Humboldt-Universität zu Berlin

Topologie I

Dr. Batu Güneysu

SS 2016

Das Manuskript wurde erstellt von Christopher Braune

Contents

Chapter 1

Mengentheoretische Topologie

1 Grundbegriffe

Wir werden im Wesentlichen dem Buch ‘Topology’ von Munkres (second edition) folgen; im zweiten Teil der Vorlesung werden wir auch dem Buch ‘Algebraic Topology’ von Hatcher[1] folgen.

18. April

Sei im folgenden X eine beliebige Menge und $\mathcal{P}(X)$ die Potenzmenge von X, also die Menge aller Teilmengen von X.

Definition 1.1
*Ein Mengensystem $\mathcal{T} \subset \mathcal{P}(X)$ heißt eine **`Topologie`** auf X, wenn folgende drei Bedingungen erfüllt sind:*

(Top1) *Es gilt $\emptyset, X \in \mathcal{T}$.*

(Top2) *Sind $U_i \in \mathcal{T}$ für alle $i \in I$ (mit I einer beliebigen Indexmenge), so auch $\bigcup_{i\in I} U_i \in \mathcal{T}$*
(d.h., beliebige Vereinigungen von Mengen aus in $\mathcal{T}$ sind wieder in $\mathcal{T}$.)

(Top3) *Sind $U, V \in \mathcal{T}$, so auch $U \cap V \in \mathcal{T}$ (d.h., endliche viele Schnitte von Mengen aus $\mathcal{T}$ sind wieder in $\mathcal{T}$.)*

*Die Mengen aus $\mathcal{T}$ heißen die **`offenen Teilmengen`** des topologischen Raumes $(X, \mathcal{T})$.*

Bemerkung 1.2
Wenn keine Gefahr der Verwechslung besteht, so unterdrückt man $\mathcal{T}$ in der Notation und spricht von einem “topologischen Raum X” und nennt die Elemente von $\mathcal{T}$ “die offenen Teilmengen von X”.

[1] Dieses Buch ist frei online erhültlich.

Beispiel 1.3
Topologien existieren auf jeder Menge: So ist etwa $\mathcal{T} := \mathcal{P}(X)$ eine Topologie auf X, die sogenanntee ***`diskrete Topologie auf`*** *X (in dieser Topologie ist also jede Teilmenge von X ist offen). Außerdem ist auch $\mathcal{T} := \{\emptyset, X\}$ eine Topologie auf X, die sogenannte* ***`antidiskrete Topologie auf`*** *X.*

Definition 1.4
Eine Abbildung $d\colon X \times X \to [0, \infty)$ heißt eine ***`Metrik auf`*** *X, falls für alle $x, y, z \in X$ gilt:*

(Met1) $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ *(d.h., d is nicht entartet)*

(Met2) $d(x, y) = d(y, x)$ *(Symmetrie)*

(Met3) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ *(Dreiecksungleichung).*

Es gilt dann automatisch auch die umgekehrte Dreiecksungleichung, d.h.

$$|d(x, y) - d(y, z)| \leq d(x, y) \quad \text{für alle } x, y, z \in X.$$

In obiger Situation heißt für $r > 0, x \in X$ die Teilmenge

$$B_d(x, r) := \{y \in X : d(x, y) < r\}$$

die `offene Kugel um` x `mit Radius` r. Dann ist

$$\mathcal{T}_d := \{U \subset X : \text{für alle } x \in U \text{ existiert ein } \varepsilon > 0 \text{ mit } B_d(x, \varepsilon) \subset U\}$$

eine Topologie auf X, denn:
(Top1): Dies ist trivialerweise erfüllt.
(Top2): Sei $U_i \in \mathcal{T}_d$ für alle $i \in I$ (mit I einer beliebigen Indexmenge). Sei $x \in \bigcup_i U_i$, etwa in U_1. Dann gibt es ein $\varepsilon > 0$ mit

$$B_d(x, \varepsilon) \subset U_1 \subset \bigcup_i U_i.$$

(Top3): Sei $U, V \in \mathcal{T}_d$. Sei $x \in U \cap V$. Dann gibt es $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$ mit $B_d(x, \varepsilon_1) \subset U$ und $B_d(x, \varepsilon_2) \subset V$. Setzt man nun $\varepsilon := \min(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$, so gilt

$$B_d(x, \min(\varepsilon_1, \varepsilon_2)) \subset U_1 \cap U_2.$$

Definition 1.5
Ein Paar (X, d) bestehend aus einer Menge X und einer Metrik d auf X heißt ***`metrischer Raum`****.*

Bemerkung 1.6
Wie wir oben gesehen haben, induziert also jede Metrik d auf X kanonisch die Topologie $\mathcal{T}_d$ auf X. Wenn nichts weiter gesagt wird, wird der gegebene metrische Raum mit der von der Metrik induzierten Topologie ausgestattet. In diesem Sinne sind metrische Räume immer topologische Räume.

Definition 1.7
*Ein topologischer Raum $(X, \mathcal{T})$ **metrisierbar**, wenn die Topologie $\mathcal{T}$ von einer Metrik auf X erzeugt wird, d.h., wenn eine Metrik d auf X existiert mit $\mathcal{T} = \mathcal{T}_d$.*

Zu bestimmen ob ein topologischer Raum metrisierbar ist, ist im Allgemeinen ein sehr schwieriges Problem. Wir werden später Kriterien dieser Art angeben.

Beispiel 1.8

i) *Auf jeder Menge existiert eine Metrik, etwa die diskrete Metrik*

$$d(x,y) = \begin{cases} 1 & , x \neq x \\ 0 & , x = y \end{cases}.$$

Diese Metrik induziert gerade die diskrete Topologie.

ii) *Die antidiskrete Topologie ist metrisierbar, genau dann wenn $|X| \leq 1$.*

iii) *Auf $\mathbb{R}^m$ wird durch*

$$d_{eukl.}(x,y) := \left(\sum_{i=1}^{m} |x_i - y_i| \right)^{\frac{1}{2}}$$

*eine Metrik erzeugt, die sogenannte **Euklidische Metrik**. Die Topologie $\mathcal{T}_{d_{eukl.}}$ heißt die **Standardtopologie auf** $\mathbb{R}^m$.*

Bemerkung 1.9
Wenn nichts weiter gesagt wird, wird $\mathbb{R}^m$ stets mit seiner Standardtopologie versehen.

Definition 1.10
*Seien $\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2$ Topologien auf X. Dann heißt $\mathcal{T}_1$ **feiner (bzw. gröber) als** $\mathcal{T}_2$, wenn $\mathcal{T}_2 \subset \mathcal{T}_1$ (bzw. $\mathcal{T}_1 \subset \mathcal{T}_2$) gilt.*

Beispiel 1.11
i) Die diskrete Topologie auf X ist feiner als jede andere Topologie auf X.
ii) Die antidiskrete Topologie auf X ist gröber als jede andere Topologie auf X.
iii) Im Allgemeinen besteht keine Beziehung dieser Art zwischen zwei beliebigen Topologien.

Offene Kugeln scheinen metrische Topologien zu erzeugen, dies motiviert die folgende Definition:

Definition 1.12
*Sei $\mathcal{B} \subset \mathcal{P}(X)$ ein Mengensystem. Dann heißt $\mathcal{B}$ **eine Basis auf** X, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:*

(B1) Zu jedem $x \in X$ existiert ein $B \in \mathcal{B}$ mit $x \in B$.

(B2) Zu je zwei $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ und $x \in B_1 \cap B_2$ existiert ein $B_3 \in \mathcal{B}$ mit $x \in B_3 \subset B_1 \cap B_2$.

In obiger Situation definieren wir weiters ein Mengensystem $\mathcal{T}_\mathcal{B} \subset \mathcal{P}(X)$ durch $U \in \mathcal{T}_\mathcal{B} \Leftrightarrow$ zu jedem $x \in U$ existiert ein $B \in \mathcal{B}$ mit $x \in B \subset U$. Dann ist $\mathcal{T}_\mathcal{B}$ eine Topologie auf X (Übung), die sogenannte `von` $\mathcal{B}$ `erzeugte Topologie`.

Definition 1.13
*Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum und $\mathcal{B} \subset \mathcal{P}(X)$. Dann heißt $\mathcal{B}$ eine **Basis von** $\mathcal{T}$, wenn $\mathcal{B}$ eine Basis auf X ist mit $\mathcal{T} = \mathcal{T}_\mathcal{B}$.*

Bemerkung 1.14
Sei (X, d) ein metrischer Raum. Es ist leicht zu sehen, dass

$$\mathcal{B}_d := \{\text{offene } d\text{-Bälle}\} = \{B_d(x, r) : x \in X, r > 0\}$$

eine Basis auf X ist, mit $\mathcal{T}_{\mathcal{B}_d} = \mathcal{T}_d$.

Theorem 1.15
Sei $\mathcal{B}$ eine Basis auf $X, U \subset X$. Dann ist $U \in \mathcal{T}_\mathcal{B}$ genau dann, wenn eine Indexmenge I sowie zu jedem $i \in I$ eine Menge $U_i \in \mathcal{B}$ existiert mit $U = \bigcup\limits_{i \in I} U_i$.

18. April

Proof

- $\Rightarrow$: Sei $U \in \mathcal{T}_\mathcal{B}$. Dann existiert für alle $x \in U$ ein $B_x \in \mathcal{B}$ mit $x \in B_x \subset U$. D.h., $U = \bigcup_{x \in U} B_x$.
- $\Leftarrow$: Sei $x \in U = \bigcup_i U_i$ mit $U_i \in B$. Dann gibt es ein $j \in I$ mit $x \in U_j \subset U$. Also gilt $U \in \mathcal{T}_\mathcal{B}$.
  Alternativ: Wir wissen: $U_i \in \mathcal{B} \subset \mathcal{T}_\mathcal{B}$. Dann gilt auch $\bigcup_i U_i \in \mathcal{T}_\mathcal{B}$, nach (Top2).

