Vorlesung 6

Funktionenfolgen und Potenzreihen

Eine Folge (f_n) von Funktionen $f_n : X \to \mathbb{K}$, welche für alle $n \in \mathbb{N}$ den gemeinsamen Definitionsbereich $X \subset \mathbb{K}$ besitzen, wird als *Funktionenfolge* bezeichnet. Offenbar ist dann $(f_n(x))$ für jedes $x \in X$ eine Zahlenfolge in $\mathbb{K}$. Dementsprechend nennt man Reihen $\left(\sum_{k=0}^{n} f_k\right)$ mit Funktionen $f_k : X \to \mathbb{K}$ als Summanden *Funktionenreihen*, wobei $\left(\sum_{k=0}^{n} f_k(x)\right)$ für jedes $x \in X$ eine Zahlenreihe in $\mathbb{K}$ ist.

Punktweise und gleichmäßige Konvergenz. 1. Eine Folge (f_n) von Funktionen $f_n : X \to \mathbb{K}$ heißt *punktweise konvergent*, wenn eine Grenzfunktion $f : X \to \mathbb{K}$ derart existiert, daß es für jedes $x \in X$ und jedes $\varepsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ gibt, so daß $|f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$ für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq n_0$ gilt, das heißt, daß die Zahlenfolge $(f_n(x))$ für jedes $x \in X$ gegen den Grenzwert $f(x) \in \mathbb{K}$ konvergiert.

2. Eine Folge (f_n) von Funktionen $f_n : X \to \mathbb{K}$ heißt *gleichmäßig konvergent*, wenn es eine Grenzfunktion $f : X \to \mathbb{K}$ gibt, so daß für jedes $\varepsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ derart existiert, daß $|f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$ für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq n_0$ und jedes $x \in X$ gilt.

Cauchy-Kriterium. Eine Folge (f_n) von Funktionen $f_n : X \to \mathbb{K}$ konvergiert genau dann gleichmäßig, wenn es für jedes $\varepsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ gibt, so daß $|f_m(x) - f_n(x)| \leq \varepsilon$ für alle $m, n \in \mathbb{N}$ mit $m, n \geq n_0$ und jedes $x \in X$ gilt.

Vertauschbarkeit von Grenzprozessen. 1. Sei (f_n) eine gegebene Folge von Funktionen $f_n : X \to \mathbb{K}$, die gleichmäßig gegen eine Grenzfunktion $f : X \to \mathbb{K}$ konvergiert, ferner (x_ℓ) eine Zahlenfolge in X derart, daß für jedes festgehaltene $n \in \mathbb{N}$ die Zahlenfolge $(f_n(x_\ell))$ gegen einen Grenzwert $\lim_{\ell\to\infty} f_n(x_\ell) \in \mathbb{K}$ konvergiert. Dann sind auch die Zahlenfolgen $(f(x_\ell))$ und $(\lim_{\ell\to\infty} f_n(x_\ell))$ konvergent, und es gilt

$$\lim_{\ell\to\infty} f(x_\ell) = \lim_{\ell\to\infty} \lim_{n\to\infty} f_n(x_\ell) = \lim_{n\to\infty} \lim_{\ell\to\infty} f_n(x_\ell).$$

Geometrischen Folgen. 1. Sei die Folge (f_n) von Funktionen $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ durch $f_n(x) = x^n$ für $x \in [0,1]$, $n \in \mathbb{N}$ gegeben. Die Funktionenfolge (f_n) konvergiert punktweise gegen die durch $f(x) = 0$ für $x \in [0,1[$ sowie $f(x) = 1$ für $x = 1$ definierte Grenzfunktion $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, aber *nicht* gleichmäßig, denn für die durch $x_\ell = 1 - \frac{1}{\ell} \in [0,1[$ für $\ell \in \mathbb{N}$ definierte Folge (x_ℓ) gelten die Beziehungen

$$\lim_{\ell\to\infty} \lim_{n\to\infty} f_n(x_\ell) = 0 \quad \text{und} \quad \lim_{\ell\to\infty} f_n(x_\ell) = 1 \quad \text{für jedes } n \in \mathbb{N}.$$

