Vorlesung 21

Stammfunktionen komplexer Funktionen

Seien Grenzen $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ eines abgeschlossenen beschränkten Intervalls $X = [a, b] \subset \mathbb{R}$ und eine offene Menge $U \subset \mathbb{C}$ gegeben.

Zusammenhängende Mengen. 1. Man bezeichnet eine offene Menge $U \subset \mathbb{C}$ als *zusammenhängend*, wenn für alle $u, v \in U$ eine Kurve $\varphi : X \to \mathbb{C}$ in U mit dem Anfang $\varphi(a) = u$ und dem Ende $\varphi(b) = v$ existiert.

2. Zu je zwei Punkten $u, v \in U$ einer zusammenhängenden offenen Menge $U \subset \mathbb{C}$ existiert stets ein Streckenzug $\gamma : X \to \mathbb{C}$ in U mit dem Anfang u und dem Ende v.

3. Jede offene Menge $U \subset \mathbb{C}$ läßt sich als disjunkte Vereinigung höchstens abzählbar vieler zusammenhängender offener Mengen darstellen.

Stammfunktionen auf offenen Mengen. Sei $g : U \to \mathbb{C}$ eine stetige Funktion.

1. Man nennt die stetige Funktion $f : U \to \mathbb{C}$ eine *Stammfunktion von g*, wenn f differenzierbar und $g = Df$ die Ableitung von f ist.

2. Die stetige Funktion $f : U \to \mathbb{C}$ ist genau dann eine Stammfunktion von g, wenn für jeden Weg $\gamma : X \to \mathbb{C}$ in U mit dem Anfang $\gamma(a) = u \in U$ und dem Ende $\gamma(b) = v \in U$ die Beziehung $\int_\gamma g(z)\,dz = f(v) - f(u)$ gilt.

Stammfunktionen von Potenzfunktionen. Seien Mittelpunkt $z_0 \in \mathbb{C}$ und Radius $r > 0$ einer durch $\gamma(t) = z_0 + r\operatorname{Exp}(\mathbb{i}t)$ für $t \in [0, 2\pi]$ definierten *geschlossenen* Kreislinie $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ gegeben. Man definiert für jedes $k \in \mathbb{Z}$ die Potenzfunktion $g_k : \mathbb{C} \setminus \{z_0\} \to \mathbb{C}$ durch $g_k(z) = (z - z_0)^k$ für $z \in \mathbb{C} \setminus \{z_0\}$.

1. Im Falle $k \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\}$ liefert $f_k(z) = \frac{1}{k+1}(z - z_0)^{k+1}$ für $z \in \mathbb{C} \setminus \{z_0\}$ eine Stammfunktion $f_k : \mathbb{C} \setminus \{z_0\} \to \mathbb{C}$ von g_k und somit $\int_\gamma (z - z_0)^k\,dz = \mathbb{0}$.

2. Für $k = -1$ ergibt sich jedoch

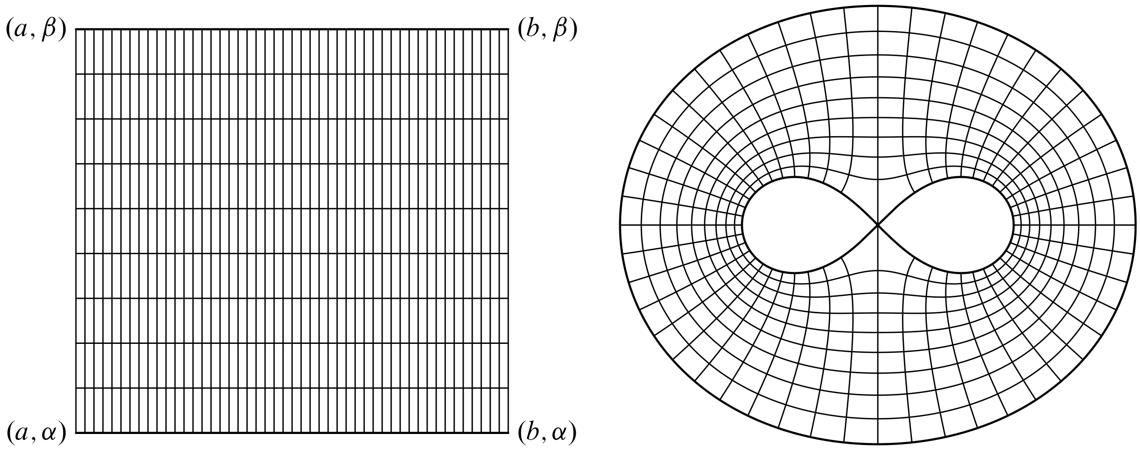
$$\int_\gamma \frac{dz}{z - z_0} = \int_0^{2\pi} \frac{D\gamma(t)\,dt}{\gamma(t) - z_0} = \int_0^{2\pi} \frac{r\,\mathbb{i}\operatorname{Exp}(\mathbb{i}t)\,dt}{r\operatorname{Exp}(\mathbb{i}t)} = 2\pi\,\mathbb{i},$$

