Vorlesung 17

Elementare Integrale

Es werden einige Klassen von Funktionen betrachtet, die sich in geschlossener Form integrieren lassen. Seien Intervallgrenzen $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ gegeben.

Teilbruchzerlegung. Seien $n \in \mathbb{N}$ und Koeffizienten $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ mit $a_n = 1$ sowie die ganze rationale Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch $f(\xi) = \sum_{k=0}^{n} a_k \xi^k$ für $\xi \in \mathbb{R}$ gegeben. Es sei vorausgesetzt, daß es Zahlen $\ell_1, \ell_2 \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ sowie $\alpha_1, \ldots, \alpha_{\ell_1} \in \mathbb{N}$, $\beta_1, \ldots, \beta_{\ell_2} \in \mathbb{N}$ mit $\sum_{k=1}^{\ell_1} \alpha_k + \sum_{k=1}^{\ell_2} 2\beta_k = n$ sowie $x_1, \ldots, x_{\ell_1} \in \mathbb{R}$, $y_1, \ldots, y_{\ell_2} \in \mathbb{R}$ und $d_1, \ldots, d_{\ell_2} \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ gibt, so daß f die Darstellung

$$f(\xi) = \sum_{k=0}^{n} a_k \xi^k = \prod_{k=1}^{\ell_1} (\xi - x_k)^{\alpha_k} \cdot \prod_{k=1}^{\ell_2} ((\xi - y_k)^2 + d_k^2)^{\beta_k} \quad \text{für alle } \xi \in \mathbb{R}$$

als Produkt teilerfremder Faktoren besitzt. Seien $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ mit $m < n$ und Koeffizienten $b_0, \ldots, b_m \in \mathbb{R}$ mit $b_m \neq 0$ gegeben, so daß die durch $\varphi(x) = \sum_{k=0}^{m} b_k \xi^k$ für $\xi \in \mathbb{R}$ definierte ganze rationale Funktion $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ teilerfremd zu f ist.

Unter diesen Voraussetzungen kann man für die echt gebrochene rationale Funktion $\frac{\varphi}{f} : \mathbb{R} \setminus \{x_1, \ldots, x_{\ell_1}\} \to \mathbb{R}$ eine eindeutige Darstellung als *Teilbruchzerlegung*

$$\frac{\varphi(\xi)}{f(\xi)} = \sum_{k=1}^{\ell_1} \sum_{j=1}^{\alpha_k} \frac{z_{kj}}{(\xi - x_k)^j} + \sum_{k=1}^{\ell_2} \sum_{j=1}^{\beta_k} \frac{p_{kj}(\xi - y_k) + q_{kj}}{((\xi - y_k)^2 + d_k^2)^j} \quad \text{für } \xi \in \mathbb{R} \setminus \{x_1, \ldots, x_{\ell_1}\}$$

mit Koeffizienten $z_{k1}, \ldots, z_{k\alpha_k} \in \mathbb{R}$ für $k \in \{1, \ldots, \ell_1\}$ sowie $p_{k1}, \ldots, p_{k\beta_k} \in \mathbb{R}$ und $q_{k1}, \ldots, q_{k\beta_k} \in \mathbb{R}$ für $k \in \{1, \ldots, \ell_2\}$ finden, welche sich aus beiden Darstellungen nach Multiplikation mit dem Hauptnenner und dem Koeffizientenvergleich vor Termen gleicher Ordnung in ξ als Lösung eines linearen Gleichungssystems ergeben.

Integration rationaler Funktionen. Nach der Teilbruchzerlegung kann über jede echt gebrochene rationale Funktion in geschlossener Form integriert werden, wobei man die Teilbrüche danach unterscheidet, ob ihre Nenner reelle Nullstellen besitzen oder nicht, und danach, ob die Ordnung $j \in \mathbb{N}$ den Wert $j = 1$ oder $j > 1$ besitzt:

1. Für alle $z, x \in \mathbb{R}$ ergibt sich im Falle $j = 1$ das Grundintegral

$$\int_a^b \frac{z\, d\xi}{\xi - x} = z \ln|b - x| - z \ln|a - x|, \quad \text{falls } x \notin [a, b].$$

