Vorlesung 7

Grenzwerte von Funktionen

Es werden verschiedene Konvergenzbegriffe für Funktionen $f : X \to \mathbb{L}$ eingeführt, wobei $X \subset \mathbb{K}$ eine Teilmenge ist und $\mathbb{K}, \mathbb{L} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ vorgegebene Körper sind.

Häufungspunkte und abgeschlossene Mengen. 1. Ein Punkt $x_0 \in \mathbb{K}$ wird als *Häufungspunkt* von X bezeichnet, wenn für jedes $\delta > 0$ ein $x \in X$ mit $0 < |x - x_0| \leq \delta$ existiert, das heißt, eine Folge (x_k) in $X \setminus \{x_0\}$ existiert, für die $\lim_{k\to\infty} x_k = x_0$ gilt.

2. Ein Punkt $x_0 \in X$ heißt *isolierter Punkt*, wenn er *kein* Häufungspunkt von X ist.

3. Die Menge X heißt *abgeschlossen*, wenn X die Menge aller Häufungspunkte von X enthält.

Innere Punkte und offene Mengen. 1. Ein Punkt $x_0 \in X$ heißt *innerer Punkt* von X, wenn es ein $\delta > 0$ gibt, so daß jedes $x \in \mathbb{K}$ mit $|x - x_0| < \delta$ in X liegt.

2. Jeder innere Punkt $x_0 \in X$ ist ein Häufungspunkt von X.

3. Die Menge X heißt *offen*, wenn jedes $x_0 \in X$ ein innerer Punkt von X ist.

Konvergenz vom Typ $x \to x_0$. Sind $X \subset \mathbb{K}$ eine Teilmenge, $x_0 \in \mathbb{K}$ ein Häufungspunkt von X, $y_0 \in \mathbb{L}$ sowie $f : X \to \mathbb{L}$ eine Funktion, dann gilt die Äquivalenz:

1. Für jedes $\varepsilon > 0$ existiert ein $\delta > 0$, so daß für alle $x \in X$ mit $0 < |x - x_0| \leq \delta$ stets $|f(x) - y_0| \leq \varepsilon$ gilt.

2. Für jede Folge (x_k) in $X \setminus \{x_0\}$ mit $\lim_{k\to\infty} x_k = x_0$ gilt $\lim_{k\to\infty} f(x_k) = y_0$.

In diesem Falle sagt man, daß *f für $x \to x_0$ gegen den Grenzwert y_0 konvergiert* und schreibt $\lim_{x\to x_0} f(x) = y_0$ oder $\lim_{x\to x_0} |f(x) - y_0| = 0$.

Man beachte, daß die Konvergenzbedingungen weder davon abhängen, ob f im Punkt $x_0 \in \mathbb{K}$ definiert ist oder nicht, das heißt, ob $x_0 \in X$ oder $x_0 \notin X$ gilt, noch vom Wert $f(x_0) \in \mathbb{L}$ im Falle $x_0 \in X$ abhängen.

Einseitige Konvergenz vom Typ $x \downarrow x_0$. Seien $X \subset \mathbb{R}$ eine Teilmenge, $x_0 \in \mathbb{R}$ ein Häufungspunkt von $X \cap \,]x_0, \infty[$, $y_0 \in \mathbb{L}$ sowie $f : X \to \mathbb{L}$ eine Funktion derart, daß für jedes $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, so daß für alle $x \in X$ mit $x_0 < x \leq x_0 + \delta$ stets $|f(x) - y_0| \leq \varepsilon$ gilt.

Dann spricht man davon, daß *f für $x \downarrow x_0$ gegen den rechtsseitigen Grenzwert y_0 konvergiert* und schreibt $\lim_{x\downarrow x_0} f(x) = y_0$ oder $\lim_{x\downarrow x_0} |f(x) - y_0| = 0$.

Einseitige Konvergenz vom Typ $x \uparrow x_0$. Seien $X \subset \mathbb{R}$ eine Teilmenge, $x_0 \in \mathbb{R}$ ein Häufungspunkt von $X \cap \,]-\infty, x_0[$, $y_0 \in \mathbb{L}$ sowie $f : X \to \mathbb{L}$ eine Funktion derart, daß für jedes $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, so daß für alle $x \in X$ mit $x_0 - \delta \leq x < x_0$ stets $|f(x) - y_0| \leq \varepsilon$ gilt.

