text{i}x).$$

Additionstheoreme für trigonometrische Funktionen. Für alle $x, y \in \mathbb{C}$ folgen aus $\text{Exp}(\pm \text{i}(x+y)) = (\text{Cos } x \text{Cos } y \mp \text{Sin } x \text{Sin } y) \pm \text{i}(\text{Sin } x \text{Cos } y \pm \text{Sin } y \text{Cos } x)$

$$\text{Cos}(x \pm y) = \text{Cos } x \text{Cos } y \mp \text{Sin } x \text{Sin } y,$$

$$\text{Sin}(x \pm y) = \text{Sin } x \text{Cos } y \pm \text{Sin } y \text{Cos } x.$$

Nullstellen und Wertebereich der trigonometrischen Funktionen. Es gilt

$$\text{Cos } x = (\cos \alpha \cosh \beta, -\sin \alpha \sinh \beta) \quad \text{und} \quad \text{Sin } x = (\sin \alpha \cosh \beta, \cos \alpha \sinh \beta)$$

für alle $x = (\alpha, \beta) \in \mathbb{C}$, woraus sich jeweils die bekannte Nullstellenmenge

$$\{x \in \mathbb{C} \mid \text{Cos } x = 0\} = \{(\frac{\pi}{2} + \pi k, 0) \mid k \in \mathbb{Z}\},$$

$$\{x \in \mathbb{C} \mid \text{Sin } x = 0\} = \{(\pi k, 0) \mid k \in \mathbb{Z}\}$$

sowie der volle Wertebereich $\mathbb{C}$ für den komplexen Cosinus bzw. Sinus ergibt.

Periodizität der trigonometrischen Funktionen. Es gelten die Beziehungen

$$\{x \in \mathbb{C} \mid \text{Cos}(x+y) = \text{Cos } y \text{ für jedes } y \in \mathbb{C}\} = \{(2\pi k, 0) \mid k \in \mathbb{Z}\},$$

$$\{x \in \mathbb{C} \mid \text{Sin}(x+y) = \text{Sin } y \text{ für jedes } y \in \mathbb{C}\} = \{(2\pi k, 0) \mid k \in \mathbb{Z}\}.$$