2. Für alle $z, x \in \mathbb{R}$ erhält man im Falle $j > 1$ das Grundintegral

$$\int_a^b \frac{z\, d\xi}{(\xi - x)^j} = -\frac{1}{j-1} \frac{z}{(b - x)^{j-1}} + \frac{1}{j-1} \frac{z}{(a - x)^{j-1}}, \quad \text{falls } x \notin [a, b].$$

3. Seien $p, q, y, d \in \mathbb{R}$ mit $d > 0$ gegeben. Besitzt der Nenner *keine* reellen Nullstellen, so ergibt sich im Falle $j = 1$ die Linearkombination

$$\int_a^b \frac{(p(\xi - y) + q)\, d\xi}{(\xi - y)^2 + d^2} = \frac{p}{2} \int_a^b \frac{2(\xi - y)\, d\xi}{(\xi - y)^2 + d^2} + q \int_a^b \frac{d\xi}{(\xi - y)^2 + d^2}$$

der beiden elementaren Integrale

$$\int_a^b \frac{2(\xi - y)\, d\xi}{(\xi - y)^2 + d^2} = \ln\big((b - y)^2 + d^2\big) - \ln\big((a - y)^2 + d^2\big),$$

$$\int_a^b \frac{d\xi}{(\xi - y)^2 + d^2} = \frac{1}{d} \arctan \frac{b - y}{d} - \frac{1}{d} \arctan \frac{a - y}{d} .$$

4. Seien $p, q, y, d \in \mathbb{R}$ mit $d > 0$ gegeben. Besitzt der Nenner *keine* reellen Nullstellen, so betrachtet man im Falle $j > 1$ die Linearkombination

$$\int_a^b \frac{(p(\xi - y) + q)\, d\xi}{((\xi - y)^2 + d^2)^j} = \frac{p}{2} \int_a^b \frac{2(\xi - y)\, d\xi}{((\xi - y)^2 + d^2)^j} + q \int_a^b \frac{d\xi}{((\xi - y)^2 + d^2)^j}$$

des elementaren Integrals

$$\int_a^b \frac{2(\xi - y)\, d\xi}{((\xi - y)^2 + d^2)^j} = -\frac{1}{j - 1} \frac{1}{((b - y)^2 + d^2)^{j-1}} + \frac{1}{j - 1} \frac{1}{((a - y)^2 + d^2)^{j-1}}$$

und des Integrals $\int_a^b \frac{d\xi}{((\xi - y)^2 + d^2)^j}$, welches schrittweise mit Hilfe einer Rekursionsformel auf den schon untersuchten Fall $j = 1$ zurückgeführt wird: Zunächst erhält man durch teilweise Integration

$$\int_a^b \frac{d\xi}{((\xi - y)^2 + d^2)^{j-1}} = \frac{b - y}{((b - y)^2 + d^2)^{j-1}} - \frac{a - y}{((a - y)^2 + d^2)^{j-1}} + \int_a^b \frac{2(j - 1)(\xi - y)^2\, d\xi}{((\xi - y)^2 + d^2)^j} .$$

Das letzte Integral läßt sich folgendermaßen umformen:

$$\begin{aligned} \int_a^b \frac{2(j - 1)(\xi - y)^2\, d\xi}{((\xi - y)^2 + d^2)^j} &= \int_a^b \frac{2(j - 1)((\xi - y)^2 + d^2 - d^2)\, d\xi}{((\xi - y)^2 + d^2)^j} \\ &= \int_a^b \frac{2(j - 1)\, d\xi}{((\xi - y)^2 + d^2)^{j-1}} - \int_a^b \frac{2(j - 1) d^2\, d\xi}{((\xi - y)^2 + d^2)^j} . \end{aligned}$$

Aus beiden Identitäten ergibt sich somit die gesuchte Rekursionsformel

$$\begin{aligned} \int_a^b \frac{d\xi}{((\xi - y)^2 + d^2)^j} = {} & \frac{1}{2(j - 1)d^2} \left(\frac{b - y}{((b - y)^2 + d^2)^{j-1}} - \frac{a - y}{((a - y)^2 + d^2)^{j-1}} \right) \\ & + \frac{2(j - 1) - 1}{2(j - 1)d^2} \int_a^b \frac{d\xi}{((\xi - y)^2 + d^2)^{j-1}} , \end{aligned}$$

die nach $(j - 1)$-maliger Anwendung auf das bekannte Integral $\int_a^b \frac{d\xi}{(\xi - y)^2 + d^2}$ führt.