$\square$

Theorem 1.16 *(Kriterum für eine Basis)*
Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum, $\mathcal{C} \subset \mathcal{T}$ ein Mengensystem mit der folgenden Eigenschaft: Für alle $U \in \mathcal{T}$ und alle $x \in U$ existiert ein $C \in \mathcal{C}$ mit $x \in C \subset U$. Dann ist $\mathcal{C}$ eine Basis von $\mathcal{T}$, also $\mathcal{T} = \mathcal{T}_\mathcal{C}$.

Proof

1. $\mathcal{C}$ ist eine Basis auf X, denn:
   (B1) Wende Voraussetzung mit $U = X \in \mathcal{T}$ an.
   (B2) Seien $C_1, C_2 \in \mathcal{C},\ x \in C_1 \cap C_2$. Dann gilt $C_1 \cap C_2 \in \mathcal{T}$, also existiert $C \in \mathcal{C}$ mit $x \in C \subset C_1 \cap C_2$.

2. $\mathcal{T} = \mathcal{T}_{\mathcal{C}}$, denn:
   i) $U \in \mathcal{T},\ x \in U \implies \exists C \in \mathcal{C}$ mit $x \in C \subset U \implies U \in \mathcal{T}_{\mathcal{C}}$.
   ii) $U \in \mathcal{T}_{\mathcal{C}} \implies U = \bigcup_i U_i$ mit $U_i \in \mathcal{C}$, da $\mathcal{C}$ eine Basis ist $\implies U = \bigcup_i U_i \in \mathcal{T}$. □

Man kann Feinheit an Basen ablesen:

Theorem 1.17
Sei $\mathcal{B}_j$ eine Basis der Topologie $\mathcal{T}_j$ auf X $(j = 1, 2)$. Dann gilt:
$\mathcal{T}_1 \subset \mathcal{T}_2$, genau dann wenn für alle $x \in X$ und alle $B_1 \in \mathcal{B}_1$ mit $x \in B_1$ ein $B_2 \in \mathcal{B}_2$ existiert mit $x \in B_2 \subset B_1$.

Proof

⇒: Sei $x \in B_1 \in \mathcal{B}_1$. Da $\mathcal{B}_1 \subset \mathcal{T}_1 \subset \mathcal{T}_2$, existiert ein $B_2 \in \mathcal{T}_{\mathcal{B}_2} = \mathcal{T}_2$ mit $x \in B_2 \subset B_1$.

⇐: Sei $U_1 \in \mathcal{T}_1, x \in U_1$. Da $\mathcal{T}_1 = \mathcal{T}_{\mathcal{B}_1}$, gibt es ein $B_1 \in \mathcal{B}_1$ mit $x \in B_1 \subset U_1$. Nach Voraussetzung gibt es ein $B_2 \in \mathcal{B}_2$ mit $x \in B_2 \subset B_1 \subset U_1$. Also $U_1 \in \mathcal{T}_{\mathcal{B}_2} = \mathcal{T}_2$. □

Theorem 1.18
Seien d, d' Metriken auf X. Dann gilt $\mathcal{T}_d \subset \mathcal{T}_{d'}$, genau dann wenn für alle $x \in X$ und alle $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert mit $B_{d'}(x, \delta) \subset B_d(x, \varepsilon)$.

Proof
Die jeweiligen offenen Bälle sind Basen.

⇒: Es existiert ein Ball $B_{d'}(x', \varepsilon')$ mit $B_{d'}(x', \varepsilon') \subset B_d(x, \varepsilon)$. Daraus folgt $B_{d'}(x, \delta) \subset B_{d'}(x', \varepsilon')$, mit $\delta := \varepsilon' - d(x, x')$.

⇐: Sei $y \in X,\ \varepsilon > 0,\ x \in X$ beliebig mit $y \in B_d(x, \varepsilon)$. Zu zeigen ist die Existenz eines offenen d'-Balles B' mit $y \in B' \subset B_d(x, \varepsilon)$. Für $\tilde{\varepsilon} := \varepsilon - d(x, y)$ gilt jedenfalls $y \in B_d(y, \tilde{\varepsilon}) \subset B_d(x, \varepsilon)$. Nach Voraussetzung existiert ein $\delta > 0$ mit $y \in B_{d'}(y, \delta) \subset B_d(y, \tilde{\varepsilon}) \subset B_d(y, \varepsilon)$, was zu zeigen war. □

Definition 1.19
$\mathcal{S} \subset \mathcal{P}(X)$ heißt ***eine Subbasis auf*** *X, falls*

$$X = \bigcup_{S \in \mathcal{S}} S,$$

d.h., falls jedes $x \in X$ in einem $S \in \mathcal{S}$ liegt. In dieser Situation definieren wir $\mathcal{T}_{\mathcal{S}} \subset \mathcal{P}(X)$ wie folgt: $U \in \mathcal{T}_{\mathcal{S}} \Leftrightarrow U$ lässt sich schreiben als Vereinigung von Mengen der Art $\bigcap_{i=1}^n S_i$, wobei $n \in \mathbb{N},\ S_1, \ldots, S_n \in \mathcal{S}$.

Lemma 1.20
Sei $\mathcal{S}$ eine Subbasis auf X. Dann ist

$$\mathcal{B}_{\mathcal{S}} := \left\{ \bigcap_{i=1}^n S_i : n \in \mathbb{N},\ S_1, \ldots, S_n \in \mathcal{S} \right\}$$

eine Basis auf X mit $\mathcal{T}_{\mathcal{B}_{\mathcal{S}}} = \mathcal{T}_{\mathcal{S}}$. Insbesondere ist also $\mathcal{T}_{\mathcal{S}}$ eine Topologie auf X.

Proof

(B1) Folgt aus der Definition: $X = \bigcup_{S \in \mathcal{S}} S$.

(B2) Seien $\bigcap\limits_{i=1}^{n} S_i, \bigcap\limits_{i=1}^{\tilde{n}} \tilde{S}_i \in \mathcal{B}_{\mathcal{S}}$ und $x \in (\bigcap\limits_{i=1}^{n} S_i) \cap (\bigcap\limits_{i=1}^{\tilde{n}} \tilde{S}_i)$.

(B2) folgt dann direkt aus $(\bigcap\limits_{i=1}^{n} S_i) \cap (\bigcap\limits_{i=1}^{\tilde{n}} \tilde{S}_i) \in \mathcal{B}_{\mathcal{S}}$. $\square$

2 Konstruktionsprinzipien für topologische Räume

2.1 Teilräume

Definition und Satz 1.21
Sei $(X, \mathcal{T})$ ein Topologischer Raum und sei $Y \subset X$ beliebig. Dann ist

$$\mathcal{T}_Y := \{Y \cap U : U \in \mathcal{T}\}$$

eine Topologie auf Y, die sogenannte ***Teilraumtopologie auf*** *Y (bezüglich $\mathcal{T}$).*

Proof

(Top1) $\emptyset = \emptyset \cap Y, Y = X \cap Y$ und $\emptyset, X \in \mathcal{T}$ nach Voraussetzung $\implies \emptyset, Y \in \mathcal{T}_Y$.

(Top2) Sind $U_i \in \mathcal{T}_Y$ für alle $i \in I$, so gibt es zu jedem $i \in I$ ein $\tilde{U}_i \in \mathcal{T}$ mit $U_i = \tilde{U}_i \cap Y$, also $\bigcup_i U_i = \left(\bigcup_i \tilde{U}_i\right) \cap Y \in \mathcal{T}_Y$.

(Top3) Ein analoges mengentheoretisches Argument wie für (Top2). □

Bemerkung 1.22

1. *Mengen in $\mathcal{T}_Y$ können sehr wild relativ zu $\mathcal{T}$ sein.*
2. *Sei $X \equiv (X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum und $Y \subset X$. Dann sagen wir auch U* ***ist offen in*** *Y, falls $U \in \mathcal{T}_Y$. Analog sagen wir U* ***ist offen in*** *X, falls $U \in \mathcal{T}$.*

Wenn nichts anderes dazugesagt wird, statten wir alle Teilmengen des $\mathbb{R}^m$ mit der Teilraumtopologie bezüglich der Standardtopologie des $\mathbb{R}^m$ aus.

Lemma 1.23
Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum und $Y \in \mathcal{T}$. Dann gilt für alle $U \in \mathcal{T}_Y$ auch $U \in \mathcal{T}$ (also in obiger Terminologie: Y offen in X und U offen in $Y \implies U$ offen in X).

Proof
Sei $U \in \mathcal{T}_Y$. Dann gibt es ein $\tilde{U} \in \mathcal{T}$ mit $\tilde{U} \cap Y = U$. Da aber $\tilde{U}, Y \in \mathcal{T}$, ist dann auch $U = \tilde{U} \cap Y \in \mathcal{T}$. □

Lemma 1.24 *(Basen induzieren Teilbasen)*
Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum, $Y \subset X$ beliebig und $\mathcal{B}$ eine Basis von $\mathcal{T}$.
Dann ist $\mathcal{B}_Y = \{Y \cap B : B \in B\}$ eine Basis von $\mathcal{T}_Y$.

Proof Trivial. □

2.2 Quotientenräume

Definition und Satz 1.25
Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum, A eine beliebige Menge und $f\colon X \to A$ eine beliebige Abbildung. Dann ist

$$\mathcal{T}_f = \{U \subset A : f^{-1}(U) \in \mathcal{T}\}$$

eine Topologie auf A, die sogenannte ***von $\mathcal{T}$ und f erzeugte Topologie****.*

Proof
Der Beweis ist leicht und folgt sofort aus rein mengentheoretischen Argumenten:

(Top1) $f^{-1}(A) = X, f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$.

