Vorlesung 4

Zahlenfolgen

Funktionen $f : \mathbb{N} \to \mathbb{K}$ mit Werten $f(n) = a_n \in \mathbb{K}$ für $n \in \mathbb{N}$ werden im Falle $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ als *Zahlenfolgen* (a_n) bezeichnet. Mitunter betrachtet man Folgen (a_n), deren *Glieder* $a_n \in \mathbb{K}$ nur für Indizes $n \geq \ell \in \mathbb{N}$ definiert sind.

Konvergenz. 1. Eine Zahlenfolge (a_n) heißt *konvergent*, wenn ein $a \in \mathbb{K}$ existiert, so daß es für jedes $\varepsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ derart gibt, daß $|a_n - a| \leq \varepsilon$ für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq n_0$ gilt. In diesem Falle wird die (dadurch eindeutig bestimmte) Zahl $a \in \mathbb{K}$ *Grenzwert* der Zahlenfolge genannt, und man schreibt $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ oder $\lim_{n\to\infty} |a_n - a| = 0$.

2. Eine Zahlenfolge heißt *divergent*, wenn sie *nicht* konvergent ist.

Cauchy-Kriterium. Eine Zahlenfolge (a_n) konvergiert genau dann, wenn für jedes $\varepsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ existiert, so daß $|a_m - a_n| \leq \varepsilon$ für alle $m, n \in \mathbb{N}$ mit $m, n \geq n_0$ gilt.

Operationen mit konvergenten Folgen. Sind (a_n), (b_n) konvergente Zahlenfolgen mit den Grenzwerten $\lim_{n\to\infty} a_n = a \in \mathbb{K}$ und $\lim_{n\to\infty} b_n = b \in \mathbb{K}$, dann gilt:

1. Die Folgen $(a_n + b_n)$ und $(a_n b_n)$ sind ebenfalls konvergent, und für ihre Grenzwerte gilt $\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = a + b$ sowie $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = ab$.

2. Für $b \neq \mathbb{0}$ konvergiert die Folge $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)$ gegen den Grenzwert $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}$.

Bestimmte Divergenz. Eine divergente Folge (a_n) reeller Zahlen wird als *bestimmt divergent* bezeichnet, wenn genau eine der folgenden Bedingungen erfüllt ist:

Für jedes $c \in \mathbb{R}$ gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so daß $a_n \geq c$ (bzw. $a_n \leq c$) für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq n_0$ gilt. In diesem Falle schreibt man $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ (bzw. $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$).

Operationen mit divergenten Folgen. Sind (a_n), (b_n) Folgen reeller Zahlen, so gilt:

1. Ist (a_n) eine Folge, so daß $|a_n| \leq c$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und ein $c \geq 0$ gilt, und ist (b_n) bestimmt divergent, so folgt aus $\lim_{n\to\infty} b_n = \infty$ (bzw. $\lim_{n\to\infty} b_n = -\infty$) stets $\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \infty$ (bzw. $\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = -\infty$) und $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$.

2. Existiert ein $a \in \mathbb{R}$ mit $a > 0$, so daß $a_n \geq a$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt und ist (b_n) bestimmt divergent, so folgt aus $\lim_{n\to\infty} b_n = \infty$ (bzw. $\lim_{n\to\infty} b_n = -\infty$) stets $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = \infty$ (bzw. $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = -\infty$).

3. Gibt es ein $a \in \mathbb{R}$ mit $a < 0$, so daß $a_n \leq a$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt und ist (b_n) bestimmt divergent, so folgt aus $\lim_{n\to\infty} b_n = \infty$ (bzw. $\lim_{n\to\infty} b_n = -\infty$) stets $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = -\infty$ (bzw. $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = \infty$).

4. Sind (a_n) und (b_n) bestimmt divergent, so liefert $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = \infty$ stets $\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \infty$ bzw. $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty = \lim_{n\to\infty} b_n = -\infty$ stets $\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = -\infty$.

5. Gilt $b_n > 0$ (bzw. $b_n < 0$) für alle $n \in \mathbb{N}$, dann folgt aus der Konvergenz von (b_n) gegen 0 stets $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{b_n} = \infty$ (bzw. $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{b_n} = -\infty$).

Folgen von Potenzen. Sei $q \in \mathbb{Q}$ mit $q > 0$ ein vorgegebener Exponent.

1. Die Folge (n^q) reeller Zahlen ist bestimmt divergent, denn wird $c \in \mathbb{R}$, $c > 0$ beliebig vorgegeben, dann kann man ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $n_0 \geq c^{1/q}$ finden, woraus sich für jedes $n \geq n_0$ stets $n^q \geq n_0^q \geq c$ und somit $\lim_{n\to\infty} n^q = \infty$ ergibt.

2. Die Folge (n^{-q}) reeller Zahlen konvergiert gegen den Grenzwert 0, denn wird $\delta \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$ beliebig vorgegeben, so kann man ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $n_0 \geq \delta^{-1/q}$ finden, woraus für jedes $n \geq n_0$ zunächst $n^q \geq n_0^q \geq \frac{1}{\delta}$ und damit $0 < n^{-q} \leq \delta$ folgt.

