Vorlesung 23

Isolierte Singularitäten komplexer Funktionen

Seien eine offene Menge $U \subset \mathbb{C}$, ein Punkt $z_0 \in \mathbb{C}$ sowie Radien $r_0, r_1 \in \mathbb{R}$ mit $0 < r_0 < r_1$ gegeben, so daß der *abgeschlossene Kreisring* $\{z \in \mathbb{C} \mid r_0 \leq |z - z_0| \leq r_1\}$ um den Mittelpunkt $z_0 \in \mathbb{C}$ mit dem inneren Radius r_0 und dem äußeren Radius r_1 in U liegt. Ferner definiert man die beiden Kreislinien $\gamma_0, \gamma_1 : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ in U durch $\gamma_0(t) = z_0 + r_0 \operatorname{Exp}(\mathbb{i}t)$ und $\gamma_1(t) = z_0 + r_1 \operatorname{Exp}(\mathbb{i}t)$ für $t \in [0, 2\pi]$.

Integralformel von Cauchy für Kreisringe. Ist $f : U \to \mathbb{C}$ eine analytische Funktion, so ist die für einen beliebig gegebenen Punkt $z \in \mathbb{C}$ mit $r_0 < |z - z_0| < r_1$ durch

$$g(\zeta) = \begin{cases} \frac{f(\zeta)-f(z)}{\zeta - z} & \text{für } \zeta \in U \text{ mit } \zeta \neq z, \\ Df(z) & \text{für } \zeta \in U \text{ mit } \zeta = z, \end{cases}$$

definierte Funktion $g : U \to \mathbb{C}$ analytisch. Man erhält vermöge

$$\varphi(t, \xi) = z_0 + (1 - \xi) r_0 \operatorname{Exp}(\mathbb{i}t) + \xi r_1 \operatorname{Exp}(\mathbb{i}t) \quad \text{für } t \in [0, 2\pi], \xi \in [0, 1],$$

eine *geschlossene Deformation* $\varphi : [0, 2\pi] \times [0, 1] \to \mathbb{C}$ von γ_0 in γ_1 innerhalb von U. Nach dem Integralsatz von Cauchy gilt somit $\int_{\gamma_1} g(\zeta)\, d\zeta = \int_{\gamma_0} g(\zeta)\, d\zeta$. Da sowohl $\operatorname{ind}(\gamma_1, z) = 1$ als auch $\operatorname{ind}(\gamma_0, z) = 0$ gilt, liefert die Darstellung

$$g(\zeta) = \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} - \frac{f(z)}{\zeta - z} \quad \text{für } \zeta \in \mathbb{C} \text{ mit } |\zeta - z_0| = r_0 \text{ oder } |\zeta - z_0| = r_1$$

die *Integralformel von Cauchy*

$$f(z) = \frac{\mathbb{1}}{2\pi\mathbb{i}} \int_{\gamma_1} \frac{f(\zeta)\, d\zeta}{\zeta - z} - \frac{\mathbb{1}}{2\pi\mathbb{i}} \int_{\gamma_0} \frac{f(\zeta)\, d\zeta}{\zeta - z} \quad \text{für jedes } z \in \mathbb{C} \text{ mit } r_0 < |z - z_0| < r_1.$$

Nebenteil der Laurent-Entwicklung. Ist $f : U \to \mathbb{C}$ eine analytische Funktion, so erhält man wegen der gleichmäßigen Konvergenz der geometrischen Reihe

$$\frac{\mathbb{1}}{\zeta - z} = \frac{\mathbb{1}}{\zeta - z_0} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{z - z_0}{\zeta - z_0} \right)^k \quad \text{für } \zeta, z \in \mathbb{C} \text{ mit } |z - z_0| < |\zeta - z_0| = r_1$$

durch Integration längs γ_1 die Konvergenz des *Nebenteils* $\left(\sum_{k=0}^{n} a_k (z - z_0)^k\right)$ gegen

$$\frac{\mathbb{1}}{2\pi\mathbb{i}} \int_{\gamma_1} \frac{f(\zeta)\, d\zeta}{\zeta - z} = \frac{\mathbb{1}}{2\pi\mathbb{i}} \int_{\gamma_1} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{z - z_0}{\zeta - z_0} \right)^k d\zeta = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k$$

für $|z - z_0| < r_1$, wobei die Koeffizienten (a_k) durch

$$a_k = \frac{\mathbb{1}}{2\pi\mathbb{i}} \int_{\gamma_1} f(\zeta)(\zeta - z_0)^{-k-1} d\zeta \in \mathbb{C} \quad \text{für } k \in \mathbb{N} \cup \{0\} \text{ gegeben sind.}$$