(Top2) $f^{-1}(\bigcup_i U_i) = \bigcup_i f^{-1}(U_i)$.

(Top3) $f^{-1}(U_1 \cap U_2) = f^{-1}(U_1) \cap f^{-1}(U_2)$. □

25. April

Beispiel 1.26

1. *Sei $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf X und ${}^X/_\sim$ die Menge der zugehörigen Äquivalenzklassen, sowie*

   $$\pi_\sim\colon X \to {}^X/_\sim, \quad x \mapsto [x]_\sim$$

   die kanonische Projektion. Ist nun $\mathcal{T}$ eine Topologie auf X, so heißt die oben definierte Topologie $\mathcal{T}_{\pi_\sim}$ die ***Quotiententopologie*** *auf ${}^X/_\sim$.*

2. *Sei die Sphäre $S^m \subset \mathbb{R}^{m+1}$ definiert durch*

   $$S^m := \left\{ x \in \mathbb{R}^{m+1} : \sum_{i=1}^{m+1} x_i^2 = 1 \right\}.$$

   Auf S^m sei $x \sim y$ definiert durch $x \sim y \Leftrightarrow x = \pm y$; dann ist $\mathbb{R}P^m := {}^{S^m}/_\sim$ der $m-$dimensionale reell projektive Raum; er wird üblicherweise versehen mit der Quotiententopologie $\mathcal{T}_{\pi_\sim}$.

3. *Sei $X := [0,1] \times [0,1] \subset \mathbb{R}^2$; auf X sei $(x,y) \sim (x',y') \Leftrightarrow (x,y) = (x',y')$ oder $\{x,x'\} = \{0,1\}$ und $y+y' = 1$; dann ist ${}^X/_\sim$ das Möbiusband; es wird üblichwerweise versehen mit der Quotiententopologie $\mathcal{T}_{\pi_\sim}$.*

2.3 Produkttopologie

Sei J eine beliebige Indexmenge und zu jedem $\alpha \in J$ sei $(X_\alpha, \mathcal{T}_\alpha)$ ein topologischer Raum und

$$\pi_\alpha \colon \prod_{\beta \in J} X_\beta \to X_\alpha, \;\; (x_\beta)_{\beta \in J} \mapsto x_\alpha$$

die kanonische Projektion.

Satz und Definition 1.27 *Mit* $\mathcal{S}_{X_\beta} := \{\pi_\beta^{-1}(U_\beta) : U_\beta \in \mathcal{T}_\beta\}$ *ist*

$$\mathcal{S}_{\prod_\beta X_\beta} := \bigcup_{\beta \in J} \mathcal{S}_{X_\beta}$$

eine Subbasis auf $\prod_\alpha X_\alpha$. *Die davon erzeugt Topologie* $\mathcal{T}_{\prod_\alpha X_\alpha}$ *auf* $\prod_\alpha X_\alpha$ *heißt die* ***Produkttopologie*** *auf* $\prod_\alpha X_\alpha$. *Eine Basis dieser Topologie ist gegeben durch*

$$\mathcal{B}_{\prod_\alpha X_\alpha} := \left\{ \prod_{\beta \in J} U_\beta \; : \; U_\beta \in \mathcal{T}_\beta \text{ für alle } \beta \in J, \; U_\beta = X_\beta \text{ für alle bis auf endlich viele } \beta \in J \right\}.$$

Proof 1. $\mathcal{S}_{\prod_\alpha X_\alpha}$ ist sicherlich eine Subbasis auf dem Produktraum.

2. Noch zu zeigen ist $\mathcal{B}_{\prod_\alpha X_\alpha} = \mathcal{B}_{\mathcal{S}_{\prod_\alpha X_\alpha}}$ $(*)$.
Hierzu stellen wir fest, dass $\mathcal{B}_{\mathcal{S}_{\prod_\alpha X_\alpha}} = \{\pi_{\beta_1}^{-1}(U_{\beta_1}) \cap \ldots \cap \pi_{\beta_n}^{-1}(U_{\beta_n}) : n \in \mathbb{N}, \; \beta_1, \ldots, \beta_n \in J, \; \beta_i \neq \beta_j \text{ für } i \neq j, U_{\beta_j} \in \mathcal{T}_j \; \forall j = 1, \ldots, n\}$. Daraus kann man $(*)$ ablesen, denn:
$\mathcal{B}_{\prod_\alpha X_\alpha} \subset \mathcal{B}_{\mathcal{S}_{\prod_\alpha X_\alpha}}$: dies ist klar
$\mathcal{B}_{\mathcal{S}_{\prod_\alpha X_\alpha}} \subset \mathcal{B}_{\prod_\alpha X_\alpha}$: die folgt, indem man setzt $U_\beta := \{U_{\beta_j}$, falls $\beta = \beta_j$ für ein $j = 1, \ldots, n\}$. □

Bemerkung 1.28

1. *Es gibt außer der Produkttopologie noch eine weitere kanonische Topologie auf* $\prod_\alpha X_\alpha$*: Sei hierzu*

$$\mathcal{B}^{Box}_{\prod_\alpha X_\alpha} := \left\{ \prod_{\beta \in J} U_\beta : U_\beta \in \mathcal{T}_\beta \;\text{ für alle }\; \beta \in J \right\}.$$

Es ist leicht zu sehen, dass dies eine Basis auf $\prod_\alpha X_\alpha$ *ist. Die induzierte Topologie* $\mathcal{T}^{Box}_{\prod_\alpha X_\alpha}$ *heißt* ***Boxtopologie*** *auf* $\prod_\alpha X_\alpha$.

2. *Falls* J *endlich ist, so gilt offensichtlich* $\mathcal{T}_{\prod_\alpha X_\alpha} = \mathcal{T}^{Box}_{\prod_\alpha X_\alpha}$.

3. *Im Allgemeinen gilt* $\mathcal{T}^{Box}_{\prod_\alpha X_\alpha} \supset \mathcal{T}_{\prod_\alpha X_\alpha}$. *Tatsächlich hat die Boxtopologie so viele offene Mengen, dass dies zu einigen pathologische Eigenschaften der Boxtopologie führt (so werden wir etwas später sehen dass unendliche Produkte kompakter topologischer Räume nicht einmal lokalkompakt sein brauchen in der Boxtopologie, aber sogar kompakt sind in der Produkttopologie).*

Beispiel 1.29
Es ist leicht zu sehen, dass die Standardtopologie auf $\mathbb{R}^m$ *übereinstimmt mit der Produkttopologie auf* $\mathbb{R}^m = \mathbb{R}^1 \times \ldots \times \mathbb{R}^1$*, wobei natürlich jeweils* $\mathbb{R}^1$ *mit der Standardtopologie versehen ist.*

Theorem 1.30
Sei $(X_\alpha, \mathcal{T}_\alpha)$ *ein topologischer Raum für jedes* $\alpha \in J$*, und sei jeweils* $(A_\alpha, (\mathcal{T}_\alpha)_{A_\alpha}) \subset (X_\alpha, \mathcal{T}_\alpha)$ *ein Teilraum (insbesondere also selbst ein topologischer Raum). Dann stimmt auf* $\prod_\alpha A_\alpha$ *die Produkttopologie mit der Teilraumtopologie* $\prod_\alpha A_\alpha \subset \prod_\alpha X_\alpha$ *überein, wobei* $\prod_\alpha X_\alpha$ *mit der Produkttopologie versehen ist.*

Proof
Uebung. $\square$

Beispiel 1.31
Sei $T^m := S^1 \times \ldots \times S^1 \subset \mathbb{R}^{2m}$ *der Standardtorus (wobei also* $S^1 \subset \mathbb{R}^2$ *mit der Teilraumtopologie ausgestattet wird). Es ist also nach den obigen Resultaten egal, ob man* T^m *die Produkttopologie, oder die Teilraumtopologie* $\subset \mathbb{R}^{2m}$ *gibt.*

3 Abgeschlossene Mengen

Definition 1.32
Sei $X \equiv (X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum. Dann heißt $A \subset X$ **abgeschlossen** *(bezüglich $\mathcal{T}$), wenn $X \backslash A$ offen (bezüglich $\mathcal{T}$) ist.*

Beispiel 1.33

1. *Ist X ein topologischer Raum, so ist X selbst abgeschlossen in der zugrundeliegenden Topolgie.*
2. *Intervalle der Art $[a, b] \subset \mathbb{R}$, $a < b$ reell, sind abgeschlossen: $X \backslash [a, b] = (-\infty, a) \cup (b, \infty)$ ist offen.*
3. *Intervalle der Art $[a, \infty) \subset \mathbb{R}$, a reell, sind abgeschlossen.*
4. *Intervalle der Art $[a, b) \subset \mathbb{R}$, a, b reell sind weder offen noch abgeschlossen.*
5. *Sei (X, d) ein metrischer Raum. Dann ist $\bar{B}_d(x, r) := \{y \in X : d(x, y) \leq r\}$ abgeschlossen.*

Theorem 1.34
Sei X ein topologischer Raum. Dann gilt:

1. *$\emptyset, X$ sind abgeschlossen.*
2. *Beliebige Schnitte abgeschlossener Mengen sind abgeschlossen.*
3. *Endliche Vereinigungen abgeschlossener Mengen sind abgeschlossen.*

Proof
Für eine Teilmenge $A \subset X$ bezeichne im Beweis $A^c := X \setminus A$ stets das Komplement von A in X.

