Vorlesung 5

Zahlenreihen

Zu jeder Zahlenfolge (a_k) mit Gliedern a_k in $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ für $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ kann man eine Zahlenfolge (s_n) von Teilsummen $s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k \in \mathbb{K}$ für $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ betrachten, die man als *Zahlenreihe* $\left(\sum_{k=0}^{n} a_k\right)$ mit Summanden $a_k \in \mathbb{K}$ bezeichnet. Manche Zahlenreihen $\left(\sum_{k=\ell}^{n} a_k\right)$ beginnen mitunter erst mit dem Index $\ell \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Konvergenz und absolute Konvergenz. 1. Eine Reihe $\left(\sum_{k=0}^{n} a_k\right)$ heißt *konvergent*, wenn sie als Folge ihrer Teilsummen konvergiert. In diesem Falle wird der Grenzwert $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k \in \mathbb{K}$ als *Summe* $\sum_{k=0}^{\infty} a_k \in \mathbb{K}$ der Reihe bezeichnet.

2. Eine Reihe wird *divergent* genannt, wenn sie *nicht* konvergent ist.

3. Eine Reihe $\left(\sum_{k=0}^{n} a_k\right)$ heißt *absolut konvergent*, wenn die Reihe $\left(\sum_{k=0}^{n} |a_k|\right)$ reeller Zahlen mit den Summanden $|a_k| \geq 0$ konvergiert.

Cauchy-Kriterium. 1. Die Reihe $\left(\sum_{k=0}^{n} a_k\right)$ konvergiert genau dann, wenn es für jedes $\varepsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ gibt, so daß $\left|\sum_{k=n}^{m} a_k\right| \leq \varepsilon$ für alle $m, n \in \mathbb{N}, m \geq n \geq n_0$ gilt.

2. Ist eine Reihe $\left(\sum_{k=0}^{n} a_k\right)$ konvergent, dann gilt stets $\lim_{k\to\infty} a_k = \mathbb{0}$.

3. Konvergiert eine Reihe absolut, dann ist sie auch konvergent.

Majorantenkriterium. Die Reihe $\left(\sum_{k=0}^{n} a_k\right)$ konvergiert absolut, wenn es eine Folge (b_k) reeller Summanden und ein $\ell \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ gibt, so daß für die Summanden $|a_k| \leq b_k$ für alle $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $k \geq \ell$ gilt und die Reihe $\left(\sum_{k=0}^{n} b_k\right)$ konvergiert. In diesem Falle gilt $\sum_{k=\ell}^{\infty} |a_k| \leq \sum_{k=\ell}^{n} b_k$.

Wurzelkriterium. Die Reihe $\left(\sum_{k=0}^{n} a_k\right)$ konvergiert absolut (bzw. divergiert), wenn die Bedingung $\limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} < 1$ (bzw. $\limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} > 1$) erfüllt ist.

Quotientenkriterium. Die Reihe $\left(\sum_{k=0}^{n} a_k\right)$ konvergiert absolut (bzw. divergiert), wenn die Bedingung $\lim_{k\to\infty} \frac{|a_{k+1}|}{|a_k|} < 1$ (bzw. $\lim_{k\to\infty} \frac{|a_{k+1}|}{|a_k|} > 1$) erfüllt ist.

Dirichlet-Kriterium. Ist die Reihe $\left(\sum_{k=0}^{n} a_k\right)$ beschränkt und (d_k) eine monotone Folge reeller Zahlen mit $\lim_{k\to\infty} d_k = 0$, dann konvergiert die Reihe $\left(\sum_{k=0}^{n} d_k a_k\right)$.

Abel-Kriterium. Konvergiert die Reihe $\left(\sum_{k=0}^{n} a_k\right)$ und ist (d_k) eine monotone und beschränkte Folge reeller Zahlen, so konvergiert die Reihe $\left(\sum_{k=0}^{n} d_k a_k\right)$.

