Vorlesung 14

Kurvendiskussion reeller Funktionen

Es wird das Verhalten reellwertiger Funktionen $f : X \to \mathbb{R}$ in Intervallen $X \subset \mathbb{R}$ mit Hilfe ihrer Ableitungen untersucht.

Konstanz und Monotonie. Sei $f : X \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion.

1. Die Funktion f ist genau dann konstant, wenn $Df(x) = 0$ für jedes $x \in X$ gilt.

2. Die Funktion f ist genau dann monoton wachsend (bzw. fallend), wenn die Bedingung $Df(x) \geq 0$ (bzw. $Df(x) \leq 0$) für jeden inneren Punkt $x \in X$ gilt.

3. Die monoton wachsende (bzw. fallende) Funktion f ist genau dann streng monoton wachsend (bzw. fallend), wenn sie in keinem Teilintervall von X konstant ist.

Lokale Extremwerte. 1. Die Funktion $f : X \to \mathbb{R}$ hat in $x_0 \in X$ ein *lokales Maximum* (bzw. *Minimum*), wenn es ein $\delta > 0$ gibt, so daß $f(x) \leq f(x_0)$ (bzw. $f(x) \geq f(x_0)$) für alle $x \in X$ mit $|x - x_0| < \delta$ gilt.

2. Die Funktion $f : X \to \mathbb{R}$ besitzt in $x_0 \in X$ ein *strenges lokales Maximum* (bzw. *Minimum*), wenn es ein $\delta > 0$ gibt, so daß $f(x) < f(x_0)$ (bzw. $f(x) > f(x_0)$) für alle $x \in X$ mit $0 < |x - x_0| < \delta$ gilt.

Kriterien für strenge lokale Extremwerte. Sei $f : X \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, ferner $x_0 \in X$ ein innerer Punkt sowie $\delta_0 > 0$ derart, daß $]x_0 - \delta_0, x_0 + \delta_0[\subset X$ gilt und f in jedem Punkt $x \in X$ mit $0 < |x - x_0| < \delta_0$ differenzierbar ist.

1. Gibt es ein $\delta \in]0, \delta_0[$, so daß sowohl $Df(x) > 0$ (bzw. $Df(x) < 0$) für alle $x \in]x_0 - \delta, x_0[$ als auch $Df(x) < 0$ (bzw. $Df(x) > 0$) für alle $x \in]x_0, x_0 + \delta[$ gilt, dann besitzt f in x_0 ein strenges lokales Maximum (bzw. Minimum).

2. Existiert ein $\delta \in]0, \delta_0[$, so daß $Df(x) > 0$ (bzw. $Df(x) < 0$) für alle $x \in X$ mit $0 < |x - x_0| < \delta$ gilt, dann hat f in x_0 *keinen* lokalen Extremwert.

3. Ist f in $]x_0 - \delta_0, x_0 + \delta_0[$ differenzierbar und besitzt f in x_0 einen lokalen Extremwert, dann gilt $Df(x_0) = 0$.

Kriterium für strenge lokale Extremwerte bei mehrmaliger Differenzierbarkeit. Sei $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ und $f : X \to \mathbb{R}$ $(n-1)$-mal differenzierbar. Sei ferner $x_0 \in X$ ein innerer Punkt derart, daß $D^k f(x_0) = 0$ für alle $k \in \{1, \ldots, n-1\}$ gilt sowie f in x_0 n-mal differenzierbar ist und $D^n f(x_0) \neq 0$ gilt.

1. Ist $n \in \mathbb{N}$ gerade und gilt $D^n f(x_0) < 0$ (bzw. $D^n f(x_0) > 0$), dann besitzt f in x_0 ein strenges lokales Maximum (bzw. Minimum).

2. Ist $n \in \mathbb{N}$ ungerade, so hat f in x_0 *keinen* lokalen Extremwert.

Extremwerte. Sei X abgeschlossen und beschränkt sowie $f : X \to \mathbb{R}$ stetig. Dann ist auch das Bild $f[X]$ in $\mathbb{R}$ abgeschlossen und beschränkt und besitzt Maximum und Minimum, welches jeweils in inneren oder Randpunkten von X angenommen wird.