Vergleichskriterien. Seien (a_n), (b_n) reelle Zahlenfolgen und $a_n \leq b_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

1. Sind die Folgen (a_n) und (b_n) konvergent, dann folgt $\lim_{n\to\infty} a_n \leq \lim_{n\to\infty} b_n$.

2. Ist (d_n) eine Folge reeller Zahlen derart, daß $a_n \leq d_n \leq b_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt, dann folgt aus der Konvergenz der Folgen (a_n) und (b_n) gegen denselben Grenzwert $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n$ auch die Konvergenz der Folge (d_n) gegen den Grenzwert $\lim_{n\to\infty} d_n = \lim_{n\to\infty} a_n$.

3. Ist (a_n) bestimmt divergent und gilt $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$, dann ist auch (b_n) bestimmt divergent, und es gilt $\lim_{n\to\infty} b_n = \infty$.

4. Ist (b_n) bestimmt divergent und gilt $\lim_{n\to\infty} b_n = -\infty$, dann ist auch (a_n) bestimmt divergent, und es gilt $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$.

Teilfolgen. Ist (n_m) eine Folge natürlicher Zahlen, so daß $n_m < n_{m+1}$ für alle $m \in \mathbb{N}$ gilt und (a_n) eine Zahlenfolge, dann nennt man (a_{n_m}) eine *Teilfolge* von (a_n).

Häufungswerte. Sei (a_n) eine Zahlenfolge und $a \in \mathbb{K}$. Dann sind die Aussagen

1. Es gibt eine konvergente Teilfolge (a_{n_m}) von (a_n) mit $\lim_{m\to\infty} |a_{n_m} - a| = 0$.

2. Für jedes $\varepsilon > 0$ existieren unendlich viele verschiedene $n \in \mathbb{N}$ mit $|a_n - a| \leq \varepsilon$.

äquivalent. In diesem Falle nennt man $a \in \mathbb{K}$ einen *Häufungswert* der Folge (a_n).

Beschränkte Folgen. 1. Eine Zahlenfolge (a_n) heißt *beschränkt*, wenn es ein $c \in \mathbb{R}$, $c \geq 0$ gibt, so daß $|a_n| \leq c$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

2. Jede konvergente Zahlenfolge ist beschränkt.

3. Jede beschränkte Folge besitzt mindestens einen Häufungswert.

Monotone Folgen. 1. Eine Folge (a_n) reeller Zahlen heißt *monoton wachsend* (bzw. *fallend*), wenn $a_n \leq a_{n+1}$ (bzw. $a_{n+1} \leq a_n$) für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

2. Jede monotone und beschränkte Folge reeller Zahlen ist konvergent.

Obere und untere Häufungswerte. 1. Die Menge aller Häufungswerte einer beschränkten Folge (a_n) reeller Zahlen besitzt ein Maximum (bzw. ein Minimum), welches als *Limes superior* $\limsup_{n\to\infty} a_n \in \mathbb{R}$ (bzw. *Limes inferior* $\liminf_{n\to\infty} a_n \in \mathbb{R}$) der Folge (a_n) bezeichnet wird.

2. Es gilt genau dann $\limsup_{n\to\infty} a_n = \liminf_{n\to\infty} a_n$ $(= \lim_{n\to\infty} a_n)$, wenn die Folge (a_n) konvergent ist.

Geometrische Folgen. Für $x \in \mathbb{K}$ wird (x^n) als *geometrische Folge* bezeichnet. Sei $\ell \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ beliebig vorgegeben.

1. Für $|x| > 1$ divergiert die Folge $\left(\frac{x^n}{n^\ell}\right)$, denn für jedes $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2\ell$ liefert die binomische Formel wegen $n - \ell \geq \frac{n}{2}$ die Abschätzung

$$\frac{|x|^n}{n^\ell} = \frac{((|x|-1)+1)^n}{n^\ell} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{(|x|-1)^k}{n^\ell}$$
$$\geq \binom{n}{\ell+1} \frac{(|x|-1)^{\ell+1}}{n^\ell} \geq \left(\frac{n}{2}\right)^{\ell+1} \frac{(|x|-1)^{\ell+1}}{n^\ell(\ell+1)!} = \frac{n(|x|-1)^{\ell+1}}{2^{\ell+1}(\ell+1)!}.$$

2. Für $|x| < 1$ konvergiert die Folge $(n^\ell x^n)$ gegen $\mathbb{0}$, denn im Falle $0 < |x| < 1$ gilt $\frac{1}{|x|} > 1$ und somit $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^\ell |x|^n} = \infty$, woraus $\lim_{n\to\infty} n^\ell |x|^n = 0$ folgt.

3. Die Folge $\left(\frac{x^n}{n!}\right)$ konvergiert für jedes $x \in \mathbb{K}$ gegen $\mathbb{0}$, denn man erhält wegen

$$0 \leq \frac{|x|^n}{n!} = \frac{|x|}{n} \cdot \frac{|x|^{n-1}}{(n-1)!} \leq \frac{|x|^{n-1}}{(n-1)!} \quad \text{für jedes } n \in \mathbb{N} \text{ mit } n \geq |x|$$

zunächst die Monotonie und die Beschränktheit der Folge $\left(\frac{|x|^n}{n!}\right)$ für $n \geq |x|$. Setzt man $a = \lim_{n\to\infty} \frac{|x|^n}{n!} \in \mathbb{R}$, dann liefert der Grenzprozeß $n \to \infty$ schließlich

$$a = \lim_{n\to\infty} \frac{|x|^n}{n!} = \lim_{n\to\infty} \frac{|x|}{n} \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{|x|^{n-1}}{(n-1)!} = 0 \cdot a = 0.$$