Vorlesung 22

Integraldarstellungen komplexer Funktionen

Seien Grenzen $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ eines abgeschlossenen beschränkten Intervalls $X = [a, b] \subset \mathbb{R}$ gegeben.

Cauchy-Integral längs eines Weges. Seien ein Weg $\gamma : X \to \mathbb{C}$ und eine stetige Funktion $g : \gamma[X] \to \mathbb{C}$ gegeben. Diejenige Funktion $f : \mathbb{C} \setminus \gamma[X] \to \mathbb{C}$, welche jedem Punkt $z \in \mathbb{C} \setminus \gamma[X]$ den Wert

$$f(z) = \frac{\mathbb{1}}{2\pi\mathbb{i}} \int_\gamma \frac{g(\zeta)\,d\zeta}{\zeta - z} \in \mathbb{C}$$

zuordnet, besitzt die folgenden Eigenschaften:

1. Die Funktion $f : \mathbb{C} \setminus \gamma[X] \to \mathbb{C}$ ist analytisch.

2. Für jedes $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \gamma[X]$ und $r > 0$ mit $\{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| < r\} \subset \mathbb{C} \setminus \gamma[X]$ konvergiert die Potenzreihe (f_n) um den Mittelpunkt z_0 mit den durch

$$a_k = \frac{\mathbb{1}}{2\pi\mathbb{i}} \int_\gamma \frac{g(\zeta)\,d\zeta}{(\zeta - z_0)^{k+1}} \in \mathbb{C} \quad \text{für } k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$$

gegebenen Koeffizienten (a_k) in $\{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| < r\}$ gegen die Grenzfunktion f.

3. Die Funktion $f : \mathbb{C} \setminus \gamma[X] \to \mathbb{C}$ besitzt die Ableitungen

$$D^k f(z) = \frac{k!}{2\pi\mathbb{i}} \int_\gamma \frac{g(\zeta)\,d\zeta}{(\zeta - z)^{k+1}} \in \mathbb{C} \quad \text{für alle } z \in \mathbb{C} \setminus \gamma[X] \text{ und } k \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

Integralformel von Cauchy. Seien $U \subset \mathbb{C}$ einfach zusammenhängend und offen, $f : U \to \mathbb{C}$ eine analytische Funktion und $\gamma : X \to \mathbb{C}$ ein geschlossener Weg in U.

Die für einen beliebig gegebenen Punkt $z \in U \setminus \gamma[X]$ durch

$$g(\zeta) = \begin{cases} \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z} & \text{für } \zeta \in U \text{ mit } \zeta \neq z, \\ Df(z) & \text{für } \zeta \in U \text{ mit } \zeta = z, \end{cases}$$

definierte Funktion $g : U \to \mathbb{C}$ ist analytisch. Der Integralsatz von Cauchy liefert $\int_\gamma g(\zeta)\,d\zeta = \mathbb{0}$, da $U \subset \mathbb{C}$ eine einfach zusammenhängende offene Menge ist. Da

$$g(\zeta) = \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} - \frac{f(z)}{\zeta - z} \quad \text{für alle } \zeta \in \gamma[X]$$

gilt, ergibt sich daraus die *Integralformel von Cauchy*

$$\operatorname{ind}(\gamma, z) \cdot f(z) = \frac{\mathbb{1}}{2\pi\mathbb{i}} \int_\gamma \frac{f(z)\,d\zeta}{\zeta - z} = \frac{\mathbb{1}}{2\pi\mathbb{i}} \int_\gamma \frac{f(\zeta)\,d\zeta}{\zeta - z} \quad \text{für alle } z \in U \setminus \gamma[X]$$

und somit folglich auch

$$\operatorname{ind}(\gamma, z) \cdot D^k f(z) = \frac{k!}{2\pi\mathbb{i}} \int_\gamma \frac{f(\zeta)\,d\zeta}{(\zeta - z)^{k+1}} \quad \text{für alle } z \in U \setminus \gamma[X] \text{ und } k \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

Cauchy-Taylor-Entwicklung in Potenzreihen. Sei $U \subset \mathbb{C}$ eine offene Menge und $f : U \to \mathbb{C}$ eine analytische Funktion, ferner $z_0 \in U$ und $0 < R \leq \infty$ der größte Radius, so daß der Kreis $\{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| < R\}$ in U liegt. Wird $r \in]0, R[$ beliebig vorgegeben und definiert man die (geschlossene) Kreislinie $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ in U durch $\gamma(t) = z_0 + r \operatorname{Exp}(\mathbb{i}t)$ für $t \in [0, 2\pi]$, dann gilt:

1. Die Potenzreihe (f_n) um den Mittelpunkt z_0 mit den für $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ durch

$$a_k = \frac{D^k f(z_0)}{k!} = \frac{\mathbb{1}}{2\pi \mathbb{i}} \int_\gamma \frac{f(\zeta)\, d\zeta}{(\zeta - z_0)^{k+1}} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(z_0 + r \operatorname{Exp}(\mathbb{i}t))\, dt}{r^k \operatorname{Exp}(\mathbb{i}kt)}$$

gegebenen Koeffizienten (a_k) konvergiert in $\{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| < R\}$ und somit gleichmäßig in $\{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| \leq r\}$ gegen die Grenzfunktion f.