1. $X, \emptyset$ sind offen $\implies \emptyset = X \backslash X, X = X \backslash \emptyset$ sind abgeschlossen.
2. Sei I eine beliebige Indexmenge, U_i abgeschlossen für alle $i \in I$. Dann ist U_i^c offen, insbesondere ist also auch $\bigcup\limits_{i \in I} U_i^c$ offen.
   Nach den De Morganschen Gesetzen also:
   $\bigcap\limits_{i \in I} U_i = \big(\bigcup\limits_{i \in I} U_i^c\big)^c$, der Schnitt ist also abgeschlossen.
3. Seien $U_1, U_2, ..., U_n$ abgeschlossen. Dann gilt wieder nach den De Morganschen Gesetzen:
   $\bigcup\limits_{1 \leq i \leq n} U_i = \big(\bigcap\limits_{1 \leq i \leq n} U_i^c\big)^c$, und endliche Schnitte offener Mengen sind offen. $\square$

Wir können Topologien also genauso gut durch die Angabe ihrer abgeschlossenen Mengen charakterisieren. Ist etwa $\tilde{\mathcal{T}} \subset \mathcal{P}(X)$ ein Mengensystem ("abgeschlossene Mengen"), das die Axiome 1,2 und 3 aus Theorem 1.34 erfüllt, dann existiert offensichtlich genau eine Topologie $\mathcal{T}$ auf X mit $\tilde{\mathcal{T}} = \{$abgeschlossen Mengen bzgl. $\mathcal{T}\}$.

27. April

Analog zu den offenen Mengen werden wir die folgende Terminologie verwenden:

Bemerkung 1.35
Ist X ein topologischer Raum und $Y \subset X$ eine beliebige Teimenge, so nennen wir $A \subset Y$ **`abgeschlossen in`** *Y, falls A abgeschlossen in der Teilraumtopologie von Y ist, und Y heißt* **`abgeschlossen in`** *X, falls A abgeschlossen in der Topologie von X ist.*

Theorem 1.36
Sei X ein topologischer Raum, $Y \subset X$ ein Teilraum, $A \subset Y$. Dann ist A abgeschlossen in Y, genau dann wenn $A = Y \cap C$ für eine in X abgeschlossene Menge $C \subset X$ gilt.

Proof

$\Rightarrow$: $Y \backslash A$ ist offen in $Y \implies Y \backslash A = Y \cap U$ mit $U \subset X$ offen $\implies A = Y \cap (X \backslash U)$ wobei $X \backslash U =: C$ abgeschlossen in X ist.

$\Leftarrow$: $X \backslash C$ ist offen in $X \implies (X \backslash C) \cap Y = Y \backslash A$ ist offen in Y. □

Theorem 1.37
Sei X ein topologischer Raum, $Y \subset X$ abgeschlossen. Dann ist $A \subset Y$ abgeschlossen in Y, genau dann wenn A abgeschlossen in X ist.

Proof Leicht. □

Definition 1.38 *Sei X ein topologischer Raum, und $A \subset X$.*

i) Das **`Innere`** *$\mathring{A}$ von A ist definiert durch* $\mathring{A} = \bigcup_{\substack{U \subset A \\ U \text{ offen in } X}} U.$

ii) Der **`Abschluss`** *$\bar{A}$ von A ist definiert durch* $\bar{A} = \bigcap_{\substack{F \supset A \\ F \text{ abgeschl. in } X}} F$

Bemerkung 1.39

i) $\mathring{A}$ ist offen in X, $\bar{A}$ ist abgeschlossen in X und $\mathring{A} \subset A \subset \bar{A}$.

ii) $\mathring{A}$ ist die größte offene Teilmenge von X, die in A enthalten ist, und $\bar{A}$ ist die kleinste Teilmenge von X, die A enthält.

iii) $A \subset B \implies \bar{A} \subset \bar{B}$ *und* $\mathring{A} \subset \mathring{B}$.

iv) A *ist offen* $\Leftrightarrow A = \mathring{A}$
A *ist abgeschlossen* $\Leftrightarrow A = \bar{A}$.

v) *Sei* (X, d) *ein metrischer Raum,* $r > 0$, $x \in X$. *Es gilt im Allgemeinen nur* $\overline{B_d(x,r)} \subset \bar{B}_d(x,r)$, *was aus* $B_d(x,r) \subset \bar{B}_d(x,r) \implies \overline{B_d(x,r)} \subset \bar{B}_d(x,r)$ *folgt. Ist z.B.* X *eine Menge die mindestens die beiden voneinander verschiedenen Elemente* x, y *enthält, und ist* d *die diskrete Metrik auf* X, *so gilt* $\bar{B}_d(x,1) = \{y, x\} \neq \{x\} = \overline{B_d(x,1)}$.

Oft ist auch folgende einfache Feststellung nützlich: Ist $A \subset X$ ein Teilraum und $Y \subset A$, so ist der Abschluss von Y in A gerader der Abschluss von Y in X geschnitten mit A. Wie werden für diesen Sachverhalt oft

$$\bar{Y}^A = \bar{Y}^X \cap A.$$

schreiben. Dies folgt leicht aus der Definition des Abschlusses und der Teilraumtopologie.

Definition 1.40
Sei X *ein topologischer Raum,* $x \in X$. *Dann heißt* $U \subset X$ *eine* **`Umgebung von`** x, *falls* $x \in U$ *gilt und* U *offen ist.*

Theorem 1.41
Sei X *ein topologischer Raum,* $A \subset X$, $x \in A$. *Dann gelten folgende Aussagen:*

i) *Es gilt* $x \in \bar{A}$, *genau dann wenn jede Umgebung* U *von* x *einen nichtleeren Schnitt mit* A *hat.*

ii) *Sei* $\mathcal{B}$ *eine Basis der Topologie auf* X. *Dann ist* $x \in \bar{A}$, *genau dann wenn jede Umgebung* $U \in \mathcal{B}$ *von* x *einen nichtleeren Schnitt mit* A *hat.*

Proof

1. Wir zeigen: $x \notin \bar{A} \Leftrightarrow$ es existiert eine Umgebung U von x mit $U \cap A = \emptyset$.

   $\Rightarrow$: Man setze einfach $U = X \backslash \bar{A}$.

   $\Leftarrow$: $X \backslash U$ abgeschlossen ist mit $X \backslash U \supset A$; dies zeigt $X \backslash U = \overline{X \backslash U} \supset \bar{A}$, also $x \notin \bar{A}$.

2. $\Rightarrow$: Diese Aussage folgt aus Teil i).

   $\Leftarrow$: Sei U eine beliebige Umgebung von x. Dann gibt es ein $B \in \mathcal{B}$ mit $x \in B \subset U$. Nach Voraussetzung hat B nichtleeren Schnitt mit A, also hat auch U nichtleeren Schnitt mit A. Nutze nun Teil i). $\square$

Theorem 1.42
Sei J eine beliebige Indexmenge, und zu jedem $\alpha \in J$ jeweils X_α ein topologischer Raum, und sei $A_\alpha \subset X_\alpha$. Dann gilt: $\prod_{\alpha\in J} \bar{A}_\alpha = \overline{\prod_{\alpha\in J} A_\alpha}$, wobei $\prod_{\alpha\in J} X_\alpha$ mit der Produkttopologie versehen ist und $\prod_{\alpha\in J} A_\alpha$ als Teilmenge von $\prod_{\alpha\in J} X_\alpha$ betrachtet wird.

Proof

- $\subset$: Sei $x \in \prod_{\alpha\in J} \bar{A}_\alpha$ und sei $U = \prod_\alpha U_\alpha$ ein Element der kanonischen Basis der Produkttopologie, mit $x \in U \implies \forall\alpha\exists y_\alpha \in U_\alpha \cap A_\alpha \implies y := (y_\alpha)_{\alpha\in J} \in U \cap (\prod_{\alpha\in J} A_\alpha) \implies x \in \overline{\prod_{\alpha\in J} A_\alpha}$.

- $\supset$: Sei $x = (x_\alpha) \in \overline{\prod_{\alpha\in J} A_\alpha}$. Zu jedem $\beta \in J$ sei $V_\beta \subset X_\beta$ eine beliebige Umgebung von $x_\beta \implies \pi_\beta^{-1}(V_\beta) \subset \prod_{\alpha\in J} X_\alpha$ ist eine Umgebung von $x \implies \exists y = (y_\alpha) \in (\prod_\alpha A_\alpha) \cap \pi_\beta^{-1}(V_\beta) \implies y_\beta \in A_\beta \cap V_\beta \implies x_\beta \in \bar{A}_\beta$. □

Definition 1.43
Sei $X \equiv (X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum, $A \subset X$, $x \in X$. Dann heißt x ein ***Häufungspunkt von*** *A, falls für jede Umgebung U von x die Menge $U \cap A$ einen von x verschiedenen Punkt enthält.*

Bemerkung 1.44
In obiger Situation ist x genau dann ein Häufungspunkt (HP) von A, wenn $x \in \overline{A\backslash\{x\}}$ gilt.

Beispiel 1.45
Sei $A := [a, b) \subset \mathbb{R}$ mit a, b reell. Dann ist $\{$HP'e von $A\} = [a, b]$.

Theorem 1.46
Sei X ein topologischer Raum, $A \subset X$. Dann ist $\bar{A} = A \cup \{$HP'e von $A\}$.

Proof
Die Inklusion $\bar{A} \subset A \cup \{$HP'e von $A\}$ sieht man wie folgt: Zum einen gilt $A \subset \bar{A}$. Ist hingegen x ein HP von A, so enthält jede Umgebung U von x einen von x verschiednen Punkt aus A, d.h. U hat einen nichtleeren Schnitt mit A, also ist $x \in \bar{A}$.
Wir müssen noch $\bar{A} \subset A \cup \{$HP'e von$A\}$ zeigen: Sei $x \in \bar{A}$. Falls $x \in A$, so ist nichts weiter zu tun. Also sei nun $x \notin A$. Dann hat jede Umgebung von x einen nichtleeren Schnitt mit $A\backslash\{x\}$. Per Definition ist also x Häufungspunkt von A. □

Da eine Teilmenge A eines topologischen Raumes genau dann abgeschlossen ist, wenn $A = \bar{A}$ gilt, folgt:

Korollar 1.47
Sei X ein topologischer Raum, $A \subset X$. Dann ist A abgeschlossen, genau dann wenn A all seine Häufungspunkte enthält.