2. Jedoch konvergiert die Funktionenfolge (f_n) für jedes vorgegebene $\delta \in]0,1[$ im verkürzten Intervall $[0,\delta]$ gleichmäßig gegen f, da für jedes $\varepsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $\delta^{n_0} \leq \varepsilon$ existiert und somit für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq n_0$ und alle $x \in [0,\delta]$ stets $|f_n(x) - f(x)| = |x^n| \leq \delta^n \leq \delta^{n_0} \leq \varepsilon$ gilt.

Weierstraß-Majorantenkriterium. Existiert zu einer Funktionenreihe $\left(\sum_{k=0}^{n} f_k\right)$ mit den Summanden $f_k : X \to \mathbb{K}$ eine konvergente Reihe $\left(\sum_{k=0}^{n} a_k\right)$ mit reellen Summanden $a_k \in \mathbb{R}$, so daß $|f_k(x)| \leq a_k$ für alle $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ und jedes $x \in X$ gilt, dann konvergiert die Funktionenreihe $\left(\sum_{k=0}^{n} f_k\right)$ gleichmäßig.

Potenzreihen. 1. Sei eine Folge (a_k) mit den Gliedern $a_k \in \mathbb{K}$ für $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ sowie $x_0 \in \mathbb{K}$ gegeben. Dann nennt man die Folge (s_n) von Funktionen $s_n : \mathbb{K} \to \mathbb{K}$, die durch die Teilsummen $s_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k(x-x_0)^k$ für $x \in \mathbb{K}$ und $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ definiert werden, die *Potenzreihe* um den *Mittelpunkt* $x_0 \in \mathbb{K}$ mit den *Koeffizienten* (a_k).

2. Konvergiert die Reihe $(s_n(x))$ für ein $x = x_1 \in \mathbb{K}$ mit $x_1 \neq x_0$, so konvergiert sie für jedes $x \in \mathbb{K}$ mit $|x - x_0| < |x_1 - x_0|$ absolut.

3. Divergiert die Reihe $(s_n(x))$ für ein $x = x_1 \in \mathbb{K}$ mit $x_1 \neq x_0$, dann divergiert sie für jedes $x \in \mathbb{K}$ mit $|x - x_0| > |x_1 - x_0|$.

Konvergenzradius. Als *Konvergenzradius* $R \geq 0$ der Potenzreihe (s_n) um den Mittelpunkt $x_0 \in \mathbb{K}$ mit den Koeffizienten (a_k) definiert man

$$R = \begin{cases} 0, & \text{falls die Folge } \left(\sqrt[k]{|a_k|}\right) \text{ unbeschränkt ist,} \\ \infty, & \text{falls } \lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} = 0 \text{ gilt,} \\ 1/\limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|}, & \text{falls } \limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} \in \left]0, \infty\right[. \end{cases}$$

1. Im Falle $R = 0$ divergiert die Reihe $(s_n(x))$ für jedes $x \in \mathbb{K}$ mit $x \neq x_0$.

2. Falls $R = \infty$ gilt, so konvergiert die Reihe $(s_n(x))$ für jedes $x \in \mathbb{K}$ absolut. Die Potenzreihe (s_n) konvergiert für jedes $r > 0$ gleichmäßig in $\{x \in \mathbb{K} \mid |x - x_0| \leq r\}$.

3. Gilt $R \in \left]0, \infty\right[$, so ist die Reihe $(s_n(x))$ für alle $x \in \mathbb{K}$ mit $|x - x_0| < R$ absolut konvergent und für jedes $x \in \mathbb{K}$ mit $|x - x_0| > R$ divergent. Die Potenzreihe (s_n) konvergiert für jedes $r \in \left]0, R\right[$ gleichmäßig in $\{x \in \mathbb{K} \mid |x - x_0| \leq r\}$.

