Vorlesung 15

Stammfunktionen reeller Funktionen

Seien a, $b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ sowie $X = [a, b] \subset \mathbb{R}$ ein abgeschlossenes beschränktes Intervall. Es werden Funktionen $f : X \to \mathbb{L}$ mit Werten im Körper $\mathbb{L} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ betrachtet, deren Ableitung (außer auf abzählbaren Teilmengen) mit einer regulierten Funktion $g : X \to \mathbb{L}$ übereinstimmt.

Mittelwertsatz. Sei $f : [a, b] \to \mathbb{L}$ eine stetige Funktion. Existiert eine abzählbare Teilmenge $E \subset [a, b]$ und eine Konstante $M \geq 0$ derart, daß f in jedem Punkt $x_0 \in [a, b] \setminus E$ differenzierbar ist und dabei die Bedingung $|Df(x_0)| \leq M$ erfüllt, dann gilt die Abschätzung $|f(b) - f(a)| \leq M|b - a|$.

Vertauschbarkeit von Grenzprozessen. Sei (f_n) eine Folge stetiger Funktionen $f_n : [a, b] \to \mathbb{L}$, die punktweise gegen eine Grenzfunktion $f : [a, b] \to \mathbb{L}$ konvergiert. Sei (g_n) eine Folge von Funktionen $g_n : [a, b] \to \mathbb{L}$ und (E_n) eine Familie abzählbarer Mengen $E_n \subset [a, b]$ derart, daß für jedes $n \in \mathbb{N}$ die Funktion f_n in jedem $x_0 \in [a, b] \setminus E_n$ differenzierbar ist und die Ableitung $Df_n(x_0) = g_n(x_0)$ hat. Desweiteren sei $E = \cup_{n \in \mathbb{N}} E_n \subset [a, b]$ die abzählbare Vereinigung der Mengen $E_n \subset [a, b]$.

Konvergiert (g_n) gleichmäßig gegen eine Grenzfunktion $g : [a, b] \to \mathbb{L}$, so konvergiert (f_n) gleichmäßig gegen die Grenzfunktion $f : [a, b] \to \mathbb{L}$, die außerdem in jedem Punkt $x_0 \in [a, b] \setminus E$ differenzierbar ist, wobei $Df(x_0) = g(x_0)$ gilt.

Stammfunktionen. 1. Eine stetige Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{L}$ heißt *Stammfunktion* einer Funktion $g : [a, b] \to \mathbb{L}$, wenn es eine abzählbare Teilmenge $E \subset [a, b]$ gibt, so daß f in jedem Punkt $x_0 \in [a, b] \setminus E$ differenzierbar ist und $Df(x_0) = g(x_0)$ gilt.

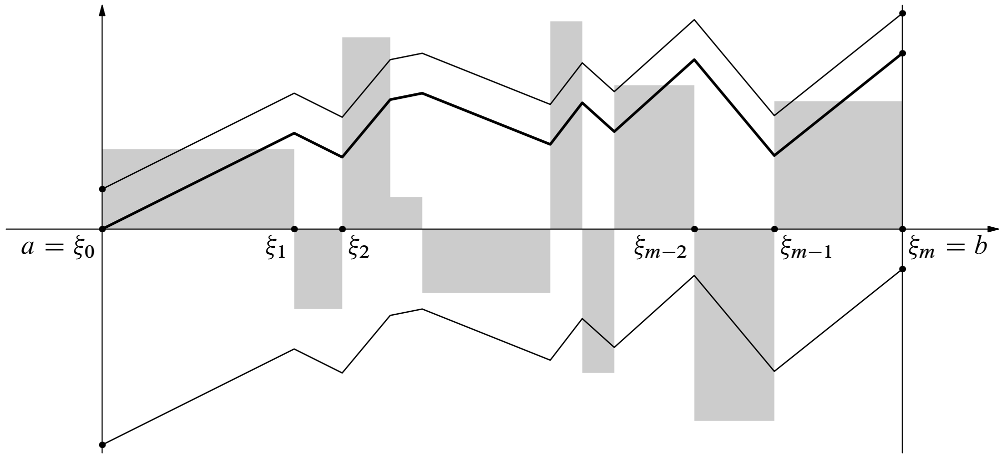
2. Sind f_1, $f_2 : [a, b] \to \mathbb{L}$ Stammfunktionen von $g : [a, b] \to \mathbb{L}$, dann ist deren Differenz $f_1 - f_2$ aufgrund des Mittelwertsatzes eine konstante Funktion.