Verkettung rationaler und trigonometrischer Funktionen. Seien Intervallgrenzen $\alpha, \beta \in]-\pi, \pi[$ mit $\alpha < \beta$, ferner $X = \{(\cos\theta, \sin\theta) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid \theta \in [\alpha, \beta]\}$ sowie eine rationale Funktion $h : X \to \mathbb{R}$ gegeben. Zur Zurückführung des Integrals

$$\int_\alpha^\beta h(\cos\theta, \sin\theta)\, d\theta = \int_a^b h(\cos\varphi(\xi), \sin\varphi(\xi))\, D\varphi(\xi)\, d\xi$$

auf ein Integral über eine rationale Funktion eignet sich die durch $\varphi(\xi) = 2\arctan\xi$ definierte Transformation $\varphi : \mathbb{R} \to]-\pi, \pi[$ der neuen Variablen $\xi \in \mathbb{R}$ in die alte Variable $\theta = \varphi(\xi) \in]-\pi, \pi[$, wobei die neuen Grenzen $a, b \in \mathbb{R}$ durch $\varphi(a) = \alpha$ und $\varphi(b) = \beta$ gegeben sind. Aus $\xi = \varphi^{-1}(\theta) = \tan\frac{\theta}{2}$ ergeben sich

$$\cos^2\tfrac{\theta}{2} = \frac{1}{1+\xi^2}, \quad \cos\theta = 2\cos^2\tfrac{\theta}{2} - 1 = \frac{1-\xi^2}{1+\xi^2}, \quad \sin\theta = 2\tan\tfrac{\theta}{2}\cos^2\tfrac{\theta}{2} = \frac{2\xi}{1+\xi^2}$$

und somit schließlich die Umwandlung in ein Integral

$$\int_\alpha^\beta h(\cos\theta, \sin\theta)\, d\theta = \int_a^b h\left(\frac{1-\xi^2}{1+\xi^2}, \frac{2\xi}{1+\xi^2}\right) \frac{2\, d\xi}{1+\xi^2}$$

über eine in ξ rationale Funktion.

Verkettung rationaler und Exponentialfunktionen. Sei $h : [\exp(a), \exp(b)] \to \mathbb{R}$ eine rationale Funktion. Man wandelt das Integral

$$\int_a^b h(\exp(x))\, dx = \int_s^t h(\exp(\varphi(\xi)))\, D\varphi(\xi)\, d\xi = \int_s^t \frac{h(\xi)\, d\xi}{\xi}$$

in ein Integral über eine rationale Funktion mit den Intervallgrenzen $s = \exp(a)$ und $t = \exp(b)$ um, indem man die durch $\varphi(\xi) = \ln(\xi)$ definierte Transformation $\varphi :]0, \infty[\to \mathbb{R}$ der Variablen $\xi \in]0, \infty[$ in $x = \varphi(\xi) \in \mathbb{R}$ anwendet.

Verkettung rationaler und Wurzelfunktionen. Seien $y, \delta \in \mathbb{R}$ mit $\delta > 0$ vorgegeben und durch $\varphi(\xi) = y + \delta\xi$ eine Transformation $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ der Variablen $\xi \in \mathbb{R}$ in $x = \varphi(\xi) \in \mathbb{R}$ sowie neue Grenzen $s = \frac{a-y}{\delta} \in \mathbb{R}$ und $t = \frac{b-y}{\delta} \in \mathbb{R}$ definiert.