Konvexität und Konkavität. Sei $f : X \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion.

1. Die Funktion f heißt *(streng) konvex*, wenn für alle Punkte $x, y \in X$ mit $x < y$ und alle $\lambda \in [0, 1]$ die Ungleichung $f((1-\lambda)x + \lambda y) \leq (1-\lambda) f(x) + \lambda f(y)$ (bzw. $f((1-\lambda)x + \lambda y) < (1-\lambda) f(x) + \lambda f(y)$) gilt.
2. Die Funktion f heißt *(streng) konkav*, wenn $-f$ (streng) konvex ist.

Kriterien für Konvexität und Konkavität. Sei $f : X \to \mathbb{R}$ differenzierbar.

1. Die Funktion $f : X \to \mathbb{R}$ ist genau dann konvex (bzw. konkav), wenn ihre Ableitung $Df : X \to \mathbb{R}$ monoton wachsend (bzw. fallend) ist.
2. Die konvexe (bzw. konkave) Funktion $f : X \to \mathbb{R}$ ist genau dann streng konvex (bzw. konkav), wenn $Df : X \to \mathbb{R}$ in keinem Teilintervall von X konstant ist.

Wendepunkte. Ist $f : X \to \mathbb{R}$ differenzierbar, so heißt der innere Punkt $x_0 \in X$ *Wendepunkt* von f, wenn $Df : X \to \mathbb{R}$ in x_0 einen strengen lokalen Extremwert hat.

Kriterien für Wendepunkte. Sei $x_0 \in X$ ein innerer Punkt und $\delta_0 > 0$ derart beschaffen, daß $f : X \to \mathbb{R}$ in $]x_0 - \delta_0, x_0 + \delta_0[\subset X$ zweimal differenzierbar ist.

1. Gibt es ein $\delta \in]0, \delta[$, so daß sowohl $D^2 f(x) > 0$ (bzw. $D^2 f(x) < 0$) für alle $x \in]x_0 - \delta, x_0[$ als auch $D^2 f(x) < 0$ (bzw. $D^2 f(x) > 0$) für alle $x \in]x_0, x_0 + \delta[$ gilt, dann besitzt f in x_0 einen Wendepunkt.
2. Existiert ein $\delta \in]0, \delta[$, so daß $D^2 f(x) > 0$ (bzw. $D^2 f(x) < 0$) für alle $x \in X$ mit $0 < |x - x_0| < \delta$ gilt, dann hat f in x_0 *keinen* Wendepunkt.
3. Besitzt f in x_0 einen Wendepunkt, dann gilt $D^2 f(x_0) = 0$.

Kriterium für Wendepunkte bei mehrmaliger Differenzierbarkeit. Sei $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$ und $f : X \to \mathbb{R}$ n-mal differenzierbar. Sei ferner $x_0 \in X$ ein innerer Punkt derart, daß $D^k f(x_0) = 0$ für alle $k \in \{1, \ldots, n-1\}$ sowie $D^n f(x_0) \neq 0$ gilt.

1. Ist $n \in \mathbb{N}$ ungerade, dann besitzt f in x_0 einen Wendepunkt.
2. Ist $n \in \mathbb{N}$ gerade, so hat f in x_0 *keinen* Wendepunkt.

Grenzwertberechnung nach Bernoulli-de l'Hospital. Seien $-\infty \leq a < b \leq \infty$, $-\infty \leq y_0 \leq \infty$ und $f, g :]a, b[\to \mathbb{R}$ differenzierbare Funktionen, so daß sowohl $Dg(x) \neq 0$ für alle $x \in]a, b[$ als auch für ein x_0 mit $a \leq x_0 \leq b$ die Beziehung

$$\lim_{x \to x_0} \frac{Df(x)}{Dg(x)} = y_0 \quad \text{gilt.}$$

Dann gibt es im Falle

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} g(x) = 0 \quad \text{oder} \quad \lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} g(x) = \pm\infty$$

ein $\delta > 0$, so daß $g(x) \neq 0$ für alle $x \in]a, b[$ mit $|x - x_0| < \delta$ sowie die Beziehung

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = y_0 \quad \text{gilt.}$$