Vorlesung 19

Kurven und Wege in der Ebene

Seien Grenzen $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ abgeschlossener beschränkter Intervalle $X = [a,b]$ und $Y = [c,d]$ mit $a < b$ und $c < d$, desweiteren ein beliebiges Intervall $S \subset \mathbb{R}$ sowie eine offene Menge $U \subset \mathbb{C}$ gegeben.

Kurven in der komplexen Zahlenebene. 1. Jede stetige Funktion $\gamma : X \to \mathbb{C}$ mit $\gamma[X] \subset U$ wird als *Kurve in U* mit dem *Anfang* $\gamma(a)$ und dem *Ende* $\gamma(b)$ bezeichnet.

2. Im Falle $\gamma(a) = \gamma(b)$ nennt man γ eine *geschlossene Kurve in U*.

3. Ist γ eine konstante Funktion, so *reduziert sich γ auf einen Punkt $\gamma(a) \in U$*.

Entgegengesetzte und zusammengesetzte Kurven. 1. Ist $\gamma : X \to \mathbb{C}$ eine Kurve, so wird die durch $\gamma_\ominus(t) = \gamma(a + b - t)$ für $t \in X$ definierte Kurve $\gamma_\ominus : X \to \mathbb{C}$ mit demselben Bild $\gamma_\ominus[X] = \gamma[X]$ die *zu γ entgegengesetzte Kurve* genannt.

2. Ist $\sigma : Y \to \mathbb{C}$ eine Kurve, deren Anfang $\sigma(c) = \gamma(b)$ mit dem Ende der Kurve $\gamma : X \to \mathbb{C}$ übereinstimmt, so definiert man die *Zusammensetzung* $\gamma \oplus \sigma : Z \to \mathbb{C}$ *von γ und σ* in $Z = [a, b + d - c] = [a,b] \cup [b, b + d - c]$ durch $(\gamma \oplus \sigma)(t) = \gamma(t)$ für $t \in [a,b]$ sowie durch $(\gamma \oplus \sigma)(t) = \sigma(t + c - b)$ für $t \in [b, b + d - c]$, wobei stets $(\gamma \oplus \sigma)_\ominus = \sigma_\ominus \oplus \gamma_\ominus$ gilt und $\gamma \oplus \gamma_\ominus$ eine geschlossene Kurve ist.

Wege und Streckenzüge. 1. Eine Kurve $\gamma : X \to \mathbb{C}$ heißt *Weg* (bzw. *Streckenzug*), wenn sie Stammfunktion einer regulierten Funktion (bzw. einer Treppenfunktion) ist.

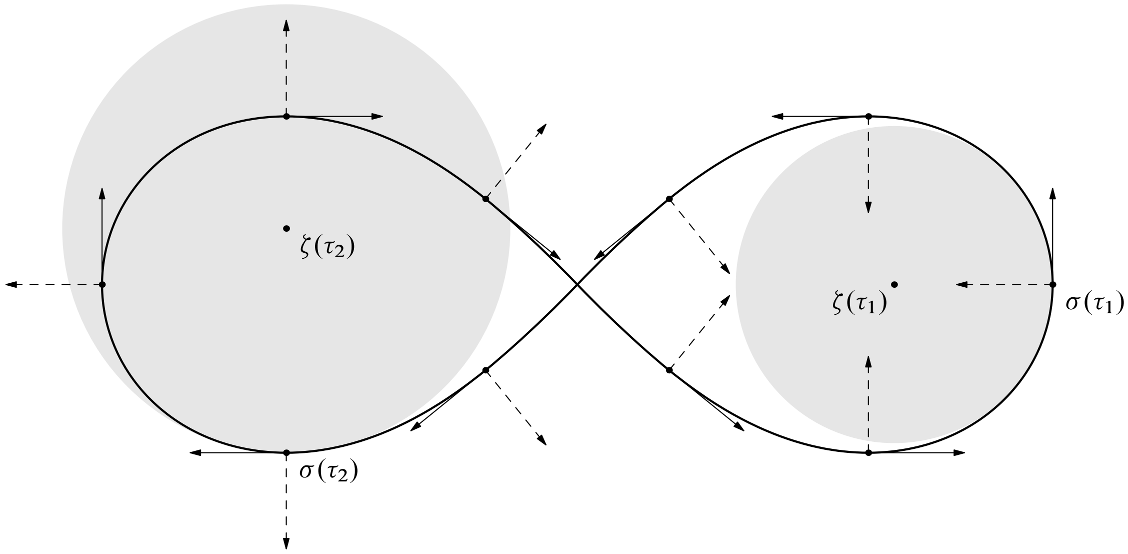
2. Die zu einem Weg (bzw. Streckenzug) entgegengesetzte Kurve ist wieder ein Weg (bzw. Streckenzug), ebenso die Zusammensetzung zweier Wege (bzw. Streckenzüge).

