Vorlesung 2

Reelle Zahlen

Im folgenden werden schrittweise die grundlegenden, die Menge $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen (in gewissem Sinne) eindeutig charakterisierenden, Axiome zusammengetragen:

Körper. Eine Menge $\mathbb{K}$ mit zwei Abbildungen
Addition, die jedem Paar $(x, y) \in \mathbb{K} \times \mathbb{K}$ eine *Summe* $x + y \in \mathbb{K}$ zuordnet,
Multiplikation, die jedem Paar $(x, y) \in \mathbb{K} \times \mathbb{K}$ ein *Produkt* $x \cdot y \in \mathbb{K}$ zuordnet,
heißt *Körper*, wenn folgende Körperaxiome erfüllt sind:

1. Für alle $x, y, z \in \mathbb{K}$ gilt $x + (y + z) = (x + y) + z$.
2. Für alle $x, y \in \mathbb{K}$ gilt $x + y = y + x$.
3. Es gibt ein Element $\mathbb{0} \in \mathbb{K}$ derart, daß $\mathbb{0} + x = x$ für jedes $x \in \mathbb{K}$ gilt.
4. Zu jedem $x \in \mathbb{K}$ gibt es ein Element $-x \in \mathbb{K}$ derart, daß $x + (-x) = \mathbb{0}$ gilt.
5. Für alle $x, y, z \in \mathbb{K}$ gilt $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$.
6. Für alle $x, y \in \mathbb{K}$ gilt $x \cdot y = y \cdot x$.
7. Es gibt ein Element $\mathbb{1} \in \mathbb{K}$ mit $\mathbb{1} \neq \mathbb{0}$ derart, daß $\mathbb{1} \cdot x = x$ für jedes $x \in \mathbb{K}$ gilt.
8. Zu jedem $x \in \mathbb{K}$ mit $x \neq \mathbb{0}$ gibt es ein Element $x^{-1} \in \mathbb{K}$, so daß $x \cdot x^{-1} = \mathbb{1}$ gilt.
9. Es gilt $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$ für alle $x, y, z \in \mathbb{K}$.

Bezeichungen. In einem Körper $\mathbb{K}$ erklärt man außerdem
Differenzen $x - y = x + (-y) \in \mathbb{K}$ für alle $x, y \in \mathbb{K}$,
Vielfache $nx = \sum_{k=1}^{n} x = x + x + \cdots + x \in \mathbb{K}$ für alle $n \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{K}$,
Potenzen $x^n = \prod_{k=1}^{n} x = x \cdot x \cdots x \in \mathbb{K}$ sowie $x^0 = \mathbb{1}$ für alle $x \in \mathbb{K}$ und $n \in \mathbb{N}$,
Quotienten $\frac{a}{b} = a \cdot b^{-1} \in \mathbb{K}$ für alle $a, b \in \mathbb{K}$ mit $b \neq \mathbb{0}$.

Potenzgesetze und Bruchrechnung. In jedem Körper $\mathbb{K}$ gelten folgende Regeln:

1. Für alle $m, n \in \mathbb{N}$, $x, y \in \mathbb{K}$ gilt $x^{m+n} = x^m \cdot x^n$, $(x^m)^n = x^{mn}$, $(x \cdot y)^n = x^n \cdot y^n$.
2. Es gilt $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d + b \cdot c}{b \cdot d}$ sowie $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$ für alle $a, c \in \mathbb{K}$ und $b, d \in \mathbb{K} \setminus \{\mathbb{0}\}$.

Geometrische Summe. Es gilt $\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{\mathbb{1} - x^{n+1}}{\mathbb{1} - x}$ für alle $x \in \mathbb{K} \setminus \{\mathbb{1}\}$ und $n \in \mathbb{N}$.

Binomische Formel. Es gilt $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k \cdot y^{n-k} = (x + y)^n$ für alle $x, y \in \mathbb{K}$, $n \in \mathbb{N}$.

Lagrange-Identität. Für alle $n \in \mathbb{N}$, $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{K}$ und $y_1, \ldots, y_n \in \mathbb{K}$ gilt

$$\sum_{k=1}^{n} x_k^2 \cdot \sum_{\ell=1}^{n} y_\ell^2 - \left(\sum_{k=1}^{n} x_k \cdot y_k \right)^2 = \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{\ell=k+1}^{n} (x_k \cdot y_\ell - x_\ell \cdot y_k)^2.$$

Ganze und rationale Zahlen. Bezeichnet man die Menge der *ganzen* Zahlen mit dem Symbol $\mathbb{Z} = \{0, 1, -1, 2, -2, \ldots\}$, so definiert man den Körper der *rationalen* Zahlen $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} \mid a \in \mathbb{Z} \text{ und } b \in \mathbb{N} \right\}$ als Menge von Brüchen mit der aus der Bruchrechnung bekannten Addition und Multiplikation.