das heißt, die analytische Funktion $g_{-1} : \mathbb{C} \setminus \{z_0\} \to \mathbb{C}$ besitzt in der offenen Menge $\{z \in \mathbb{C} \mid 0 < |z - z_0| < \rho\}$ für *keinen* Radius $\rho > 0$ eine Stammfunktion.

Deformation von Kurven. Seien zwei Kurven $\gamma, \sigma : X \to \mathbb{C}$ in U vorgegeben.

1. Unter einer *Deformation von γ in σ innerhalb von U* versteht man eine stetige Abbildung $\varphi : X \times [\alpha, \beta] \to U$ mit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ und $\alpha < \beta$, so daß sowohl $\varphi(t, \alpha) = \gamma(t)$ als auch $\varphi(t, \beta) = \sigma(t)$ für jedes $t \in X$ gilt.

2. Gilt außerdem $\varphi(a, \xi) = \varphi(b, \xi)$ (bzw. $\varphi(a, \xi) = \varphi(a, \alpha)$ und $\varphi(b, \xi) = \varphi(b, \alpha)$) für jedes $\xi \in [\alpha, \beta]$, dann spricht man von einer *geschlossenen* (bzw. *gebundenen*) *Deformation von γ in σ innerhalb von U*.



Integralsatz von Cauchy. Sei $g : U \to \mathbb{C}$ eine analytische Funktion.

1. Sind $\gamma, \sigma : X \to \mathbb{C}$ zwei geschlossene Wege in U, so daß eine geschlossene Deformation von γ in σ innerhalb von U existiert, dann gilt $\int_\gamma g(z)\,dz = \int_\sigma g(z)\,dz$.
2. Haben die beiden Wege $\gamma, \sigma : X \to \mathbb{C}$ in U sowohl einen gemeinsamen Anfang $\gamma(a) = \sigma(a) \in U$ als auch ein gemeinsames Ende $\gamma(b) = \sigma(b) \in U$ und existiert eine gebundene Deformation von γ in σ innerhalb von U, so gilt $\int_\gamma g(z)\,dz = \int_\sigma g(z)\,dz$.

Einfach zusammenhängende Mengen. 1. Eine zusammenhängende offene Menge $U \subset \mathbb{C}$ wird *einfach zusammenhängend* genannt, wenn es für jede stetige Funktion $\varphi : \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\} \to U$ eine stetige Fortsetzung $\psi : \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq 1\} \to U$ gibt.

2. Eine zusammenhängende offene Menge $U \subset \mathbb{C}$ ist genau dann einfach zusammenhängend, wenn für jede geschlossene Kurve $\gamma : X \to \mathbb{C}$ in U eine geschlossene Deformation von γ in eine geschlossene Kurve $\sigma : X \to \mathbb{C}$ innerhalb von U existiert, die sich auf einen Punkt in U reduziert.

Stammfunktionen auf einfach zusammenhängenden Mengen. Ist $U \subset \mathbb{C}$ eine einfach zusammenhängende offene Menge, dann besitzt jede analytische Funktion $g : U \to \mathbb{C}$ eine analytische Stammfunktion $f : U \to \mathbb{C}$.

