Vorlesung 3

Komplexe Zahlen

Da es keine reelle Zahl $x \in \mathbb{R}$ mit der Eigenschaft $x^2 = -1$ gibt, erhebt sich die Frage, wie man den Körper $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen zu einem Körper $\mathbb{C}$ erweitern kann, so daß die Gleichung $v^2 = -\mathbb{1}$ eine Lösung $v \in \mathbb{C}$ besitzt:

Körper der komplexen Zahlen. Die Menge $\mathbb{C} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ mit den beiden Abbildungen *Addition* bzw. *Multiplikation*, welche jedem $(a, b), (c, d) \in \mathbb{C}$ jeweils die

Summe $(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d) \in \mathbb{C}$ bzw. das

Produkt $(a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ad + bc) \in \mathbb{C}$

zuordnet, bildet den Körper $\mathbb{C}$ der *komplexen Zahlen* mit dem

1. Nullelement $\mathbb{0} = (0, 0) \in \mathbb{C}$, Einselement $\mathbb{1} = (1, 0) \in \mathbb{C}$,
2. Additiv Inversen $-(a, b) = (-a, -b) \in \mathbb{C}$ zu $(a, b) \in \mathbb{C}$,
3. Multiplikativ Inversen

$$(a, b)^{-1} = \frac{\mathbb{1}}{(a, b)} = \left(\frac{a}{a^2 + b^2}, \frac{-b}{a^2 + b^2}\right) \in \mathbb{C} \setminus \{\mathbb{0}\} \quad \text{zu } (a, b) \in \mathbb{C} \setminus \{\mathbb{0}\}.$$

Definiert man noch eine *skalare Multiplikation*, die jedem $(a, b) \in \mathbb{C}$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ das

Skalare Vielfache $\lambda(a, b) = (\lambda a, \lambda b) \in \mathbb{C}$ zuordnet,

so bildet $\mathbb{C}$ einen *linearen Raum* mit Addition und skalarer Multiplikation über $\mathbb{R}$.

Teilkörper der reellen Zahlen. Im Teilkörper $\mathbb{C}_0 = \{(a, 0) \in \mathbb{C} \mid a \in \mathbb{R}\}$ von $\mathbb{C}$ erhält man offenbar für alle $a, c \in \mathbb{R}$ als

Summe $(a, 0) + (c, 0) = (a + c, 0) \in \mathbb{C}_0$,

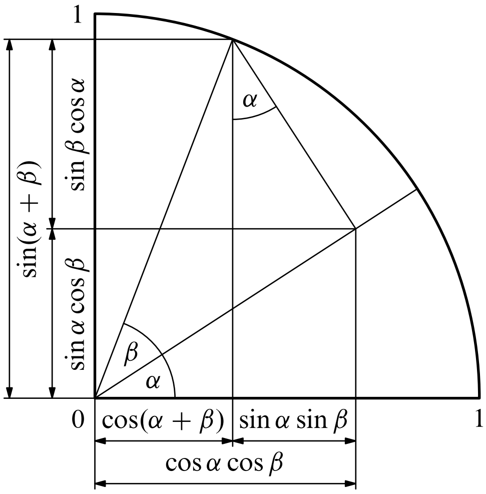
Produkt $(a, 0) \cdot (c, 0) = (ac, 0) \in \mathbb{C}_0$.

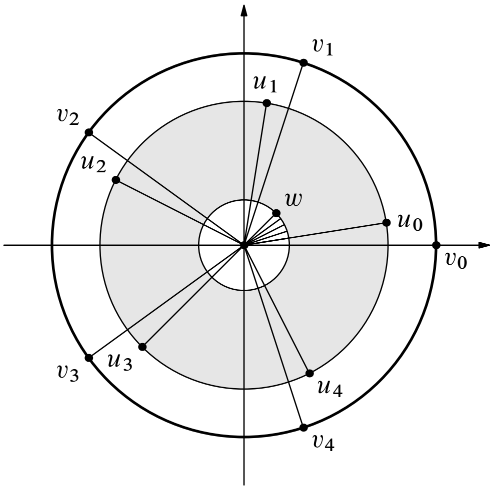
Durch $f((a, 0)) = a \in \mathbb{R}$ für $(a, 0) \in \mathbb{C}_0$ wird somit eine Bijektion f von $\mathbb{C}_0$ auf $\mathbb{R}$ mit $f((a, 0) + (c, 0)) = f((a, 0)) + f((c, 0))$ und $f((a, 0) \cdot (c, 0)) = f((a, 0)) f((c, 0))$ für $(a, 0), (c, 0) \in \mathbb{C}_0$ definiert, das heißt, man kann den Körper $\mathbb{C}$ als eine (ungeordnete, zweidimensionale) Erweiterung des Körpers $\mathbb{R}$ ansehen.