Leibniz-Kriterium für alternierende Reihen. Die Reihe $\left(\sum_{k=0}^{n} a_k\right)$ reeller Zahlen konvergiert, wenn die Folge (a_k) der Summanden die alternierende Eigenschaft $a_{k-1}a_k < 0$ für alle $k \in \mathbb{N}$ besitzt und die Folge $(|a_k|)$ der Beträge monoton fällt sowie gegen $\lim_{k\to\infty} |a_k| = 0$ konvergiert.

Harmonische Reihe. Die Reihe $\left(\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\frac{1}{k}\right)$ erfüllt das Leibniz-Kriterium für alternierende Reihen und ist somit konvergent, aber *nicht* absolut konvergent: Die *harmonische Reihe* $\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\right)$ divergiert, denn für alle $\ell \in \mathbb{N}$ gilt die Abschätzung

$$\sum_{k=2}^{2^\ell}\frac{1}{k} = \sum_{m=0}^{\ell-1}\sum_{k=2^m+1}^{2^{m+1}}\frac{1}{k} \geq \sum_{m=0}^{\ell-1}\sum_{k=2^m+1}^{2^{m+1}}\frac{1}{2^{m+1}} = \sum_{m=0}^{\ell-1}\frac{2^m}{2^{m+1}} = \sum_{m=0}^{\ell-1}\frac{1}{2} = \frac{\ell}{2}\,.$$

Linearkombination konvergenter Reihen. Sind $\left(\sum_{k=0}^{n}a_k\right)$ und $\left(\sum_{k=0}^{n}b_k\right)$ zwei konvergente Reihen, so konvergiert die Reihe $\left(\sum_{k=0}^{n}(xa_k + yb_k)\right)$ gegen die Summe

$$\sum_{k=0}^{\infty}(xa_k + yb_k) = x\sum_{k=0}^{\infty}a_k + y\sum_{k=0}^{\infty}b_k \quad \text{für alle } x,\, y \in \mathbb{K}.$$

Multiplikation absolut konvergenter Reihen. Sind $\left(\sum_{m=0}^{n}a_m\right)$ und $\left(\sum_{k=0}^{n}b_k\right)$ absolut konvergente Reihen, dann konvergiert die Reihe $\left(\sum_{k=0}^{n}\sum_{m=0}^{k}a_m b_{k-m}\right)$ der Cauchy-Produkte absolut gegen das Produkt der Summen

$$\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{k}a_m b_{k-m} = \sum_{m=0}^{\infty}a_m \cdot \sum_{k=0}^{\infty}b_k\,.$$

Geometrische Reihen. 1. Da für geometrische Summen stets

$$\sum_{k=0}^{n}x^k = \frac{\mathbb{1} - x^{n+1}}{\mathbb{1} - x}$$

für jedes $x \in \mathbb{K}$ mit $|x| < 1$ gilt, folgt mit $\lim_{n\to\infty}x^n = \mathbb{0}$, daß in diesem Falle die *geometrische Reihe* $\left(\sum_{k=0}^{n}x^k\right)$ gegen die Summe

$$\sum_{k=0}^{\infty}x^k = \frac{\mathbb{1}}{\mathbb{1} - x} \in \mathbb{K} \quad \text{konvergiert.}$$

2. Sei $\ell \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ vorgegeben. Dann konvergiert die Reihe $\left(\sum_{k=0}^{n}k^\ell x^k\right)$ für jedes $x \in \mathbb{K}$ mit $|x| < 1$ absolut, denn das Quotientenkriterium liefert in diesem Falle

$$\lim_{k\to\infty}\frac{(k+1)^\ell|x|^{k+1}}{k^\ell|x|^k} = \lim_{k\to\infty}\left(1 + \frac{1}{k}\right)^\ell |x| = |x| < 1.$$

3. Die *Exponentialreihe* $\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}\right)$ konvergiert absolut für alle $x \in \mathbb{K}$, denn aufgrund des Quotientenkriteriums ergibt sich

$$\lim_{k\to\infty}\frac{k!\,|x|^{k+1}}{(k+1)!\,|x|^k} = \lim_{k\to\infty}\frac{|x|}{k+1} = 0 < 1.$$