Dann sagt man, daß *f für $x \uparrow x_0$ gegen den linksseitigen Grenzwert y_0 konvergiert* und schreibt $\lim_{x\uparrow x_0} f(x) = y_0$ oder $\lim_{x\uparrow x_0} |f(x) - y_0| = 0$.

Konvergenz vom Typ $x \to \infty$. Seien $X \subset \mathbb{R}$ eine nach oben unbeschränkte Teilmenge, $y_0 \in \mathbb{L}$ sowie $f : X \to \mathbb{L}$ eine Funktion derart, daß für jedes $\varepsilon > 0$ ein $b \in \mathbb{R}$ existiert, so daß für alle $x \in X$ mit $x \geq b$ stets $|f(x) - y_0| \leq \varepsilon$ gilt.

Dann spricht man davon, daß f *für* $x \to \infty$ *gegen den Grenzwert* y_0 *konvergiert* und schreibt $\lim_{x\to\infty} f(x) = y_0$ oder $\lim_{x\to\infty} |f(x) - y_0| = 0$.

Konvergenz vom Typ $x \to -\infty$. Seien $X \subset \mathbb{R}$ eine nach unten unbeschränkte Teilmenge, $y_0 \in \mathbb{L}$ sowie $f : X \to \mathbb{L}$ eine Funktion derart, daß für jedes $\varepsilon > 0$ ein $a \in \mathbb{R}$ existiert, so daß für alle $x \in X$ mit $x \leq a$ stets $|f(x) - y_0| \leq \varepsilon$ gilt.

Dann sagt man, daß f *für* $x \to -\infty$ *gegen den Grenzwert* y_0 *konvergiert* und schreibt $\lim_{x\to-\infty} f(x) = y_0$ oder $\lim_{x\to-\infty} |f(x) - y_0| = 0$.

Bestimmte Divergenz vom Typ $x \to x_0$. Seien $X \subset \mathbb{K}$ eine Teilmenge, $x_0 \in \mathbb{K}$ ein Häufungspunkt von X sowie $f : X \to \mathbb{R}$ eine Funktion.

1. Gibt es für jedes $c \in \mathbb{R}$ ein $\delta > 0$, so daß für alle $x \in X$ mit $0 < |x - x_0| \leq \delta$ stets $f(x) \geq c$ gilt, dann spricht man davon, daß f *für* $x \to x_0$ *gegen* ∞ *strebt* und schreibt $\lim_{x\to x_0} f(x) = \infty$.
2. Existiert für jedes $c \in \mathbb{R}$ ein $\delta > 0$, so daß für alle $x \in X$ mit $0 < |x - x_0| \leq \delta$ stets $f(x) \leq c$ gilt, dann sagt man, daß f *für* $x \to x_0$ *gegen* $-\infty$ *strebt* und schreibt $\lim_{x\to x_0} f(x) = -\infty$.

Bestimmte Divergenz vom Typ $x \downarrow x_0$. Seien $X \subset \mathbb{R}$ eine Teilmenge, $x_0 \in \mathbb{R}$ ein Häufungspunkt von $X \cap \,]x_0, \infty[$ sowie $f : X \to \mathbb{R}$ eine Funktion.

1. Gibt es für jedes $c \in \mathbb{R}$ ein $\delta > 0$, so daß für alle $x \in X$ mit $x_0 < x \leq x_0 + \delta$ stets $f(x) \geq c$ gilt, dann spricht man davon, daß f *für* $x \downarrow x_0$ *gegen* ∞ *strebt* und schreibt $\lim_{x\downarrow x_0} f(x) = \infty$.
2. Existiert für jedes $c \in \mathbb{R}$ ein $\delta > 0$, so daß für alle $x \in X$ mit $x_0 < x \leq x_0 + \delta$ stets $f(x) \leq c$ gilt, dann sagt man, daß f *für* $x \downarrow x_0$ *gegen* $-\infty$ *strebt* und schreibt $\lim_{x\downarrow x_0} f(x) = -\infty$.

Bestimmte Divergenz vom Typ $x \uparrow x_0$. Seien $X \subset \mathbb{R}$ eine Teilmenge, $x_0 \in \mathbb{R}$ ein Häufungspunkt von $X \cap \,]-\infty, x_0[$ sowie $f : X \to \mathbb{R}$ eine Funktion.