Definition 1.48
Sei X ein topologische Raum, $A \subset X$. Dann ist der **Rand** *∂A von A definiert durch $\partial A = \bar{A} \backslash \mathring{A}$.*

Theorem 1.49
Sei X ein topologischer Raum, $A \subset X$. Dann gilt:

i) $\bar{A} = \mathring{A} \sqcup \partial A$

ii) $\partial A = \emptyset \Leftrightarrow A$ *ist offen und abgeschlossen*

iii) A *ist offen* $\Leftrightarrow \partial A = \bar{A} \backslash A$

Proof

i) $\mathring{A} \cup \partial A = \mathring{A} \cup (\bar{A} \backslash \mathring{A}) = \mathring{A} \cup \bar{A} = \bar{A}$, da $\mathring{A} \subset \bar{A}$.
$\partial A \cap \mathring{A} = (\bar{A} \backslash \mathring{A}) \cap \mathring{A} = \emptyset$.

ii) $\partial A = \emptyset \Leftrightarrow \bar{A} = \mathring{A} \Leftrightarrow \bar{A} = A = \mathring{A}$, wegen (i) und $\mathring{A} \subset A \subset \bar{A}$.

iii) A ist offen $\Leftrightarrow A = \mathring{A} \Leftrightarrow \bar{A} \backslash \mathring{A} = \bar{A} \backslash A \Leftrightarrow \partial A = \bar{A} \backslash A$, wegen $\mathring{A}, A \subset \bar{A}$. $\square$

4 Konvergenz und Hausdorffräume

Definition 1.50
Sei X ein topologischer Raum, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ eine Folge, und $x \in X$. Dann sagen wir x_n **konvergiert gegen** *x* **für** *$n \to \infty$ (in Zeichen: $x_n \to x$ für $n \to \infty$), falls zu jeder Umgebung U von X ein $N(U) \in \mathbb{N}$ existiert, so dass $x_n \in U$ für alle $n \geq N(U)$.*

Bemerkung 1.51
Im Allgemeinen haben Folgen in topologischen Räumen mehr als nur einen Grenzwert. Die manchmal dennoch benutzte Notation $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ ist dann sinnlos; am ehesten würde vielleicht die Notation $x \in \lim\limits_{n\to\infty} x_n$ Sinn machen.

Dies ist eine der Motivationen für die folgende Definition:

Definition 1.52
Ein topologischer Raum X heißt ein **Hausdorffraum**, *wenn zu allen $x, y \in X$ mit $x \neq y$ Umgebungen U von x und V von y existieren mit $U \cap V = \emptyset$.*

2.Mai

Theorem 1.53
Sei X ein Hausdorffraum. Dann gelten folgende Aussagen:

i) Alle einelementigen Teilmengen von X sind abgeschlossen.

ii) Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in X, $x, y \in X$ mit $x_n \to x$ und $x_n \to y$. Dann gilt $x = y$.

Proof

i) Sei $x \in X$. Zu zeigen ist $\overline{\{x\}} \subset \{x\}$, d.h. $X \backslash \{x\} \subset X \backslash \overline{\{x\}}$. Sei hierzu $y \in X \backslash \{x\}$. Es existiert eine Umgebung U von y und W von x mit $U \cap W = \emptyset \implies y \notin \overline{\{x\}}$.

ii) Angenommen $y \neq x$. Dann existieren Umgebungen U von x und W von y mit $U \cap W = \emptyset$. Es gibt ein $N(U) \in \mathbb{N}$, so dass für alle $n \geq N(U)$ gilt $x_n \in U$. Analog gibt es ein $N(W) \in \mathbb{N}$, so dass für alle $n \geq N(W)$ gilt $x_n \in W$. Dann gilt aber für $N := \max(N(U), N(V))$, dass $x_N \in U$ und $x_N \in V$, also $x_N \in U \cap V = \emptyset$. Widerspruch! □

Definition 1.54
*Topologische Räume, in denen die Aussage i) des vorherigen Satzes stimmt (also in denen alle einelementigen Teilmengen abgeschlossen sind), nennt man T_1***-Räume.** *Hausdorffräume nennt man auch T_2***-Räume.**

So ist etwa $\mathbb{R}$ mit der aus der Übung bekannten kofinitien Topologie T_1, aber nicht T_2.

Lemma 1.55
Jeder metrisierbare topologische Raum ist ein Hausdorffraum.

Proof
Sei d Metrik auf X, so dass die Topologie auf X durch d erzeugt wird. Seien $x, y \in X$ beliebig, $x \neq y$. Setze $r := \frac{d(x,y)}{2}$. Dann sind $B_d(x,r)$ und $B_d(y,r)$ Umgebungen von x beziehungsweise y. Es gilt $B_d(x,r) \cap B_d(y,r) = \emptyset$, denn für alle $z \in B_d(x,r)$ gilt

$$d(y,z) \geq |d(y,x) - d(x,z)| = d(y,z) - d(x,z) > 2r - r = r$$

nach der umgekehrten Dreiecksungleichung, also $z \notin B_d(y,r)$. □

Theorem 1.56 *Es gelten folgende Aussagen:*

i) Teilräume von Hausdorffräumen sind Hausdorffräume.

ii) Sei X ein topologischer Raum. Dann ist X ein Hausdorffraum, genau dann wenn $\Delta_X := \{(x,x) : x \in X\} \subset X \times X$ in der Produkttopologie abgeschlossen ist.

iii) Sei J eine beliebige Indexmenge und X_α $(\alpha \in J)$ jeweils ein topologischer Raum. Dann ist $\prod_{\alpha \in J} X_\alpha$ ein Hausdorffraum in der Produkttopologie, genau dann wenn X_α für alle $\alpha \in J$ Hausdorffräume sind.

Proof
Teil i) ist trivial, der Rest wird in der Übung bewiesen. □

5 Stetige Funktionen

Definition 1.57
*Seien X, Y topologische Räume. Dann heißt eine Abbildung $f\colon X \to Y$ **stetig**, falls für alle offene Teilmengen $V \subset Y$ die Menge $f^{-1}(V) \subset X$ offen ist.*

Lemma 1.58
Seien X, Y topologische Räume und sei $\mathcal{S}$ eine Subbasis der Topologie von Y. Dann ist $f\colon X \to Y$ stetig, genau dann wenn für alle $S \in \mathcal{S}$ die Menge $f^{-1}(S) \subset X$ offen ist.

Proof

$\Rightarrow$: trivial.

$\Leftarrow$: Sei $V \subset Y$. Dann existiert eine Indexmenge J und zu jedem $\alpha \in J$ eine Zahl $n_\alpha \in \mathbb{N}$, sowie $S_{\alpha,1}, \dots, S_{\alpha,n_\alpha} \in \mathcal{S}$ mit $V = \bigcup_{\alpha \in J} \bigcap_{j=1}^{n_\alpha} S_{\alpha,j} \implies f^{-1}(V) = \bigcup_\alpha \bigcap_j f^{-1}(S_{\alpha,j})$ mit $f^{-1}(S_{\alpha,j})$ offen. □

Theorem 1.59
Seien X, Y topologische Räume und $f\colon X \to Y$ eine beliebige Abbildung. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

i) f ist stetig.

ii) Für jede Teilmenge $A \subset X$ gilt $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$.

iii) Für jede abgeschlossene Teilmenge $A \subset Y$ ist $f^{-1}(A) \subset X$ abgeschlossen.

iv) Für jedes $x \in X$ und jede Umgebung $V \subset Y$ von $f(x)$ existiert eine Umgebung $U \subset X$ von x mit $f(U) \subset V$.

Proof
Wir zeigen i) $\implies$ ii) $\implies$ iii) $\implies$ i), i)$\Leftrightarrow$iv)

i)$\Rightarrow$ii): Sei $x \in \bar{A}$. Zu zeigen: $f(x) \in \overline{f(A)}$. Dies ist äquivalent dazu, dass für jede Umgebung $V \subset Y$ von $f(x)$ die Menge V einen nichtleeren Schnitt mit $f(A)$ hat $(*)$.
Da f stetig ist, ist $f^{-1}(V)$ ist offen, also eine Umgebung von x. Wegen $x \in \bar{A}$ hat $f^{-1}(V)$ nichtleeren Schnitt mit A. Nimm $y \in A \cap f^{-1}(V) \implies f(y) \in f(A) \cap V \implies (*)$.

ii)$\Rightarrow$iii): Zu zeigen ist $\overline{f^{-1}(A)} \subset f^{-1}(A)$.
Hierzu:

$$f(f^{-1}(A)) \subset A \implies f(\overline{f^{-1}(A)}) \overset{\text{n.V.}}{\subset} \overline{f(f^{-1}(A))} \subset \bar{A} = A \implies \overline{f^{-1}(A)} \subset f^{-1}(A).$$

iii)⇒i): Sei $V \subset Y$ offen. Es gilt:
$\underbrace{f^{-1}(Y \setminus V)}_{\text{abgeschlossen}} = f^{-1}(Y) \setminus f^{-1}(V) = X \setminus f^{-1}(V) \implies X \setminus f^{-1}(V)$ abgeschlossen
$\implies f^{-1}(V)$ offen $\implies f$ stetig.

i)⇒iv): Setze $U := f^{-1}(V)$.

iv)⇒i): Sei $V \subset Y$ offen. Für jedes $x \in f^{-1}(V)$, also $f(x) \in V$ existiert $U = U_x$ (Umgebung von x) mit $f(U_x) \subset V$. Aus $U_x \subset f^{-1}(V)$ folgt

$$f^{-1}(V) = \bigcup_{x \in f^{-1}(V)} U_x,$$

d.h. $f^{-1}(V)$ ist offen, und somit f stetig. □

Theorem 1.60
Seien X, Y, Z topologische Räume.

i) Konstante Funktionen $f\colon X \to Y$ sind stetig.

ii) Sei $A \subset X$ ein Teilraum. Dann ist die Inklusionsabbildung $\iota_A\colon A \hookrightarrow X$ stetig.

iii) Seien $f\colon X \to Y$, $g\colon Y \to Z$ stetig. Dann ist $g \circ f\colon X \to Z$ ist stetig.

iv) Sei $A \subset X$ ein Teilraum und $f\colon X \to Y$ stetig. Dann ist $f|_A\colon A \to Y$ ist stetig.

v) Sei $f\colon X \to Y$ stetig.

