Vorlesung 20

Integration längs eines Weges

Seien Grenzen $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ abgeschlossener beschränkter Intervalle $X = [a, b]$ und $Y = [c, d]$ mit $a < b$ und $c < d$ sowie ein beliebiges Intervall $S \subset \mathbb{R}$ gegeben.

Integral längs eines Weges. Sei $\gamma : X \to \mathbb{C}$ ein Weg und $g : \gamma[X] \to \mathbb{C}$ stetig.

1. Man definiert das *Integral über g längs des Weges γ* durch

$$\int_\gamma g(z)\,dz = \int_a^b g(\gamma(t))D\gamma(t)\,dt \in \mathbb{C}.$$

2. Für das Integral über g längs des zu γ *entgegengesetzten* Weges $\gamma_\ominus$ gilt

$$\begin{aligned}\int_{\gamma_\ominus} g(z)\,dz &= \int_a^b g(\gamma_\ominus(t))D\gamma_\ominus(t)\,dt = -\int_a^b g(\gamma(a+b-t))D\gamma(a+b-t)\,dt \\ &= \int_b^a g(\gamma(\tau))D\gamma(\tau)\,d\tau = -\int_a^b g(\gamma(\tau))D\gamma(\tau)\,d\tau = -\int_\gamma g(z)\,dz.\end{aligned}$$

3. Wird $\tau \in\,]a, b[$ vorgegeben und der Weg γ in die Wege $\gamma_1 : [a, \tau] \to \mathbb{C}$ und $\gamma_2 : [\tau, b] \to \mathbb{C}$ mit $\gamma_1(t) = \gamma(t)$ für $t \in [a, \tau]$ sowie $\gamma_2(t) = \gamma(t)$ für $t \in [\tau, b]$ zerlegt, dann gilt für den *zusammengesetzten* Weg $\gamma = \gamma_1 \oplus \gamma_2$ stets

$$\int_\gamma g(z)\,dz = \int_{\gamma_1} g(z)\,dz + \int_{\gamma_2} g(z)\,dz.$$

Integral längs eines uneigentlichen Weges. Das Integral über die stetige Funktion $g : \gamma[S] \to \mathbb{C}$ längs eines *uneigentlichen* Weges $\gamma : S \to \mathbb{C}$ wird im Falle seiner Konvergenz dementsprechend als *uneigentliches* Integral definiert.

Integral über Linearkombinationen längs eines Weges. Ist $\gamma : X \to \mathbb{C}$ ein Weg, dann gilt für alle stetigen Funktionen $g, h : \gamma[X] \to \mathbb{C}$ und alle $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ stets

$$\int_\gamma \big(\lambda g(z) + \mu h(z)\big)\,dz = \lambda \int_\gamma g(z)\,dz + \mu \int_\gamma h(z)\,dz.$$

Unabhängigkeit des Integrals längs eines Weges. Sind $\gamma : X \to \mathbb{C}$, $\sigma : Y \to \mathbb{C}$ zwei Wege sowie $\varphi : X \to Y$ eine monoton wachsende Funktion mit $\varphi[X] = Y$ und $\gamma = \sigma \circ \varphi$, welche Stammfunktion einer regulierten Funktion ist, so stimmen die Integrale über die stetige Funktion $g : \gamma[X] \to \mathbb{C}$ längs der Wege γ und σ überein:

$$\begin{aligned}\int_\gamma g(z)\,dz &= \int_a^b g(\gamma(t))D\gamma(t)\,dt = \int_a^b g(\sigma(\varphi(t)))D\sigma(\varphi(t))D\varphi(t)\,dt \\ &= \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} g(\sigma(\tau))D\sigma(\tau)\,d\tau = \int_c^d g(\sigma(\tau))D\sigma(\tau)\,d\tau = \int_\sigma g(z)\,dz.\end{aligned}$$