Windungszahl eines geschlossenen Weges in bezug auf einen Punkt. Für jeden Punkt $z_0 \in \mathbb{C}$ und jeden in $\mathbb{C} \setminus \{z_0\}$ enthaltenen geschlossenen Weg $\gamma : X \to \mathbb{C}$ hat

$$\operatorname{ind}(\gamma, z_0) = \frac{\mathbb{1}}{2\pi \mathbb{i}} \int_\gamma \frac{dz}{z - z_0}$$

einen ganzzahligen Wert, der als *Windungszahl* $\operatorname{ind}(\gamma, z_0) \in \mathbb{Z}$ *von* γ *in bezug auf* z_0 bezeichnet wird. Diese Zahl gibt an, wie oft der Punkt z_0 im mathematisch positiven Sinne vom Weg γ umschlungen wird.

Konstanz der Windungszahl auf zusammenhängenden Mengen. Sei $\gamma : X \to \mathbb{C}$ ein geschlossener Weg.

1. Ist U eine zusammenhängende offene Teilmenge des Komplements $\mathbb{C} \setminus \gamma[X]$ des Kurvenbilds $\gamma[X]$, so gilt $\operatorname{ind}(\gamma, u) = \operatorname{ind}(\gamma, v)$ für alle $u, v \in U$.

2. Liegt der Weg γ innerhalb einer einfach zusammenhängenden offenen Menge $U \subset \mathbb{C}$, dann gilt $\operatorname{ind}(\gamma, z) = 0$ für jeden Punkt $z \in \mathbb{C} \setminus U$.

Windungszahl einer Kreislinie in bezug auf einen Punkt. Seien Anzahl $n \in \mathbb{Z}$, Mittelpunkt $z_0 \in \mathbb{C}$ und Radius $r > 0$ einer durch $\gamma(t) = z_0 + r \operatorname{Exp}(\mathbb{i} n t)$ für $t \in [0, 2\pi]$ definierten, n-mal durchlaufenen Kreislinie $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ gegeben.

1. Im Falle $z \in \mathbb{C}$, $|z - z_0| < r$ ergibt sich wegen der gleichmäßigen Konvergenz der geometrischen Reihe gegen die Summe

$$\frac{\mathbb{1}}{\zeta - z} = \frac{\mathbb{1}}{\zeta - z_0} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{z - z_0}{\zeta - z_0} \right)^k \quad \text{für alle } \zeta \in \mathbb{C} \text{ mit } |z - z_0| < |\zeta - z_0|$$

durch Integration längs der Kreislinie γ die Beziehung

$$\begin{aligned} \int_\gamma \frac{d\zeta}{\zeta - z} &= \int_\gamma \frac{\mathbb{1}}{\zeta - z_0} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{z - z_0}{\zeta - z_0} \right)^k d\zeta = \sum_{k=0}^{\infty} (z - z_0)^k \int_\gamma \frac{d\zeta}{(\zeta - z_0)^{k+1}} \\ &= \int_\gamma \frac{d\zeta}{\zeta - z_0} = \int_0^{2\pi} \frac{r \mathbb{i} n \operatorname{Exp}(\mathbb{i} n t)\, dt}{r \operatorname{Exp}(\mathbb{i} n t)} = 2\pi n \mathbb{i} \end{aligned}$$

und damit die Windungszahl $\operatorname{ind}(\gamma, z) = n \in \mathbb{Z}$.

2. Im Falle $z \in \mathbb{C}$, $|z - z_0| > r$ erhält man wegen der gleichmäßigen Konvergenz der geometrischen Reihe gegen die Summe

$$\frac{\mathbb{1}}{\zeta - z} = -\frac{\mathbb{1}}{z - z_0} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\zeta - z_0}{z - z_0} \right)^k \quad \text{für alle } \zeta \in \mathbb{C} \text{ mit } |\zeta - z_0| < |z - z_0|$$

durch Integration längs der Kreislinie γ die Beziehung

$$\int_\gamma \frac{d\zeta}{\zeta - z} = -\int_\gamma \frac{\mathbb{1}}{z - z_0} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\zeta - z_0}{z - z_0} \right)^k d\zeta = -\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mathbb{1}}{(z - z_0)^{k+1}} \int_\gamma (\zeta - z_0)^k d\zeta = \mathbb{0}$$

und somit die Windungszahl $\operatorname{ind}(\gamma, z) = 0 \in \mathbb{Z}$.