1) Ist $Z \subset Y$ ein Teilraum mit $f(X) \subset Z$, so ist die Abbildung $g\colon X \to Z$, $g(x) := f(x)$ stetig.

2) Ist $Y \subset Z$ ein Teilraum, so ist $h\colon X \to Z$, $h(x) := f(x)$ stetig,

vi) Sei U_α $(\alpha \in J) \subset X$ offen und $f\colon X \to Y$ gegeben mit $f|_{U_\alpha}\colon U_\alpha \to Y$ stetig und $X = \bigcup_{\alpha \in J} U_\alpha$. Dann ist f stetig.

4. Mai

Proof

i) Sei $y_0 \in Y$ mit $f(x) = y_0$ für alle x. Für beliebige $V \subset Y$ (insbesondere für offene) gilt: $f^{-1}(V) = \begin{cases} X & \text{, falls } y_0 \in V \\ \emptyset & \text{, falls } y_0 \notin V \end{cases}$ und diese beiden Mengen sind offen.

ii) Ist $U \subset X$ offen in X, so ist $\iota_A^{-1}(U) = U \cap A$ per Definition der Teilraumtopologie offen in A.

iii) Sei $V \subset Z$ offen $\implies (g \circ f)^{\text{-}1}(V) = f^{\text{-}1}(g^{\text{-}1}(V))$ offen (da f, g stetig)

iv) $$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "f|_A"] \arrow[dr, "\iota_A"'] & & Y \\ & X \arrow[ur, "f"'] & \end{tikzcd}$$ $\implies f|_A$ stetig nach ii)+iii) $(f|_A = f \circ \iota_A)$

v) 1) Sei $B \subset Z$ offen in Z.
$\implies B = U \cap Z$ mit $U \subset Y$ offen in Y. Aus $Z \supset f(X)$ folgt $g^{\text{-}1}(B) = f^{\text{-}1}(U)$ was offen in X ist, da f stetig ist.

2) $$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "h"] \arrow[dr, "f"'] & & Z \\ & Y \arrow[ur, hook, "\iota_Y"'] & \end{tikzcd}$$ $\implies h$ stetig nach ii)+iii)

vi) Sei $V \subset Y$ offen. Die Mengen $f^{\text{-}1}(V) \cap U_\alpha = f^{\text{-}1}|_{U_\alpha}(V)$ sind offen in U_α, also offen in X. Daraus folgt, dass die Menge $f^{\text{-}1}(V) = \bigcup\limits_{\alpha \in J} \left(f^{\text{-}1}(V) \cap U_\alpha\right)$ als Vereinigung offener Mengen offen in X ist. □

Theorem 1.61
Seien X, Y topologische Räume, $A, B \subset X$, $f_A \colon A \to Y$ stetig, $f_B \colon B \to Y$ stetig, $X = A \cup B$, $f_A|_{A\cap B} = f_B|_{A\cap B}$. Sind dann entweder A und B beide abgeschlossen oder beide offen, so existiert genau eine stetige Funktion $f \colon X \to Y$ mit $f|_A = f_A$ und $f|_B = f_B$.

Proof
Sei
$$f \colon X \to Y,\ f(x) = \begin{cases} f_A(x),\ x \in A \\ f_B(x),\ x \in B \end{cases}.$$
Falls A, B beide offen sind, ist nach obigem Theorem (vi) die Abbildung f stetig.
Seien nun $A, B \subset X$ abgeschlossen und $\subset Y$ abgeschlossen. Wir zeigen, dass $f^{\text{-}1}(C) \subset X$ abgeschlossen in X ist.
Es gilt $f^{\text{-}1}(C) = f_A^{\text{-}1}(C) \cup f_B^{\text{-}1}(C)$, wobei n.V. $f_A^{\text{-}1}(C)$ abgeschlossen in A, also auch abgeschlossen in X ist. Die Menge $f_B^{\text{-}1}(C)$ ist analog abgeschlossen in X, also folgt die Behauptung. □

Bemerkung 1.62
Sei J eine beliebige Indexmenge und jeweils X_α topologische Räume ($\alpha \in J$), sowie $\prod_{\alpha\in J} X_\alpha$ mit der Produkttopologie versehen. Es ist dann leicht zu sehen, dass die Projektionsabbildungen
$$\pi_\alpha : \prod_{\alpha \in J} X_\alpha \to X_\alpha$$
stetig und offen sind. Hierbei heißt eine Abbildung zwischen topologischen Räumen ***offen****, wenn sie offene Mengen auf offene Mengen abbildet).*

Theorem 1.63
Seien X, X_α topologische Räume ($\alpha \in J$, mit J einer beliebigen Indexmenge), und sei $\prod_{\alpha \in J} X_\alpha$ mit der Produkttopologie versehen. Dann ist $f = (f_\alpha)_{\alpha \in J} \colon X \to \prod_{\alpha \in J} X_\alpha$ stetig, genau dann wenn $f_\alpha \colon X \to X_\alpha$ stetig ist für alle $\alpha \in J$.

Proof
Wie bemerken zunächst, dass $\mathcal{S} = \bigcup\limits_{\beta \in J} \{\pi_\beta^{-1}(U_\beta) | U_\beta \subset X_\beta \text{ offen}\}$ eine Subbasis der Produkttopologie ist.

⇒: Da f stetig ist, gilt dies auch für $f_\alpha = \pi_\alpha \circ f$.

⇐: Es genügt zu zeigen, dass für alle $U \in \mathcal{S}$ die Menge $f^{-1}(U) \subset X$ offen ist. Hierbei ist $V = \pi_\beta^{-1}(U_\beta)$ die allgemeine Form von U mit $U_\beta \in X_\beta$. Es gilt aber

$$f^{-1}(U) = f^{-1}(\pi_\beta^{-1}(U_\beta)) = f_\beta^{-1}(U_\beta),$$

was offen in X ist. □

Bemerkung 1.64
Das obige Theorem stimmt im Allgemeinen nicht für die Boxtopologie:
Nimm $f : \mathbb{R} \to \prod\limits_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{R} =: \mathbb{R}^{\mathbb{N}}, f_n = id_{\mathbb{R}}$ die Identitätsabbildung für alle $n \in \mathbb{R}$. Die Menge $\prod_{n \in \mathbb{N}}(-1/n, 1/n)$ ist offen in $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ in der Boxtopologie, aber die Menge

$$f^{-1}\left(\prod_{n \in \mathbb{N}}(-1/n, 1/n)\right) = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} f_n^{-1}\big((-1/n, 1/n)\big) = \bigcap_{n \in \mathbb{N}}(-1/n, 1/n) = \{0\}$$

ist nicht offen in $\mathbb{R}$.

Korollar 1.65
Sei X ein topologischer Raum und seien $f_1, f_2 \colon X \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen. Dann sind $f_1 + f_2,\ f_1 \cdot f_2,\ \frac{f_1}{f_2}$ (letzteres falls $f_2(x) \neq 0$ für alle $x \in X$) stetig.

Proof
Jede dieser Funktionen ist jeweils eine Verkettung der stetigen Abbildungen

$$X \xrightarrow{(f_1, f_2)} \mathbb{R} \times \mathbb{R} \xrightarrow{\Psi} \mathbb{R},$$

wobei $\Psi = +, \cdot, /$ usw. Hier ist natürlich $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ mit der Produkttopologie ausgestattet worden. □

Lemma 1.66
Sei X ein topologischer Raum, $A \subset X,\ x \in X$. Dann gelten folgende Aussagen:

i) Existiert eine Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset A$ mit $x_n \to x$ für $n \to \infty$, so ist $x \in \bar{A}$.

ii) Sei X metrisierbar und $x \in \bar{A}$. Dann existiert eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset A$ mit $x_n \to x$ für $n \to \infty$.