Uneigentliche Wege und Streckenzüge. Eine stetige Funktion $\gamma : S \to \mathbb{C}$ wird als *uneigentlicher Weg* (bzw. *Streckenzug*) bezeichnet, wenn die Einschränkung von γ auf jedes abgeschlossene beschränkte Teilintervall von S jeweils ein eigentlicher Weg (bzw. Streckenzug) ist.

Länge eines Weges. Als *Länge eines Weges $\gamma : X \to \mathbb{C}$* definiert man das Integral $\int_a^b |D\gamma(t)|\,dt \geq 0$ über den Betrag der Geschwindigkeit im Zeitintervall $X = [a,b]$.

Unabhängigkeit der Weglänge von der Parametrisierung. Sind $\gamma : X \to \mathbb{C}$ und $\sigma : Y \to \mathbb{C}$ zwei Wege sowie $\varphi : X \to Y$ eine monoton wachsende Funktion mit $\varphi[X] = Y$ und $\gamma = \sigma \circ \varphi$, welche Stammfunktion einer regulierten Funktion ist, so stimmen die Längen der Wege γ und σ überein, denn es gilt

$$\int_a^b |D\gamma(t)|\,dt = \int_a^b |D\sigma(\varphi(t))|\,D\varphi(t)\,dt = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} |D\sigma(\tau)|\,d\tau = \int_c^d |D\sigma(\tau)|\,d\tau.$$



Parametrisierung nach der Länge eines Weges. Gilt für einen Weg $\sigma : Y \to \mathbb{C}$ und irgendein (und somit für jedes) $s \in Y$ die Beziehung

$$\int_s^t |D\sigma(\tau)|\, d\tau = t - s \quad \text{für alle } t \in Y = [c, d],$$

so nennt man $\sigma : Y \to \mathbb{C}$ einen *nach seiner Länge parametrisierten Weg*.

Tangentiale Berührung. Ist der Weg $\gamma : X \to \mathbb{C}$ in $\tau \in X$ differenzierbar und gilt $|D\gamma(\tau)| > 0$, so liefert die Linearisierung

$$g(t) = \gamma(\tau) + D\gamma(\tau)(t - \tau) \quad \text{für } t \in \mathbb{R}$$

einen *uneigentlichen* Weg $g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ längs einer *Geraden,* welcher den Weg γ in τ tangential berührt.

Krümmung eines Weges. Sei $\sigma : Y \to \mathbb{C}$ ein differenzierbarer Weg, der nach seiner Länge parametrisiert sowie in $\tau \in Y$ zweimal differenzierbar ist.

Da der Betrag $|D\sigma(t)| = 1$ der Geschwindigkeit *nicht* vom Zeitpunkt $t \in Y$ abhängt, verschwindet die Ableitung der durch $h(t) = D\sigma(t) \cdot \overline{D\sigma(t)} = \mathbb{1}$ für $t \in Y$ definierten Funktion $h : Y \to \mathbb{C}$. Zum Zeitpunkt $\tau \in Y$ gilt somit

$$Dh(\tau) = D^2\sigma(\tau) \cdot \overline{D\sigma(\tau)} + D\sigma(\tau) \cdot \overline{D^2\sigma(\tau)} = \mathbb{0},$$

das heißt, es gibt eine reelle Zahl $\kappa(\tau) \in \mathbb{R}$ derart, so daß folgender Zusammenhang

$$D^2\sigma(\tau) = \kappa(\tau) \cdot \mathbb{i}\, D\sigma(\tau) \in \mathbb{C}$$

zwischen Beschleunigung und Geschwindigkeit besteht. Dieser Faktor $\kappa(\tau) \in \mathbb{R}$ wird als *Krümmung des Weges σ in $\tau \in Y$* bezeichnet.

Wege mit konstanter Krümmung. Sei $\tau_0 \in \mathbb{R}$ beliebig vorgegeben.

1. Wird ein *uneigentlicher* Weg $\sigma : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ durch den Punkt $\sigma(\tau_0) = \sigma_0 \in \mathbb{C}$ entlang einer *Geraden* mit der Geschwindigkeit $v \in \mathbb{C}$, $|v| = 1$ durch

$$\sigma(t) = \sigma_0 + v(t - \tau_0) \quad \text{für } t \in \mathbb{R} \text{ vorgegeben,}$$

so gilt $D\sigma(t) = v$ und $D^2\sigma(t) = \mathbb{0}$ sowie $\kappa(t) = 0$ für die Krümmung von σ in $t \in \mathbb{R}$.