Stammfunktionen von Treppenfunktionen. 1. Die Funktion $g : [a, b] \to \mathbb{L}$ heißt *Treppenfunktion*, wenn es eine endliche Folge $a = \xi_0 < \xi_1 < \cdots < \xi_{m-1} < \xi_m = b$ von Punkten aus $[a, b]$ gibt, so daß g für jedes $k \in \{1, \ldots, m\}$ jeweils auf $]\xi_{k-1}, \xi_k[$ einen konstanten Wert $y_k \in \mathbb{L}$ annimmt.

2. In diesem Falle ist die durch die Vorschrift

$$f(x) = y_k(x - \xi_{k-1}) + \sum_{\ell=1}^{k-1} y_\ell(\xi_\ell - \xi_{\ell-1}) \quad \text{für } x \in [\xi_{k-1}, \xi_k] \text{ und } k \in \{1, \ldots, m\}$$

definierte *stückweise lineare* Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{L}$ eine Stammfunktion von g.



Stammfunktionen von regulierten Funktionen. 1. Eine Funktion $g : [a,b] \to \mathbb{L}$ heißt *reguliert,* wenn für jedes $x_0 \in\,]a,b]$ der linksseitige Grenzwert $\lim_{x \uparrow x_0} g(x) \in \mathbb{L}$ und für jedes $x_0 \in [a,b[$ der rechtsseitige Grenzwert $\lim_{x \downarrow x_0} g(x) \in \mathbb{L}$ existiert.

2. Die Funktion $g : [a,b] \to \mathbb{L}$ ist genau dann reguliert, wenn eine Folge (g_n) von Treppenfunktionen $g_n : [a,b] \to \mathbb{L}$ existiert, die gleichmäßig gegen g konvergiert.

3. In diesem Falle gibt es zur Folge (g_n) der Treppenfunktionen vermöge der obigen Konstruktion eine Folge (f_n) stückweise linearer Funktionen $f_n : [a,b] \to \mathbb{L}$, welche gleichmäßig gegen eine Stammfunktion $f : [a,b] \to \mathbb{L}$ von g konvergiert.

Stammfunktionen stetiger Funktionen. Ist $f : [a,b] \to \mathbb{L}$ eine Stammfunktion einer stetigen Funktion $g : [a,b] \to \mathbb{L}$, dann ist f differenzierbar, und es gilt $Df = g$.

Integrale. 1. Ist $f : [a,b] \to \mathbb{L}$ irgendeine Stammfunktion einer regulierten Funktion $g : [a,b] \to \mathbb{L}$, so ist die Differenz $f(x_2) - f(x_1)$ für je zwei Punkte $x_1, x_2 \in [a,b]$ von der speziellen Wahl von f *unabhängig*. Man bezeichnet diese Differenz

$$\int_{x_1}^{x_2} g(\xi)\, d\xi = f(x_2) - f(x_1) \in \mathbb{L}$$

als *Integral über g von x_1 bis x_2*. Jede formale Regel der Differentialrechnung kann in diese Bezeichnungsweise übertragen werden und liefert eine entsprechende Formel der Integralrechnung.

2. Für alle Punkte $x_1, x_2, x_3 \in [a,b]$ erhält man die Beziehungen

$$\int_{x_2}^{x_1} g(\xi)\, d\xi = -\int_{x_1}^{x_2} g(\xi)\, d\xi \quad \text{sowie} \quad \int_{x_1}^{x_3} g(\xi)\, d\xi = \int_{x_1}^{x_2} g(\xi)\, d\xi + \int_{x_2}^{x_3} g(\xi)\, d\xi.$$

3. Da eine abzählbare Menge $E \subset [a,b]$ existiert, so daß die Stammfunktion f in jedem Punkt $\xi \in [a,b] \setminus E$ differenzierbar ist und $Df(\xi) = g(\xi)$ gilt, verwendet man im Integranden mitunter der Kürze halber die Schreibweise $Df(\xi)$ statt $g(\xi)$, da das Integral über diese Funktion nicht von deren Werten auf der Menge E abhängt.