Proof

i) Es gilt $x \in \bar{A}$, genau dann wenn jede Umgebung von x einen nichtleeren Schnitt mit A hat.
Sei also U eine beliebige Umgebung von x, und $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset A$ eine Folge mit $x_n \to x$. Dann existiert per Definition ein $N := N(U) \in \mathbb{N}$ mit $x_N \in U$. Also $x_N \in U \cap A$.

ii) Sei d eine Metrik auf X, die die Topologie auf X induziert. Es gilt $x \in \bar{A}$, genau dann wenn für alle $y \in X$, $r > 0$ mit $x \in B_d(y,r)$ gilt $B_d(y,r) \cap A \neq \emptyset$.
Zu $n \in \mathbb{N}$ ist $B_d(x, \frac{1}{n}) \cap A \neq \emptyset$, also nehme ein $x_n \in B_d(x, \frac{1}{n}) \cap A$.
Für diese $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset A$ gilt dann $x_n \to x, n \to \infty$, denn: Sei hierzu U eine beliebige Umgebung von x. Dann existieren $y \in X, \tilde{r} > 0$ mit $x \in B_d(y,\tilde{r}) \subset U$. Mit $r := \tilde{r} - d(x,y)$ gilt dann sogar $x \in B_d(x,r) \subset B_d(y,\tilde{r}) \subset U$. Wähle $N(U) \in \mathbb{N}$ mit $\frac{1}{N(U)} < r$. Dann gilt für alle $n \geq N(U)$ dass $x_n \in B_d(x, \frac{1}{n}) \subset B_d(x,r) \subset U$. □

Theorem 1.67
Seien X, Y topologische Räume und $f\colon X \to Y$.

i) Ist f stetig, so gilt für alle $x \in X$ und alle Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ mit $x_n \to x$ auch $f(x_n) \to f(x)$ für $n \to \infty$ (Stetigkeit impliziert also immer folgenstetigkeit).

ii) Sei X metrisierbar und f folgenstetig im obigen Sinne. Dann ist f auch stetig.

Proof

i) Sei $V \subset Y$ eine Umgebung von $f(x)$. Dann ist $f^{-1}(V)$ eine Umgebung von x. Wegen $x_n \to x$ existiert dann ein $N = N(V) \in \mathbb{N}$ so, dass für alle $n \geq N$ die Bedingung $x_n \in f^{-1}(V)$ erfüllt ist. D.h. $f(x_n) \in V$, und somit $f(x_n) \to f(x)$.

ii) Wir zeigen $f(\bar{A}) \subset \overline{f(A)}$ für alle Teilmengen $A \subset X$: Sei hierzu $x \in \bar{A}$. Dann existiert eine Folge $(x_n) \subset A$ mit $x_n \to x$. Nach Voraussetzung gilt also $f(x_n) \to f(x)$, und somit $f(x) \in \overline{f(A)}$. Also ist f stetig. □

Theorem 1.68
Seien $(X, d_X), (Y, d_Y)$ metrische Räume und $f\colon X \to Y$. Dann ist f stetig, genau dann wenn

$$\forall x \in X\, \forall \varepsilon > 0\, \exists\, \delta = \delta(x,\epsilon) > 0\, \forall\, y \in X, d_x(x,y) < \delta :\ d_y(f(x), f(y)) < \varepsilon.$$

Proof

⇒: Die Menge $f^{-1}(B_{d_Y}(f(x),\varepsilon)) \subset X$ ist eine Umgebung von x. Daher existiert ein $\delta > 0$ mit $B_{d_X}(x,\delta) \subset f^{-1}(B_{d_Y}(f(x),\varepsilon))$. Ist $y \in B_{d_X}(x,\delta)$, so gilt $f(y) \in B_{d_Y}(f(x), f(y))$.

$\Leftarrow$: Sei die ε-δ Bedingung erfüllt, $V \subset Y$ offen. Es ist zu zeigen, dass $f^{-1}(V) \subset X$ offen ist. Sei hierzu $x \in f^{-1}(V)$. Dann ist $f(x) \in V$ und es gibt ein $\varepsilon > 0$ mit $B_{d_Y}(f(x), \varepsilon) \subset V$. Es existiert also n.V. ein $\delta > 0$ mit $f(B_{d_X}(x, \delta)) \subset B_{d_Y}(f(x), \varepsilon)$. Somit gilt

$$B_{d_X}(x, \delta) \subset f^{-1}(B_{d_Y}(f(y), \varepsilon)) \subset f^{-1}(V),$$

und $f^{-1}(V)$ ist offen. $\square$

9.Mai

Definition 1.69
Sei X eine beliebige Menge, (Y, d) ein metrischer Raum und $f\colon X \to Y$, $f_n\colon X \to Y$ $(\forall n \in \mathbb{N})$. Dann heißt f_n gleichmäßig konvergent gegen f für $n \to \infty$, wenn

$$\forall\, \varepsilon > 0\, \exists\, N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}\, \forall\, n \geq N\, \forall\, x \in X: \; d(f_n(x), f(x)) < \varepsilon.$$

Stetigkeit bleibt unter gleichmäßiger Konvergenz erhalten:

Theorem 1.70
Sei X ein topologischer Raum, (Y, d) ein metrischer Raum, $f, f_n\colon X \to Y$ mit f_n stetig für alle $n \in \mathbb{N}$ und f_n gleichmäßig konvergent gegen f für $n \to \infty$. Dann ist f ebenfalls stetig.

Proof
Sei $x_0 \in X$, $V \subset Y$ Umgebung von $f(x_0)$. Zu zeigen: Es existiert eine Umgebung U von x_0 mit $f(U) \subset V$. Sei hierzu $\varepsilon > 0$ mit $B_d(f(x_0), \varepsilon) \subset V$ $(*)$. Aufgrund der gleichmäßigen Konvergenz existiert ein $N \in \mathbb{N}$ mit $d(f_N(x), f(x)) < \frac{\varepsilon}{3}$ für alle $x \in X$. Wähle eine Umgebung U von x_0 mit $f_N(U) \subset B_d(f_N(x_0), \frac{\varepsilon}{3})$. Ist nun $x \in U$, so gilt

$$d(f(x), f(x_0)) \leq d(f(x), f_N(x)) + d(f_N(x), f_N(x_0)) + d(f_N(x_0), f(x_0)) < \varepsilon,$$

was wegen $(*)$ nun

$$f(U) \subset B(f(x_0), \varepsilon) \subset V$$

impliziert.

$\square$

6 Homöomorphismen

Definition 1.71
Seien X, Y topologische Räume. Dann heißt $f: X \to Y$ ein **Homöomorphismus**, *wenn f stetig und bijektiv ist und außerdem f^{-1} stetig ist.*

Bemerkung 1.72
Genau dann ist eine bijektive Abbildung $f: X \to Y$ zwischen den topologischen Räumen X, Y ein Homöomorphismus, wenn Folgendes gilt: $U \subset X$ ist offen $\Leftrightarrow f(U) \subset Y$ offen. Analog: Genau dann ist eine bijektive stetige Abbildung $f: X \to Y$ zwischen den topologischen Räumen X, Y ein Homöomorphismus, wenn für alle offenen Mengen $U \subset X$ die Menge $f(U) \subset Y$ ebenfalls offen ist.

Beispiel 1.73

1. $x \mapsto \frac{x}{1-x^2}$ *ist Homöomorphismus von $(-1,1)$ nach $\mathbb{R}$*
2. $f: [0,1) \to S^1 \subset \mathbb{R}^2,\ f(t) = \begin{pmatrix} \cos(2\pi t) \\ \sin(2\pi t) \end{pmatrix}$ *ist bijektiv und stetig, f^{-1} ist nicht stetig.*
3. *Je zwei offene (halboffene) [abgeschlossene] Intervalle $\subset \mathbb{R}$ sind homöomorph.*

Bemerkung 1.74
Homöomorphismen erhalten offensichtlich alle topologischen Eigenschaften, welche sich vollständig durch offene Mengen charakterisieren lassen.

7 Zusammenhängende Räume

Definition 1.75
Sei X ein topologischer Raum. Eine **Trennung von** *X ist ein Paar von offenen Teilmengen U, V mit*

i) *U, V beide nicht leer*

ii) *U und V sind disjunkt*

iii) *$X = U \cup V$.*

X heißt **zusammenhängend**, *wenn keine Trennung von X existiert.*

Bemerkung 1.76
Für einen topologischen Raum X gelten folgende Äquivalenzen:
X ist zusammenhängend.
$\Leftrightarrow$ Für alle nichtleeren offenen Teilmengen $U, V \subset X$ mit $X = U \cup V$ gilt $U \cap V \neq \emptyset$.
$\Leftrightarrow$ Die einzigen Teilmengen von X, die sowohl offen als auch abgeschlossen sind, sind $\emptyset$ und X selbst.

Beispiel 1.77

1. *$\emptyset$ und einelementige Teilräume eines topologischen Raums sind stets zusammenhängend.*

2. *Intervalle in $\mathbb{R}$ sind stets zusammenhängend. Umgekehrt: Ist $A \subset \mathbb{R}$ zusammenhängend mit $|A| \geq 2$, so ist A ein Intervall.*

3. *$[a, b) \cup (b, c]$ ist nicht zusammenhängend.*

4. *$\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ ist nicht zusammenhängend.*

Lemma 1.78

i) *Sei X ein topologischer Raum, $Y \subset X$ ein Teilraum und seien $A, B \subset Y$ Teilmengen mit*
$$A, B \neq \emptyset, \;\; A \cap B = \emptyset, \;\; Y = A \cup B.$$
Dann ist $Y = A \cup B$ eine Trennung genau dann, wenn A keine Häufungspunkte (in der X-Topologie) von B enthält und B keine Häufungspunkte von A (in der X-Topologie) enthält.

ii) *Sei X ein topologischer Raum, $X = C \bigsqcup D$ eine Trennung, $Y \subset X$ ein zusammenhängender Teilraum. Dann ist $Y \subset C$ oder $Y \subset D$.*

Proof
Übung. $\square$

Theorem 1.79
Sei X ein topologischer Raum, $A \subset X$ ein zusammenhängender Teilraum, B eine Menge mit $A \subset B \subset \bar{A}$. Dann ist B ebenfalls zusammenhängend.

Proof
Sei $B = C \bigsqcup D$ eine Trennung. Dann gilt $A \subset C$ oder $A \subset D$. Sei oBdA $A \subset C$. Dann ist $\bar{A} \subset \bar{C}$ und Lemma 1.78 i) impliziert, dass $\bar{C}$ und D disjunkt sind. Dann sind auch D und B disjunkt, was ein Widerspruch dazu ist, dass D eine nichtleere Teilmenge von B ist. □

Das letzte Resultat impliziert unmittelbar:

Korollar 1.80
Ist A ein zusammenhängender Teilraum eines topologischen Raumes X, so ist auch $\bar{A}$ ein zusammenhängender Teilraum von X.