Geordneter Körper. Ein Körper $\mathbb{K}$ heißt *geordnet*, wenn es eine Menge $M \subset \mathbb{K} \times \mathbb{K}$ gibt, so daß die folgenden Ordnungsaxiome erfüllt sind:

1. Für alle $x, y \in \mathbb{K}$ gilt $(x, y) \in M$ oder $(y, x) \in M$.
2. Für alle $x, y \in \mathbb{K}$ mit $(x, y) \in M$ und $(y, x) \in M$ gilt $x = y$.
3. Für alle $x, y, z \in \mathbb{K}$ mit $(x, y) \in M$ und $(y, z) \in M$ gilt $(x, z) \in M$.
4. Für alle $x, y, z \in \mathbb{K}$ mit $(x, y) \in M$ gilt $(x + z, y + z) \in M$.
5. Für alle $x, y \in \mathbb{K}$ mit $(\mathbb{0}, x) \in M$ und $(\mathbb{0}, y) \in M$ gilt $(\mathbb{0}, x \cdot y) \in M$.

Im Falle $(x, y) \in M$ schreibt man $x \leq y$ und ferner $x < y$, falls außerdem $x \neq y$ gilt.

Additive Ordnungseigenschaften. Ist $\mathbb{K}$ ein geordneter Körper, so gilt

1. Für alle $x, y, z \in \mathbb{K}$ ist die Beziehung $x \leq y$ äquivalent zu $x + z \leq y + z$.
2. Für alle $x, y, z, w \in \mathbb{K}$ folgt aus $x \leq y$ und $z \leq w$ stets $x + z \leq y + w$.

Absoluter Betrag. In einem geordneten Körper $\mathbb{K}$ wird der *absolute Betrag* $|x| \in \mathbb{K}$ von $x \in \mathbb{K}$ durch $|x| = x$ für $x \geq \mathbb{0}$ sowie $|x| = -x$ für $x < \mathbb{0}$ definiert. Dabei gelten für alle $x, y, a \in \mathbb{K}$ mit $a > \mathbb{0}$ die folgenden Beziehungen:

1. Es gilt $|x| = |-x| \geq \mathbb{0}$ sowie $|x| > \mathbb{0}$ im Falle $x \neq \mathbb{0}$.
2. Es ist $|x| \leq a$ (bzw. $|x| < a$) äquivalent zu $-a \leq x \leq a$ (bzw. $-a < x < a$).
3. Es gelten die Beziehungen $|x + y| \leq |x| + |y|$ sowie $\big||x| - |y|\big| \leq |x - y|$.

Multiplikative Ordnungseigenschaften. In einem geordneten Körper $\mathbb{K}$ gelten für alle $x, y, z \in \mathbb{K}$ die Regeln

1. Aus $x \leq \mathbb{0}$ und $y \geq \mathbb{0}$ folgt $x \cdot y \leq \mathbb{0}$, aus $x < \mathbb{0}$ und $y > \mathbb{0}$ folgt $x \cdot y < \mathbb{0}$.
2. Aus $x \leq \mathbb{0}$ und $y \leq \mathbb{0}$ folgt $x \cdot y \geq \mathbb{0}$, aus $x < \mathbb{0}$ und $y < \mathbb{0}$ folgt $x \cdot y > \mathbb{0}$.
3. Es gilt $x^2 \geq \mathbb{0}$ sowie $x^2 > \mathbb{0}$ im Falle $x \neq \mathbb{0}$, also insbesondere auch $\mathbb{1} > \mathbb{0}$.
4. Für $x > \mathbb{0}$ gilt $x^{-1} > \mathbb{0}$.
5. Im Falle $z > \mathbb{0}$ ist $x \leq y$ äquivalent zu $x \cdot z \leq y \cdot z$.
6. Im Falle $z < \mathbb{0}$ ist $x \leq y$ äquivalent zu $x \cdot z \geq y \cdot z$.
7. Die Beziehung $\mathbb{0} < x < y$ ist zu $\mathbb{0} < y^{-1} < x^{-1}$ äquivalent.

Umordnung. Seien $n \in \mathbb{N}$ und Elemente $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{K}$ sowie $y_1, \ldots, y_n \in \mathbb{K}$ eines geordneten Körper $\mathbb{K}$ vorgegeben. Dann gelten für all jene bijektiven Abbildungen $f, g : \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, n\}$, welche die Ordnung $x_{f(k)} \leq x_{f(\ell)}$ und $y_{g(k)} \leq y_{g(\ell)}$ für alle $k, \ell \in \{1, \ldots, n\}$ mit $k \leq \ell$ herstellen, stets die Ungleichungen

$$\sum_{k=1}^{n} x_{f(k)} \cdot y_{g(n-k+1)} \leq \sum_{k=1}^{n} x_k \cdot y_k \leq \sum_{k=1}^{n} x_{f(k)} \cdot y_{g(k)}.$$

Cauchy-Schwarz-Ungleichung. In einem geordneten Körper $\mathbb{K}$ gilt die Relation

$$\left(\sum_{k=1}^{n} x_k \cdot y_k\right)^2 \leq \sum_{k=1}^{n} x_k^2 \cdot \sum_{\ell=1}^{n} y_\ell^2 \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N},\ x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{K},\ y_1, \ldots, y_n \in \mathbb{K}.$$

Obere und untere Schranken, Maximum und Minimum. Sei $\mathbb{K}$ ein geordneter Körper, $X \subset \mathbb{K}$ sowie $x_0 \in \mathbb{K}$ derart, daß $x_0 \geq x$ (bzw. $x_0 \leq x$) für alle $x \in X$ gilt.