Hauptteil der Laurent-Entwicklung. Ist $f : U \to \mathbb{C}$ eine analytische Funktion, so ergibt sich wegen der gleichmäßigen Konvergenz der geometrischen Reihe

$$\frac{\mathbb{1}}{\zeta - z} = -\frac{\mathbb{1}}{z - z_0}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{\zeta - z_0}{z - z_0}\right)^{k-1} \qquad \text{für alle } \zeta, z \in \mathbb{C} \text{ mit } r_0 = |\zeta - z_0| < |z - z_0|$$

durch Integration längs γ_0 die Konvergenz des *Hauptteils* $\left(\sum_{k=1}^{n} a_{-k}(z-z_0)^{-k}\right)$ gegen

$$-\frac{\mathbb{1}}{2\pi\mathbb{i}}\int_{\gamma_0}\frac{f(\zeta)\,d\zeta}{\zeta - z} = \frac{\mathbb{1}}{2\pi\mathbb{i}}\int_{\gamma_0}\frac{f(\zeta)}{z - z_0}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{\zeta - z_0}{z - z_0}\right)^{k-1} d\zeta = \sum_{k=1}^{\infty} a_{-k}(z - z_0)^{-k}$$

für $|z - z_0| > r_0$, wobei die Koeffizienten (a_{-k}) durch

$$a_{-k} = \frac{\mathbb{1}}{2\pi\mathbb{i}}\int_{\gamma_0} f(\zeta)(\zeta - z_0)^{k-1} d\zeta \in \mathbb{C} \quad \text{für } k \in \mathbb{N} \text{ gegeben sind.}$$

Laurent-Entwicklung in Kreisringen. Sei $f : U \to \mathbb{C}$ eine analytische Funktion.

1. Dann konvergiert die aus Neben- und Hauptteil zusammengesetzte *Laurent-Reihe* $\left(\sum_{k=m}^{n} a_k(z - z_0)^k\right)$ *von* f aufgrund der Integralformel von Cauchy für jedes $z \in \mathbb{C}$ mit $r_0 < |z - z_0| < r_1$ im Grenzprozeß $n \to \infty, m \to -\infty$ gegen den Wert

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k(z - z_0)^k = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(z - z_0)^k + \sum_{k=1}^{\infty} a_{-k}(z - z_0)^{-k} \in \mathbb{C}.$$

2. Sind außerdem Koeffizienten $b_k \in \mathbb{C}$ für $k \in \mathbb{Z}$ gegeben, so daß die Laurent-Reihe $\left(\sum_{k=m}^{n} b_k(z - z_0)^k\right)$ für jedes $z \in \mathbb{C}$ mit $r_0 < |z - z_0| < r_1$ im Grenzprozeß $n \to \infty, m \to -\infty$ ebenfalls gegen den Wert $f(z) \in \mathbb{C}$ konvergiert, dann gilt $a_k = b_k$ für jedes $k \in \mathbb{Z}$.

3. Seien Grenzen $a, b \in \mathbb{R}$ des Intervalls $X = [a, b] \subset \mathbb{R}$ mit $a < b$ gegeben. Dann gilt für jeden geschlossenen Weg $\gamma : X \to \mathbb{C}$ in $\{z \in \mathbb{C} \mid r_0 \le |z - z_0| \le r_1\}$ stets

$$\operatorname{ind}(\gamma, z_0) \cdot a_k = \frac{1}{2\pi\mathbb{i}}\int_{\gamma} f(\zeta)(\zeta - z_0)^{-k-1} d\zeta \quad \text{für jedes } k \in \mathbb{Z}.$$

Laurent-Entwicklung in der Umgebung isolierter Punkte. Seien eine offene Teilmenge $U \subset \mathbb{C}$ sowie eine analytische Funktion $f : U \to \mathbb{C}$, ferner ein *isolierter Punkt* z_0 von $\mathbb{C} \setminus U$, ein Radius $r > 0$ mit $\{z \in \mathbb{C} \mid 0 < |z - z_0| \le r\} \subset U$ sowie die Kreislinie $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ durch $\gamma(t) = z_0 + r\,\mathrm{Exp}(\mathbb{i}t)$ für $t \in [0, 2\pi]$ gegeben.

1. Dann konvergiert die *Laurent-Reihe* $\left(\sum_{k=m}^{n} a_k(z - z_0)^k\right)$ *von* f *um* z_0 mit

$$a_k = \frac{\mathbb{1}}{2\pi\mathbb{i}}\int_{\gamma} f(\zeta)(\zeta - z_0)^{-k-1} d\zeta \in \mathbb{C} \quad \text{für } k \in \mathbb{Z}$$

für jedes $z \in \mathbb{C}$, $0 < |z - z_0| < r$ im Grenzprozeß $n \to \infty, m \to -\infty$ gegen den Wert

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k(z - z_0)^k = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(z - z_0)^k + \sum_{k=1}^{\infty} a_{-k}(z - z_0)^{-k} \in \mathbb{C}.$$

2. Das Infimum $\omega_f(z_0) = \inf\{k \in \mathbb{Z} \mid a_k \neq \mathbb{0}\} \in \mathbb{Z} \cup \{-\infty, \infty\}$ wird als *Ordnung der Singularität des isolierten Punktes* $z_0 \in \mathbb{C} \setminus U$ *von* f bezeichnet.