Real- und Imaginärteil. Führt man neben der *reellen* Einheit $\mathbb{1} = (1, 0) \in \mathbb{C}$ noch die *imaginäre* Einheit $\mathbb{i} = (0, 1) \in \mathbb{C}$ ein, dann gilt $\mathbb{i}^2 = (-1, 0) = -\mathbb{1}$. Die Koordinaten $a = \mathrm{Re}(v)$, $b = \mathrm{Im}(v) \in \mathbb{R}$ heißen *Realteil* bzw. *Imaginärteil* von $v = (a, b) \in \mathbb{C}$.

Komplexe Konjugation und absoluter Betrag. Für $v = (a, b) \in \mathbb{C}$ bildet man das *komplex Konjugierte* $\overline{v} = (a, -b) \in \mathbb{C}$ und den *absoluten Betrag* $|v| = \sqrt{a^2 + b^2} \in \mathbb{R}$.

1. Es gilt $\overline{v + w} = \overline{v} + \overline{w}$ und $\overline{v \cdot w} = \overline{v} \cdot \overline{w}$ für alle $v, w \in \mathbb{C}$.
2. Es gilt $v + \overline{v} = (2\,\mathrm{Re}(v), 0)$ sowie $v - \overline{v} = (0, 2\,\mathrm{Im}(v))$ für alle $v \in \mathbb{C}$.
3. Es gilt $|v| = |\overline{v}| \geq 0$ für alle $v \in \mathbb{C}$ und insbesondere $|v| > 0$, falls $v \neq \mathbb{0}$.
4. Es gilt $|v \cdot w| = |v|\,|w|$ und $v \cdot \overline{v} = (|v|^2, 0)$ für alle $v, w \in \mathbb{C}$.
5. Es gilt $\big||v| - |w|\big| \leq |v - w|$ und $|v + w| \leq |v| + |w|$ für alle $v, w \in \mathbb{C}$.





Polarkoordinaten. Für jedes $v \in \mathbb{C}$ gibt es eine Darstellung $v = (r\cos\alpha, r\sin\alpha)$ in Polarkoordinaten $(r,\alpha) \in [0,\infty[\times [0,2\pi[$, die im Falle $v = (a,b) \neq \mathbb{0}$ eindeutig durch $r = |v| = \sqrt{a^2+b^2} > 0$ sowie $\cos\alpha = \frac{a}{|v|}$ und $\sin\alpha = \frac{b}{|v|}$ bestimmt werden.

Produktformeln. Diese Darstellung ist besonders für Produkte komplexer Zahlen geeignet, denn ist außerdem $w = (\rho\cos\beta, \rho\sin\beta) \in \mathbb{C}$ mit $(\rho,\beta) \in [0,\infty[\times [0,2\pi[$ gegeben, so gilt aufgrund der Additionstheoreme für trigonometrische Funktionen

$$\begin{aligned} v \cdot w &= (r\cos\alpha, r\sin\alpha) \cdot (\rho\cos\beta, \rho\sin\beta) \\ &= \big(r\rho\,(\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta), r\rho\,(\sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha)\big) \\ &= \big(r\rho\cos(\alpha+\beta), r\rho\sin(\alpha+\beta)\big), \end{aligned}$$

woraus sich die Moivre-Formel $v^n = (r^n\cos n\alpha, r^n\sin n\alpha) \in \mathbb{C}$ für $n \in \mathbb{Z}$ ergibt.

Wurzeln. 1. Die Gleichung $v^n = \mathbb{1}$ besitzt für $n \in \mathbb{N}$ genau n verschiedene Lösungen $v_0, v_1, \ldots, v_{n-1} \in \mathbb{C}$, die man als *$n$-te Einheitswurzeln*

$$v_k = \big(\cos(2\pi k/n), \sin(2\pi k/n)\big) \in \mathbb{C} \quad \text{für } k \in \{0,1,\ldots,n-1\}$$

bezeichnet und für die offenbar $v_0 = \mathbb{1}$ sowie $v_k = v_1^k$ und $|v_k| = 1$ gilt.