Integral längs eines geschlossenen Weges. Sei $\gamma : X \to \mathbb{C}$ ein *geschlossener* Weg. Wird $\tau \in \,]a,b[$ beliebig gewählt und der Weg γ in die Wege $\gamma_1 : [a,\tau] \to \mathbb{C}$ und $\gamma_2 : [\tau,b] \to \mathbb{C}$ mit $\gamma_1(t) = \gamma(t)$ für $t \in [a,\tau]$ sowie $\gamma_2(t) = \gamma(t)$ für $t \in [\tau,b]$ zerlegt, dann gilt $\gamma = \gamma_1 \oplus \gamma_2$. Definiert man $Z = [\tau, \tau + b - a] = [\tau,b] \cup [b, b + \tau - a]$, so ist auch der *zusammengesetzte* Weg $\sigma = \gamma_2 \oplus \gamma_1 : Z \to \mathbb{C}$ ein *geschlossener* Weg mit dem Bild $\sigma[Z] = \gamma[X]$, und es gilt für alle stetigen Funktionen $g : \gamma[X] \to \mathbb{C}$ stets

$$\int_\sigma g(z)\,dz = \int_{\gamma_2} g(z)\,dz + \int_{\gamma_1} g(z)\,dz = \int_{\gamma_1} g(z)\,dz + \int_{\gamma_2} g(z)\,dz = \int_\gamma g(z)\,dz.$$

Das Integral längs des geschlossenen Weges γ hängt also *nicht* vom Anfang von γ ab.

Mittelwertsatz. Ist $\gamma : X \to \mathbb{C}$ ein Weg und $g : \gamma[X] \to \mathbb{C}$ stetig, dann gilt

$$\left|\int_\gamma g(z)\,dz\right| \le \int_a^b |g(\gamma(t))||D\gamma(t)|\,dt \le \sup_{z\in\gamma[X]} |g(z)| \cdot \int_a^b |D\gamma(t)|\,dt.$$

Vertauschbarkeit von Grenzprozessen. Sei ein Weg $\gamma : X \to \mathbb{C}$ vorgegeben.

1. Konvergiert die Folge (g_n) stetiger Funktionen $g_n : \gamma[X] \to \mathbb{C}$ gleichmäßig gegen die Grenzfunktion $g : \gamma[X] \to \mathbb{C}$, so konvergiert die Folge $\left(\int_\gamma g_n(z)\,dz\right)$ der Integrale über g_n gegen das Integral $\int_\gamma g(z)\,dz$ über g längs des Weges γ.

2. Konvergiert die Reihe $\left(\sum_{k=0}^n g_k\right)$ mit stetigen Summanden $g_k : \gamma[X] \to \mathbb{C}$ gleichmäßig gegen die Grenzfunktion $g : \gamma[X] \to \mathbb{C}$, so konvergiert die summandenweise längs des Weges γ integrierte Reihe $\left(\sum_{k=0}^n \int_\gamma g_k(z)\,dz\right)$ gegen das Integral $\int_\gamma g(z)\,dz$ über g längs des Weges γ, und es gilt

$$\sum_{k=0}^\infty \int_\gamma g_k(z)\,dz = \int_\gamma \sum_{k=0}^\infty g_k(z)\,dz = \int_\gamma g(z)\,dz.$$

Integral als Grenzwert von Riemann-Summen. Sei $\gamma : X \to \mathbb{C}$ ein Weg und $g : \gamma[X] \to \mathbb{C}$ eine stetige Funktion. Zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert ein $\delta > 0$, so daß für jede endliche Folge

$$a = t_0 \le \tau_1 \le t_1 \le \cdots \le t_{k-1} \le \tau_k \le t_k \le \cdots \le t_{m-1} \le \tau_m \le t_m = b$$

von Punkten aus $X = [a,b]$, welche $t_k - t_{k-1} \le \delta$ für alle $k \in \{1,\ldots,m\}$ erfüllen, die Differenz des *Integrals längs des Weges* γ und der *Riemann-Summe längs des Streckenzuges* $\sigma : X \to \mathbb{C}$ entlang der Punkte

$$\gamma(a) = \gamma(t_0), \ldots, \gamma(t_k), \ldots, \gamma(t_m) = \gamma(b)$$

aus dem Bild $\gamma[X]$ des Weges γ folgender Abschätzung genügt:

$$\left|\int_\gamma g(z)\,dz - \sum_{k=1}^m g(\gamma(\tau_k))\big(\gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1})\big)\right| \le \varepsilon.$$