1. Dann wird $x_0 \in \mathbb{K}$ eine *obere Schranke* (bzw. *untere Schranke*) von X genannt.
2. Gilt sogar $x_0 \in X$, so heißt x_0 *Maximum* (bzw. *Minimum*) von X, und man schreibt $\max X = x_0$ (bzw. $\min X = x_0$).

Intervalle. In einem geordneten Körper $\mathbb{K}$ bildet man für $a, b \in \mathbb{K}$ die Mengen
Abgeschlossenes Intervall $[a, b] = \{x \in \mathbb{K} \mid a \leq x \leq b\}$ für $a \leq b$,
Offenes Intervall $]a, b[= \{x \in \mathbb{K} \mid a < x < b\}$ für $a < b$,
Rechtsseitig offenes Intervall $[a, b[= \{x \in \mathbb{K} \mid a \leq x < b\}$ für $a < b$,
Linksseitig offenes Intervall $]a, b] = \{x \in \mathbb{K} \mid a < x \leq b\}$ für $a < b$,
Unbeschränkte Intervalle $[a, \infty[= \{x \in \mathbb{K} \mid a \leq x\}$, $]a, \infty[= \{x \in \mathbb{K} \mid a > x\}$, $]-\infty, b] = \{x \in \mathbb{K} \mid x \leq b\}$, $]-\infty, b[= \{x \in \mathbb{K} \mid x < b\}$.

Archimedisch geordneter Körper. Ein geordneter Körper $\mathbb{K}$ heißt *archimedisch geordnet*, wenn es für alle $x, y \in \mathbb{K}$ mit $x > \mathbb{0}$ und $y \geq \mathbb{0}$ ein $n \in \mathbb{N}$ mit $y \leq nx$ gibt.

Intervallschachtelung. Ein archimedisch geordneter Körper $\mathbb{K}$ wird *vollständig* genannt, wenn das Axiom der Intervallschachtelung erfüllt ist: Jede absteigende Folge $[a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset \cdots [a_k, b_k] \supset \cdots$ ineinandergeschachtelter abgeschlossener Intervalle $[a_k, b_k] \subset \mathbb{K}$ hat einen nichtleeren Durchschnitt $\cap_{k \in \mathbb{N}} [a_k, b_k] \neq \emptyset$.

Eindeutigkeit der reellen Zahlen $\mathbb{R}$. Seien $\mathbb{K}$ und $\mathbb{L}$ vollständige, archimedisch geordnete Körper. Dann gibt es eine bijektive Abbildung $f : \mathbb{K} \to \mathbb{L}$, so daß

1. Es gilt $f(x + y) = f(x) \oplus f(y)$ sowie $f(x \cdot y) = f(x) \odot f(y)$ für alle $x, y \in \mathbb{K}$.
2. Für alle $x, y \in \mathbb{K}$ ist $x \leq y$ äquivalent zu $f(x) \leqq f(y)$.

Die in diesem Sinne äquivalenten Körper werden miteinander identifiziert und modellhaft als Körper $\mathbb{R}$ der *reellen Zahlen* bezeichnet.

Dichtheit von $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$. 1. Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ mit $x < y$ gibt es ein $z \in \mathbb{Q}$ mit $x < z < y$. Der Körper $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen ist die Vervollständigung des *nicht* vollständigen, archimedisch geordneten Körpers $\mathbb{Q}$ der rationalen Zahlen.

2. Während eine bijektive Abbildung $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ von $\mathbb{N}$ auf $\mathbb{Q}$ existiert, das heißt, der Körper $\mathbb{Q}$ eine *abzählbare* Menge ist, ist der Körper $\mathbb{R}$ *keine* abzählbare Menge.

Supremum und Infimum. Sei $\mathbb{K}$ ein vollständiger, archimedisch geordneter Körper und $X \subset \mathbb{K}$ eine nach oben (bzw. nach unten) beschränkte Menge.

1. Dann existiert in der Menge der oberen (bzw. unteren) Schranken von X ein Minimum (bzw. Maximum). Diese kleinste obere (bzw. größte untere) Schranke heißt *Supremum* (bzw. *Infimum*) von X und wird mit $\sup X$ (bzw. $\inf X$) bezeichnet.
2. Die Menge X besitzt genau dann ein Maximum (bzw. ein Minimum), wenn $\sup X$ (bzw. $\inf X$) in X liegt. Dann gilt $\max X = \sup X$ (bzw. $\min X = \inf X$).