2. Ist $w = (r\cos\alpha, r\sin\alpha) \in \mathbb{C} \setminus \{\mathbb{0}\}$ mit $(r,\alpha) \in]0,\infty[\times [0,2\pi[$ gegeben, dann ist

$$u_0 = \big(r^{1/n}\cos(\alpha/n), r^{1/n}\sin(\alpha/n)\big) \in \mathbb{C} \setminus \{\mathbb{0}\}$$

eine Lösung der Gleichung $u^n = w$ für $n \in \mathbb{N}$. Mit Hilfe der n-ten Einheitswurzeln $v_k \in \mathbb{C}$ erhält man für $k \in \{0,1,\ldots,n-1\}$ alle n verschiedenen Lösungen

$$u_k = u_0 \cdot v_k = \big(r^{1/n}\cos((\alpha+2\pi k)/n), r^{1/n}\sin((\alpha+2\pi k)/n)\big) \in \mathbb{C} \setminus \{\mathbb{0}\}$$

der Gleichung $u^n = w$, denn es gilt $u_k^n = u_0^n \cdot v_k^n = w \cdot \mathbb{1} = w$.

Geraden und Strecken. Seien v_1, v_2, v_3, $v_4 \in \mathbb{C}$ mit $v_1 \neq v_2$ und $v_3 \neq v_4$ gegeben.

1. Die Menge $G(v_1, v_2) = \{(1-\lambda)v_1 + \lambda v_2 \in \mathbb{C} \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$ wird als *Gerade* durch die Punkte v_1 und v_2 bezeichnet.

2. Die Menge $\{(1-\lambda)v_1 + \lambda v_2 \in \mathbb{C} \mid \lambda \in [0,1]\}$ wird *Strecke* mit den Endpunkten v_1 und v_2 genannt.

3. Die Geraden $G(v_1, v_2)$ und $G(v_3, v_4)$ sind genau dann *parallel,* wenn es eine reelle Zahl $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ gibt, so daß $v_2 - v_1 = \lambda(v_4 - v_3)$ gilt.

4. Die Geraden $G(v_1, v_2)$ und $G(v_3, v_4)$ stehen genau dann *senkrecht aufeinander*, wenn eine reelle Zahl $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ existiert, so daß $v_2 - v_1 = \lambda \mathbb{i}(v_4 - v_3)$ gilt.

Kreise und Kreislinien. 1. Die Menge $\{v \in \mathbb{C} \mid |v - v_0| < r\}$ heißt *offener Kreis* mit dem Mittelpunkt $v_0 \in \mathbb{C}$ und dem Radius $r \in \mathbb{R}$, $r > 0$.

2. Die Menge $\{v \in \mathbb{C} \mid |v - v_0| \leq r\}$ wird *abgeschlossener Kreis* mit dem Mittelpunkt $v_0 \in \mathbb{C}$ und dem Radius $r \in \mathbb{R}$, $r \geq 0$ genannt.

3. Die Menge $\{v \in \mathbb{C} \mid |v - v_0| = r\}$ heißt *Kreislinie* um den Mittelpunkt $v_0 \in \mathbb{C}$ mit dem Radius $r \in \mathbb{R}$, $r > 0$.

Offene und abgeschlossene Mengen. 1. Eine Menge $U \subset \mathbb{C}$ heißt *offen*, wenn es für jedes $v_0 \in U$ einen Radius $r \in \mathbb{R}$ mit $r > 0$ gibt, so daß der offene Kreis $\{v \in \mathbb{C} \mid |v - v_0| < r\}$ in U enthalten ist.

2. Eine Menge $U \subset \mathbb{C}$ heißt *abgeschlossen*, wenn die Menge $\mathbb{C} \setminus U$ offen ist.

3. Die Menge $U \subset \mathbb{C}$ wird als *beschränkt* bezeichnet, wenn es einen Radius $r \in \mathbb{R}$ mit $r > 0$ gibt, so daß U im offenen Kreis $\{v \in \mathbb{C} \mid |v| < r\}$ enthalten ist.

Vollständigkeit. Jede absteigende Folge $U_1 \supset U_2 \supset \cdots \supset U_k \supset \cdots$ ineinandergeschachtelter, beschränkter und abgeschlossener Mengen $U_k \subset \mathbb{C}$ hat einen nichtleeren Durchschnitt $\cap_{k \in \mathbb{N}} U_k \neq \varnothing$.