2. Die somit in bezug auf $t \in [0, 2\pi]$ gleichmäßige Konvergenzbeziehung

$$\sum_{k=0}^{\infty} f(z_0 + r \operatorname{Exp}(\mathbb{i}t)) \cdot \overline{a}_k r^k \operatorname{Exp}(-\mathbb{i}kt) = f(z_0 + r \operatorname{Exp}(\mathbb{i}t)) \cdot \overline{f(z_0 + r \operatorname{Exp}(\mathbb{i}t))}$$

liefert nach Integration und Vertauschung der Grenzprozesse die *Parseval-Relation*

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|^2 r^{2k} &= \sum_{k=0}^{\infty} \overline{a}_k r^{2k} \cdot \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(z_0 + r \operatorname{Exp}(\mathbb{i}t))\, dt}{r^k \operatorname{Exp}(\mathbb{i}kt)} \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left|f(z_0 + r \operatorname{Exp}(\mathbb{i}t))\right|^2 dt \leq \max_{|z-z_0|=r} |f(z)|^2,\end{aligned}$$

3. Insbesondere folgen daraus für die Koeffizienten (a_k) die *Cauchy-Abschätzungen*

$$|a_k| r^k \leq \max_{|z-z_0|=r} |f(z)| \quad \text{für alle } k \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

Äquivalente Charakterisierung analytischer Funktionen. Ist $U \subset \mathbb{C}$ offen und $g : U \to \mathbb{C}$ stetig, dann sind folgende Aussagen äquivalent:

1. Die Funktion $g : U \to \mathbb{C}$ ist analytisch.
2. Die Funktion $g : U \to \mathbb{C}$ besitzt eine stetige Ableitung $Dg : U \to \mathbb{C}$.
3. Zu jedem $z_0 \in U$ existiert ein offener Kreis $B \subset U$ mit dem Mittelpunkt $z_0 \in B$, so daß g auf B eine Stammfunktion $f : B \to \mathbb{C}$ besitzt.
4. Für jedes $z_0 \in U$ existiert ein offener Kreis $B \subset U$ mit dem Mittelpunkt $z_0 \in B$ derart, daß $\int_\gamma g(z)\, dz = \mathbb{0}$ für jeden geschlossenen Weg $\gamma : X \to \mathbb{C}$ in B gilt.

Vertauschbarkeit von Grenzprozessen. Sei eine offene Menge $U \subset \mathbb{C}$ und eine Folge (f_n) analytischer Funktionen $f_n : U \to \mathbb{C}$ gegeben, die punktweise gegen eine Grenzfunktion $f : U \to \mathbb{C}$ konvergiert.

Konvergiert die Folge (f_n) in jedem abgeschlossenen Kreis $F \subset U$ gleichmäßig gegen die Grenzfunktion $f : U \to \mathbb{C}$, so ist f analytisch. Für jedes $k \in \mathbb{N}$ konvergiert die Folge $(D^k f_n)$ der Ableitungen $D^k f_n : U \to \mathbb{C}$ in jedem abgeschlossenen Kreis $F \subset U$ gleichmäßig gegen $D^k f : U \to \mathbb{C}$.

Fundamentalsatz der Algebra. Seien eine Ordnung $n \in \mathbb{N}$ sowie Koeffizienten $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{C}$ mit $a_n \neq \mathbb{0}$ gegeben. Dann besitzt die durch $f(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k$ für $z \in \mathbb{C}$ definierte ganze rationale Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ genau n (nicht notwendig voneinander verschiedene) Nullstellen $z_1, \ldots, z_n \in \mathbb{C}$ und somit die Darstellung

$$f(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k = a_n \prod_{k=1}^{n} (z - z_k) \quad \text{für alle } z \in \mathbb{C}.$$

Teilbruchzerlegung rationaler Funktionen. Seien durch $\varphi(z) = \sum_{k=0}^{m} b_k z^k$ und $f(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k$ für $z \in \mathbb{C}$ und die Koeffizienten $b_0, \ldots, b_m \in \mathbb{C}$ mit $b_m \neq \mathbb{0}$ bzw. $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{C}$ mit $a_n \neq \mathbb{0}$ zwei ganze rationale Funktionen φ, $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ der Ordnungen $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ bzw. $n \in \mathbb{N}$ mit $m < n$ gegeben.

1. Dann hat f eine Anzahl $\ell \in \{1, \ldots, n\}$ *verschiedener* Nullstellen $z_1, \ldots, z_\ell \in \mathbb{C}$ der Ordnungen $\alpha_1, \ldots, \alpha_\ell \in \mathbb{N}$ mit $\sum_{k=1}^{\ell} \alpha_k = n$ und damit die Darstellung

$$f(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k = a_n \prod_{k=1}^{\ell} (z - z_k)^{\alpha_k} \quad \text{für alle } z \in \mathbb{C}.$$

2. Unter der Voraussetzung, daß φ und f *keine* gemeinsamen Nullstellen haben, besitzt die echt gebrochene rationale Funktion $\frac{\varphi}{f} : \mathbb{C} \setminus \{z_1, \ldots, z_\ell\} \to \mathbb{C}$ eine eindeutige Darstellung in Form einer Teilbruchzerlegung

$$\frac{\varphi(z)}{f(z)} = \sum_{k=1}^{\ell} \sum_{j=1}^{\alpha_k} \frac{a_{kj}}{(z - z_k)^j} \quad \text{für } z \in \mathbb{C} \setminus \{z_1, \ldots, z_\ell\}$$

mit Koeffizienten $a_{k1}, \ldots, a_{k\alpha_k} \in \mathbb{C}$ für $k \in \{1, \ldots, \ell\}$, welche sich aus beiden Darstellungen für die rationale Funktion $\frac{\varphi}{f}$ nach Multiplikation mit dem Hauptnenner und dem Koeffizientenvergleich vor Termen gleicher Ordnung in z als Lösung eines linearen Gleichungssystems berechnen lassen.