Konvergenzverhalten am Rande. Hat die Potenzreihe (s_n) den Konvergenzradius $R \in \left]0, \infty\right[$ und konvergiert die Reihe $(s_n(x))$ außerdem noch für einen Randpunkt $x = x_1 \in \mathbb{K}$ mit $|x_1 - x_0| = R$, so konvergiert die Potenzreihe (s_n) auch gleichmäßig in der Strecke $\{(1-\lambda)x_0 + \lambda x_1 \in \mathbb{K} \mid \lambda \in [0, 1]\}$ mit den Endpunkten x_0 und x_1.

Geometrische Reihen. Seien die geometrischen Teilsummen $s_n : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ durch $s_n(x) = \sum_{k=0}^{n} x^k$ für $x \in [-1, 1]$ und $n \in \mathbb{N}$ definiert. Die Potenzreihe (s_n) konvergiert für $r \in \left]0, 1\right[$ gleichmäßig in $[-r, r]$ gegen die durch $s(x) = \frac{1}{1-x}$ für $x \in \left]-1, 1\right[$ definierte Grenzfunktion $s : \left]-1, 1\right[\to \mathbb{R}$, aber *nicht* gleichmäßig in $\left]-1, 1\right[$, denn definiert man die Folge (x_ℓ) durch $x_\ell = \frac{1}{\ell} - 1 \in \left]-1, 1\right[$ für $\ell \in \mathbb{N}$, so erhält man

$$\lim_{\ell\to\infty} \lim_{n\to\infty} s_n(x_\ell) = \tfrac{1}{2} \quad \text{und} \quad \lim_{\ell\to\infty} s_{2n}(x_\ell) = 1, \quad \lim_{\ell\to\infty} s_{2n+1}(x_\ell) = 0 \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Identität von Potenzreihen. Gilt für zwei Potenzreihen um den Mittelpunkt $x_0 \in \mathbb{K}$ mit den Koeffizienten (a_k) bzw. (b_k) und den Konvergenzradien $R > 0$ bzw. $S > 0$

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k = \sum_{k=0}^{\infty} b_k (x - x_0)^k \quad \text{für alle } x \in \mathbb{K}, |x - x_0| < \min\{R, S\},$$

dann folgt daraus die Gleichheit der Koeffizienten $a_k = b_k$ für alle $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Linearkombination von Potenzreihen. Seien zwei Potenzreihen um den Mittelpunkt $x_0 \in \mathbb{K}$ mit den Koeffizienten (a_k) bzw. (b_k) und den Konvergenzradien $R > 0$ bzw. $S > 0$ sowie zwei Zahlen $y, z \in \mathbb{K}$ vorgegeben. Dann hat die Potenzreihe um den Mittelpunkt $x_0 \in \mathbb{K}$ mit den Koeffizienten $(ya_k + zb_k)$ einen Konvergenzradius $P \geq \min\{R, S\}$, und für alle $x \in \mathbb{K}$ mit $|x - x_0| < \min\{R, S\}$ gilt

$$\sum_{k=0}^{\infty} (ya_k + zb_k)(x - x_0)^k = y \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k + z \sum_{k=0}^{\infty} b_k (x - x_0)^k.$$

Multiplikation von Potenzreihen. Seien zwei Potenzreihen um den Mittelpunkt $x_0 \in \mathbb{K}$ mit den Koeffizienten (a_k) bzw. (b_k) und den Konvergenzradien $R > 0$ bzw. $S > 0$ gegeben. Dann besitzt die Potenzreihe um den Mittelpunkt $x_0 \in \mathbb{K}$ mit den Koeffizienten $\left(\sum_{m=0}^{k} a_m b_{k-m}\right)$ einen Konvergenzradius $P \geq \min\{R, S\}$, und für alle $x \in \mathbb{K}$ mit $|x - x_0| < \min\{R, S\}$ gilt

$$\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{k} a_m b_{k-m} (x - x_0)^k = \sum_{m=0}^{\infty} a_m (x - x_0)^m \cdot \sum_{k=0}^{\infty} b_k (x - x_0)^k.$$