1. Sei $[a, b] \subset [y - \delta, y + \delta]$. Ist die rationale Funktion $h : X \to \mathbb{R}$ in der Menge $X = \{(x, \sqrt{\delta^2 - (x-y)^2}) \mid x \in [a, b]\}$ definiert, so erhält man zunächst

$$\int_a^b h\big(x, \sqrt{\delta^2 - (x-y)^2}\big)\, dx = \int_s^t h\big(y + \delta\xi, \delta\sqrt{1-\xi^2}\big)\, \delta\, d\xi.$$

Dann bildet man durch $\psi(\theta) = \sin\theta$ eine Transformation $\psi : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to [-1, 1]$ der neuen Variablen $\theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ in $\xi = \psi(\theta) \in [-1, 1]$ und erhält für die durch $\psi(\alpha) = s$ und $\psi(\beta) = t$ gegebenen Grenzen $\alpha, \beta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ das Integral

$$\int_a^b h\big(x, \sqrt{\delta^2 - (x-y)^2}\big)\, dx = \int_\alpha^\beta h\big(y + \delta\sin\theta, \delta\cos\theta\big)\, \delta\cos\theta\, d\theta.$$

2. Sei $]a,b[\,\cap\,[y-\delta, y+\delta] = \emptyset$. Ist $X = \{(x, \sqrt{(x-y)^2-\delta^2}) \mid x \in [a,b]\}$ und $h : X \to \mathbb{R}$ eine rationale Funktion, so ergibt sich in einem ersten Schritt

$$\int_a^b h\big(x, \sqrt{(x-y)^2-\delta^2}\big)\, dx = \int_s^t h\big(y+\delta\xi, \delta\sqrt{\xi^2-1}\big)\, \delta\, d\xi.$$

Für $[a,b] \subset [y+\delta, \infty[$ definiert man eine Transformation $\psi : [0,\infty[\, \to [1,\infty[$ der neuen Variablen $z \in [0,\infty[$ in $\xi = \psi(z) \in [1,\infty[$ durch $\psi(z) = \cosh z$ und erhält für die durch $\psi(u) = s$ und $\psi(v) = t$ gegebenen Grenzen $u, v \in [0,\infty[$ das Integral

$$\int_a^b h\big(x, \sqrt{(x-y)^2-\delta^2}\big)\, dx = \int_u^v h\big(y+\delta\cosh z, \delta\sinh z\big)\, \delta\sinh z\, dz.$$

Für $[a,b] \subset\,]-\infty, y-\delta]$ bildet man die Transformation $\psi : [0,\infty[\, \to\,]-\infty,-1]$ der Variablen $z \in [0,\infty[$ in $\xi = \psi(z) \in\,]-\infty,-1]$ durch $\psi(z) = -\cosh z$ und erhält für die durch $\psi(u) = s$ und $\psi(v) = t$ gegebenen Grenzen $u, v \in [0,\infty[$ das Integral

$$\int_a^b h\big(x, \sqrt{(x-y)^2-\delta^2}\big)\, dx = -\int_u^v h\big(y-\delta\cosh z, \delta\sinh z\big)\, \delta\sinh z\, dz.$$

3. Ist hingegen $X = \{(x, \sqrt{(x-y)^2+\delta^2}) \mid x \in [a,b]\}$ und $h : X \to \mathbb{R}$ eine rationale Funktion, so erhält man zuerst

$$\int_a^b h\big(x, \sqrt{(x-y)^2+\delta^2}\big)\, dx = \int_s^t h\big(y+\delta\xi, \delta\sqrt{\xi^2+1}\big)\, \delta\, d\xi.$$

Anschließend definiert man durch $\psi(z) = \sinh z$ eine Transformation $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ der neuen Variablen $z \in \mathbb{R}$ in $\xi = \psi(z) \in \mathbb{R}$ und bekommt für die durch $\psi(u) = s$ und $\psi(v) = t$ gegebenen Grenzen $u, v \in \mathbb{R}$ das Integral

$$\int_a^b h\big(x, \sqrt{(x-y)^2+\delta^2}\big)\, dx = \int_u^v h\big(y+\delta\sinh z, \delta\cosh z\big)\, \delta\cosh z\, dz.$$