1. Gibt es für jedes $c \in \mathbb{R}$ ein $\delta > 0$, so daß für alle $x \in X$ mit $x_0 - \delta \leq x < x_0$ stets $f(x) \geq c$ gilt, dann spricht man davon, daß f *für* $x \uparrow x_0$ *gegen* ∞ *strebt* und schreibt $\lim_{x\uparrow x_0} f(x) = \infty$.
2. Existiert für jedes $c \in \mathbb{R}$ ein $\delta > 0$, so daß für alle $x \in X$ mit $x_0 - \delta \leq x < x_0$ stets $f(x) \leq c$ gilt, dann sagt man, daß f *für* $x \uparrow x_0$ *gegen* $-\infty$ *strebt* und schreibt $\lim_{x\uparrow x_0} f(x) = -\infty$.

Bestimmte Divergenz vom Typ $x \to \infty$. Seien $X \subset \mathbb{R}$ eine nach oben unbeschränkte Teilmenge sowie $f : X \to \mathbb{R}$ eine Funktion.

1. Gibt es für jedes $c \in \mathbb{R}$ ein $b \in \mathbb{R}$, so daß für alle $x \in X$ mit $x \geq b$ stets $f(x) \geq c$ gilt, dann spricht man davon, daß f *für* $x \to \infty$ *gegen* ∞ *strebt* und schreibt $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$.

2. Existiert für jedes $c \in \mathbb{R}$ ein $b \in \mathbb{R}$, so daß für alle $x \in X$ mit $x \geq b$ stets $f(x) \leq c$ gilt, dann sagt man, daß f *für* $x \to \infty$ *gegen* $-\infty$ *strebt* und schreibt $\lim_{x\to\infty} f(x) = -\infty$.

Bestimmte Divergenz vom Typ $x \to -\infty$. Seien $X \subset \mathbb{R}$ eine nach unten unbeschränkte Teilmenge sowie $f : X \to \mathbb{R}$ eine Funktion.

1. Gibt es für jedes $c \in \mathbb{R}$ ein $a \in \mathbb{R}$, so daß für alle $x \in X$ mit $x \leq a$ stets $f(x) \geq c$ gilt, dann spricht man davon, daß f *für* $x \to -\infty$ *gegen* ∞ *strebt* und schreibt $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \infty$.

2. Existiert für jedes $c \in \mathbb{R}$ ein $a \in \mathbb{R}$, so daß für alle $x \in X$ mit $x \leq a$ stets $f(x) \leq c$ gilt, dann sagt man, daß f *für* $x \to -\infty$ *gegen* $-\infty$ *strebt* und schreibt $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.

Rechenregeln. Zu den Konvergenzbegriffen vom Typ $x \downarrow x_0$ oder $x \uparrow x_0$ oder $x \to \pm\infty$ und zu den bestimmten Divergenzbegriffen gelten entsprechende Bemerkungen zur Terminologie und Äquivalenz der Formulierung in der Folgensprache. Ferner gelten zu allen Konvergenz- bzw. bestimmten Divergenzbegriffen von Funktionen Rechenregeln analog zu denen von Zahlenfolgen.

Treppenfunktionen und regulierte Funktionen. Sei $]a, b[\subset \mathbb{R}$ ein beschränktes oder unbeschränktes Intervall und $f : [a, b] \to \mathbb{L}$ eine Funktion.

1. Man bezeichnet f als *einfache* oder *Treppenfunktion*, wenn es eine endliche Folge $a = y_0 < y_1 < \cdots < y_{m-1} < y_m = b$ von Punkten aus $[a, b]$ gibt, so daß f für jedes $k \in \{1, \ldots, m\}$ jeweils auf dem offenen Intervall $]y_{k-1}, y_k[$ konstant ist.

2. Man nennt f eine *regulierte Funktion*, wenn f sowohl für jedes $x_0 \in [a, b[$ für $x \downarrow x_0$ gegen einen rechtsseitigen Grenzwert als auch für jedes $x_0 \in]a, b]$ für $x \uparrow x_0$ gegen einen linksseitigen Grenzwert konvergiert.

3. Sei das oben vorgegebene Intervall $[a, b] \subset \mathbb{R}$ beschränkt. Die Funktion f ist genau dann reguliert, wenn eine Folge (f_n) von Treppenfunktionen $f_n : [a, b] \to \mathbb{L}$ existiert, die gleichmäßig gegen f konvergiert.