Grundintegrale über Potenzfunktionen.

$$\int_a^b t^k\,dt = \frac{b^{k+1}-a^{k+1}}{k+1} \quad \text{für } k \in \mathbb{N}\cup\{0\} \text{ oder } k \in \mathbb{Z}\setminus\{-1\} \text{ mit } 0 \notin [a,b].$$

$$\int_a^b t^x\,dt = \frac{b^{x+1}-a^{x+1}}{x+1} \quad \text{für } x \in \mathbb{R}\setminus\{-1\}, \text{ wobei } a,b \in \,]0,\infty[.$$

$$\int_a^b \frac{dt}{t} = \ln|b| - \ln|a|, \quad \text{wobei } 0 \notin [a,b].$$

$$\int_a^b \exp(t)\,dt = \exp(b) - \exp(a).$$

Grundintegrale über trigonometrische Funktionen.

$$\int_a^b \cos t\,dt = \sin b - \sin a.$$

$$\int_a^b \sin t\,dt = -\cos b + \cos a.$$

$$\int_a^b \cot t\,dt = \ln(\sin b) - \ln(\sin a), \quad \text{wobei } a,b \in \,]0,\pi[.$$

$$\int_a^b \tan t\,dt = -\ln(\cos b) + \ln(\cos a), \quad \text{wobei } a,b \in \left]-\tfrac{\pi}{2},\tfrac{\pi}{2}\right[.$$

$$\int_a^b (1+\tan^2 t)\,dt = \int_a^b \frac{dt}{\cos^2 t} = \tan b - \tan a, \quad \text{wobei } a,b \in \left]-\tfrac{\pi}{2},\tfrac{\pi}{2}\right[.$$

$$\int_a^b (1+\cot^2 t)\,dt = \int_a^b \frac{dt}{\sin^2 t} = -\cot b + \cot a, \quad \text{wobei } a,b \in \,]0,\pi[.$$

Grundintegrale über hyperbolische Funktionen.

$$\int_a^b \cosh t\,dt = \sinh b - \sinh a.$$

$$\int_a^b \sinh t\,dt = \cosh b - \cosh a.$$

$$\int_a^b \coth t\,dt = \ln|\sinh b| - \ln|\sinh a|, \quad \text{wobei } 0 \notin [a,b].$$

$$\int_a^b \tanh t\,dt = \ln(\cosh b) - \ln(\cosh a).$$

$$\int_a^b (1-\tanh^2 t)\,dt = \int_a^b \frac{dt}{\cosh^2 t} = \tanh b - \tanh a.$$

$$\int_a^b (1-\coth^2 t)\,dt = -\int_a^b \frac{dt}{\sinh^2 t} = \coth b - \coth a, \quad \text{wobei } 0 \notin [a,b].$$

Grundintegrale über algebraische Funktionen.

$$\int_a^b \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \arcsin b - \arcsin a, \quad \text{wobei } a, b \in]-1, 1[.$$

$$\int_a^b \frac{dt}{1+t^2} = \arctan b - \arctan a.$$

$$\int_a^b \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}} = \operatorname{arsinh} b - \operatorname{arsinh} a.$$

$$\int_a^b \frac{dt}{\sqrt{t^2-1}} = \operatorname{arcosh} b - \operatorname{arcosh} a, \quad \text{wobei } a, b \in]1, \infty[.$$

$$\int_a^b \frac{dt}{1-t^2} = \operatorname{artanh} b - \operatorname{artanh} a, \quad \text{wobei } a, b \in]-1, 1[.$$

$$\int_a^b \frac{dt}{1-t^2} = \operatorname{arcoth} b - \operatorname{arcoth} a, \quad \text{wobei } [a, b] \cap [-1, 1] = \varnothing.$$