2. Wird für beliebig vorgegebenes $\varkappa \neq 0$ ein Weg $\sigma : [\tau_0 - \pi\delta, \tau_0 + \pi\delta] \to \mathbb{C}$ längs einer *Kreislinie* um den Mittelpunkt $\zeta_0 \in \mathbb{C}$ mit dem Radius $\delta = \frac{1}{|\varkappa|} > 0$ durch

$$\sigma(t) = \zeta_0 + \delta \operatorname{Exp}(\mathbb{i}\varkappa(t - \tau_0)) \quad \text{für } t \in [\tau_0 - \pi\delta, \tau_0 + \pi\delta] \text{ definiert,}$$

dann gilt $D\sigma(t) = \mathbb{i}\varkappa(\sigma(t) - \zeta_0)$ sowie $D^2\sigma(t) = \mathbb{i}\varkappa D\sigma(t)$ und somit $\kappa(t) = \varkappa$ für die Krümmung von σ in $t \in [\tau_0 - \pi\delta, \tau_0 + \pi\delta]$.

Wege mit vorgegebener Krümmung. Seien ein Punkt $\tau_0 \in S$, ein Winkel $\theta_0 \in \mathbb{R}$ und ein Punkt $\sigma_0 \in \mathbb{C}$ vorgegeben. Bildet man für die stetige Funktion $\kappa : S \to \mathbb{R}$ eine Winkelfunktion $\theta : S \to \mathbb{R}$ und eine Geschwindigkeit $v : S \to \mathbb{C}$ durch

$$\theta(\tau) = \theta_0 + \int_{\tau_0}^{\tau} \kappa(t)\, dt \in \mathbb{R} \quad \text{und} \quad v(\tau) = \operatorname{Exp}(\mathbb{i}\theta(\tau)) \in \mathbb{C} \quad \text{für } \tau \in S,$$

so erhält man einen zweimal differenzierbaren *uneigentlichen* Weg $\sigma : S \to \mathbb{C}$, der durch $\sigma(\tau_0) = \sigma_0$ in Richtung $v(\tau_0) = \operatorname{Exp}(\mathbb{i}\theta_0)$ läuft, nach seiner Länge parametrisiert ist und in jedem $\tau \in S$ die vorgegebene Krümmung $\kappa(\tau)$ besitzt, wenn man

$$\sigma(\tau) = \sigma_0 + \int_{\tau_0}^{\tau} v(t)\, dt \in \mathbb{C} \quad \text{für } \tau \in S \text{ definiert.}$$

Tangentiale Berührung höherer Ordnung. Sei $\sigma : Y \to \mathbb{C}$ ein differenzierbarer Weg, der nach seiner Länge parametrisiert sowie in $\tau \in Y$ zweimal differenzierbar ist.

1. Verschwindet die Krümmung $\kappa(\tau) = 0$, so liefert die Linearisierung

$$g(t) = \sigma(\tau) + D\sigma(\tau)(t - \tau) \quad \text{für } t \in \mathbb{R}$$

den *uneigentlichen* Weg $g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ längs einer *Geraden,* der nach seiner Länge parametrisiert ist und den Weg σ in τ von mindestens *zweiter* Ordnung tangential berührt.

2. Gilt jedoch $\kappa(\tau) \neq 0$ und definiert man den Mittelpunkt $\zeta(\tau) \in \mathbb{C}$ und den Radius $\delta(\tau) > 0$ des *Krümmungskreises an den Weg σ in $\tau \in Y$* durch

$$\zeta(\tau) = \sigma(\tau) + \frac{\mathbb{i}D\sigma(\tau)}{\kappa(\tau)} \in \mathbb{C} \quad \text{sowie} \quad \delta(\tau) = |\sigma(\tau) - \zeta(\tau)| = \frac{1}{|\kappa(\tau)|} > 0,$$

so erhält man mittels

$$g(t) = \zeta(\tau) + (\sigma(\tau) - \zeta(\tau)) \operatorname{Exp}(\mathbb{i}\kappa(\tau)(t - \tau)) \quad \text{für } t \in [\tau - \pi\delta(\tau), \tau + \pi\delta(\tau)]$$

denjenigen *geschlossenen* Weg $g : [\tau - \pi\delta(\tau), \tau + \pi\delta(\tau)] \to \mathbb{C}$ entlang einer *Kreislinie,* der nach seiner Länge parametrisiert ist und den Weg σ in τ von mindestens *zweiter* Ordnung tangential berührt.