2.1. Im Falle $\omega_f(z_0) = -\infty$ besitzt f in $z_0 \in \mathbb{C} \setminus U$ eine *wesentliche Singularität*.

2.2. Im Falle $-\infty < \omega_f(z_0) < 0$ hat f in $z_0 \in \mathbb{C} \setminus U$ eine *Polstelle der Ordnung* $k = |\omega_f(z_0)| \in \mathbb{N}$. Dabei gilt $\lim_{z \to z_0}(z - z_0)^k f(z) = a_{-k} \neq \mathbb{0}$.

2.3. Im Falle $\omega_f(z_0) \geq 0$ besitzt f in $z_0 \in \mathbb{C} \setminus U$ eine *hebbare Singularität*. Wegen $\lim_{z \to z_0} f(z) = a_0$ tritt gar keine Singularität auf: Der Nebenteil $\left(\sum_{k=0}^{n} a_k (z - z_0)^k\right)$ konvergiert im ganzen Kreis $\{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| < r\}$ gegen die Fortsetzung von f.

2.4. Im Falle $0 < \omega_f(z_0) < \infty$ ist $z_0 \in \mathbb{C} \setminus U$ eine *Nullstelle von* f *der Ordnung* $k = \omega_f(z_0) \in \mathbb{N}$. Dabei gilt $\lim_{z \to z_0}(z - z_0)^{-k} f(z) = a_k \neq \mathbb{0}$.

2.5. Im Falle $\omega_f(z_0) = \infty$ ist $f = 0$ die Nullfunktion.

Residuensatz. Seien $U \subset \mathbb{C}$ einfach zusammenhängend und offen, $a, b \in \mathbb{R}$ Intervallgrenzen von $X = [a, b] \subset \mathbb{R}$ mit $a < b$ und $\gamma : X \to \mathbb{C}$ ein geschlossener Weg in U. Seien ferner $z_1, \ldots, z_n \in U \setminus \gamma[X]$ Mittelpunkte sowie $r_1, \ldots, r_n > 0$ Radien der abgeschlossenen Kreise $B_\ell = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_\ell| \leq r_\ell\}$ sowie $\gamma_\ell : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ jeweils die Kreislinie $\gamma_\ell(t) = z_\ell + r_\ell \operatorname{Exp}(\mathbb{i}t)$ für $t \in [0, 2\pi]$ und $\ell \in \{1, \ldots, n\}$.

1. Sind die Kreise B_ℓ zueinander *paarweise disjunkt* und gilt $B_\ell \subset U \setminus \gamma[X]$ für alle $\ell \in \{1, \ldots, n\}$, dann ergibt sich für jede analytische Funktion $f : U \setminus \{z_1, \ldots z_n\} \to \mathbb{C}$ die Integralformel

$$\frac{\mathbb{1}}{2\pi\mathbb{i}} \int_\gamma f(z)\,dz = \sum_{\ell=1}^{n} \frac{\operatorname{ind}(\gamma, z_\ell)}{2\pi\mathbb{i}} \int_{\gamma_\ell} f(z)\,dz.$$

2. Da für $\ell \in \{1, \ldots, n\}$ die Laurent-Reihe $\left(\sum_{k=m}^{n} a_{k\ell}(z - z_0)^k\right)$ von f um z_ℓ mit

$$a_{k\ell} = \frac{\mathbb{1}}{2\pi\mathbb{i}} \int_{\gamma_\ell} f(\zeta)(\zeta - z_\ell)^{-k-1} d\zeta \in \mathbb{C} \quad \text{für } k \in \mathbb{Z}$$

für jedes $z \in \mathbb{C}$, $0 < |z - z_\ell| < r_\ell$ im Grenzprozeß $n \to \infty$, $m \to -\infty$ gegen den Wert

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_{k\ell}(z - z_0)^k = \sum_{k=0}^{\infty} a_{k\ell}(z - z_0)^k + \sum_{k=1}^{\infty} a_{-k\ell}(z - z_0)^{-k} \in \mathbb{C}$$

konvergiert, liefert die obige Integralformel die alternative Darstellung

$$\frac{\mathbb{1}}{2\pi\mathbb{i}} \int_\gamma f(z)\,dz = \sum_{\ell=1}^{n} \operatorname{ind}(\gamma, z_\ell) \cdot a_{-1\ell}.$$