Theorem 1.81
Seien X, Y topologische Räume mit X zusammenhängend, und sei $f\colon X \to Y$ stetig. Dann ist $f(X) \subset Y$ ein zusammenhängender Teilraum.

Proof
OBdA sei f surjektiv (wenn nicht: ersetze f durch die von f induzierte Abbildung $\tilde{f} :: X \to f(X)$; $\tilde{f}$ ist dann stetig und surjektiv). Sei $f(X) = A \bigsqcup B$ eine Trennung. Dann sind $f^{-1}(A)$, $f^{-1}(B)$ disjunkt und offen in X. Außerdem sind $f^{-1}(A)$, $f^{-1}(B)$ beide nicht leer (da f surjektiv ist). D.h., $X = f^{-1}(A) \bigsqcup f^{-1}(B)$ ist Trennung, was ein Widerspruch ist. □

Theorem 1.82
Seien X_α, $\alpha \in J$ topologische Räume, mit J einer beliebigen Indexmenge. Dann ist $\prod_{\alpha\in J} X_\alpha$ zusammenhängend in der Produkttopologie, genau dann wenn jedes X_α zusammenhängend ist.

Proof Übung. □

Bemerkung 1.83

i) Die Richtung '$\Rightarrow$' von Theorem 1.82 gilt auch für die Boxtopologie, da da Projektionsabbildungen insbesondere auch in dieser Topologie stetig sind.

ii) Die Richtung '$\Leftarrow$' von Theorem 1.82 gilt nicht für die Boxtopologie: Sei etwa $X := \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \dots$. Dann ist X ist nicht zusammenhängend in der Boxtopologie, denn $X = U \bigsqcup V$, mit

$$U := \left\{ (x_n)_{n\in\mathbb{N}} : \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n| = \infty \right\}$$

und

$$V := \left\{ (x_n)_{n\in\mathbb{N}} : \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n| < \infty \right\}$$

ist eine Trennung von X bezüglich der Boxtopologie.

11. Mai

Theorem 1.84 *(Zwischenwertsatz)*
Sei X ein zusammenhängender topologischer Raum, $f\colon X \to \mathbb{R}$ (ST) stetig, $a, b \in X$, $r \in [f(a), f(b)]$. Dann existiert ein $c \in X$ mit $f(c) = r$.

Proof
Die Mengen $A := f(X) \cap (-\infty, r)$, $B := f(X) \cap (r, \infty)$ sind disjunkt, nicht leer (n.V.), und offen in $f(X)$. Angenommen, es existiert kein solches c. Dann ist $f(X) = A \bigsqcup B$ eine Trennung, im Widersprich dazu, dass $f(X)$ zusammenhängend ist. □

Lemma 1.85
Sei X ein topologischer Raum, A, A_α $(\alpha \in J)$ $\subset X$ zusammenhängende Teilräume mit $A \cap A_\alpha \neq \emptyset$ für alle $\alpha \in J$ (mit J einer beliebigen Indexmenge). Dann ist $(\bigcup_{\alpha \in J} A_\alpha) \cup A$ wieder ein zusammenhängender Teilraum.

Proof
Angenommen, es gibt eine Trennung

$$A \cup (\bigcup_{\alpha \in J} A_\alpha) = U \cup V.$$

Dann sind entweder A sowie alle A_α in U enthalten, oder es sind A sowie alle A_α in V enthalten. Sei oBdA A, sowie alle A_α in U enthalten. Daraus folgt $A_\alpha \subset U$ für alle α, also $V = \emptyset$, ein Widerspruch. □

Definition 1.86
Sei X ein topologischer Raum und $x, y \in X$. Dann sei $x \sim y :\Leftrightarrow$ es existiert ein zusammenhängender Teilraum $A \subset X$ mit $x, y \in A$. Dies ist Äquivalenzrelation auf X, und $[x]_\sim \subset X$ heißt die ***Zusammenhangskomponente von*** *x.*

Bemerkung 1.87
$\sim$ ist tatsächlich Äquivalenzrelation: Symmetrie und Reflexivität offensichtlich. Die Transitivität folgt aus Lemma 1.85.

Theorem 1.88
Sei X ein topologischer Raum. Dann lässt sich X als disjunkte Vereinigung von Zusammenhangskomponenten schreiben. Außerdem gelten folgende Aussagen:

i) Für nichtleere zusammenhängende Teilräume $A \subset X$ gilt:

$$\#\{[x] : x \in X : [x] \cap A \neq \emptyset\} = 1.$$

ii) $[x]_\sim$ ist zusammenhängend für alle $x \in X$.

Proof Die erste Aussage folgt aus allgemeinen Eigenschaften von Äquivalenzrelationen.

i) Angenommen $[x] \cap A \neq \emptyset$ und $[y] \cap A \neq \emptyset$. Für $a \in [x] \cap A$ und $b \in [y] \cap A$ gilt dann $a \sim b$, aufgrund der Äquivalenzrelation demnach auch $[x] = [y]$.

ii) Sei $x_0 \in [x]$. Dann gilt also gilt für alle $y \in [x]$ die Aquivalenz $y \sim x_0$. Daher existiert ein zusammenhaengender Teilraum $A_y \subset X$ mit $x_0, y \in A_y \overset{i)}{\Longrightarrow} A_y \subset [x] \implies [x] = \bigcup_{y \in [x]} A_y \implies [x]$ ist zusammenhängend, nach Lemma 1.85. □

8 Wegzusammenhängende Räume

Definition 1.89

Sei X ein topologischer Raum, $x, y \in X$. Ein **Weg von** x **nach** y *ist eine stetige Abbildung $\gamma\colon [a,b] \to X$ mit $\gamma(a) = x$ und $\gamma(b) = y$.*
X heißt **wegzusammenhängend**, *falls für alle $x, y \in X$ ein Weg von x nach y existiert.*

Lemma 1.90

Jeder wegzusammenhängende Raum X ist auch zusammenhängend.

Proof

Angenommen $X = A \bigsqcup B$ ist eine Trennung und $\gamma\colon [a,b] \to X$ ist stetig. Dann gilt $\gamma([a,b]) \subset A$ oder $\gamma([a,b]) \subset B$, ein Widerspruch zum Wegzusammenhang von X. □

Bemerkung 1.91

i) Bilder wegzusammenhängender Räume unter stetigen Abbildungen sind wegzusammenhängend.

ii) Seien X_α topologischer Räume für alle $\alpha \in J$, mit J einer beliebigen Indexmenge. Dann ist $\prod_{\alpha \in J} X_\alpha$ wegzusammenhängend in der Produkttopologie $\Leftrightarrow$ alle X_α sind wegzusammenhängend.

iii) Sei $A := Graph(f) \subset \mathbb{R}^2$, $f\colon (0,1] \to \mathbb{R}$, $f(t) := \sin(\frac{1}{t})$. Dann ist A wegzusammenhängend und $\bar{A} \subset \mathbb{R}^2$ ist nicht wegzusammenhängend, wohingegen $\bar{A}$ zusammenhängend ist.

iv) Sind $A_\alpha, A \subset X$ wegzusammenhängende Teilräume mit $A \cap A_\alpha \neq \emptyset$ für alle $\alpha \in J$ (mit J einer beliebigen Indexmenge), so ist $\implies (\bigcup_\alpha A_\alpha) \cup A$ wegzusammenhängend.

Satz und Definition 1.92

Sei X ein topologischer Raum, $x, y \in X$. Dann ist

$$x \sim y :\Leftrightarrow \quad x \text{ und } y \text{ können durch einen Weg verbunden werden}$$

eine Äquivalenzrelation auf X.
Die Äquivalenzklasse $[x]_{\sim_w} \subset X$ heißt die **Wegzusammenhangskomponente von** x.

Proof

Refl.: $x \sim_w x$, denn man kann den konstanten Weg $\gamma(t) = x$ für alle $t \in [0,1]$ wählen.

Symm.: $x \sim_w y \implies y \sim_w x$, denn sei $\gamma\colon [a,b] \to X$ mit $\gamma(a) = x,\ \gamma(b) = y$. Dann ist $\tilde{\gamma}\colon [a,b] \to X,\ \tilde{\gamma}(t) := \gamma(b-t+a)$ ein Weg von y nach x.

Trans.: $x \sim_w y$ und $y \sim_w z \implies x \sim_w z$, denn $x \sim_w y \implies \exists$ Weg $\gamma_1\colon [a,b] \to X$ von x nach $y \implies \exists$ Weg $\tilde{\gamma}_1\colon [0,1] \to X$. Analog: $\exists$ Weg $\phi\colon [1,2] \to X$ von y nach $z \implies \exists$ Weg $\psi\colon [0,2] \to X$ von x nach z. □

Theorem 1.93
Sei X ein topologischer Raum. Dann lässt sich X als disjunkte Vereinigung von Wegzusammenhangskomponente schreiben. Außerdem gelten folgende Aussagen:

i) jeder nichtleere wegzusammenhängende Teilraum von X hat mit genau einer Wegzusammenhangskomponente einen nichtleeren Schnitt.

ii) Wegzusammenhangskomponenten sind wegzusammenhängend.

Proof
Genau wie bei "zusammenhängend". □

Bemerkung 1.94

i) Zusammenhangskomponenten sind stets abgeschlossene Teilmengen. Insbesondere sind in einem topologischem Raum, der nur endlich viele Zusammenhangskomponenten, die Zusammenhangskomponenten auch auch offene Teilmengen.

ii) Über Wegzusammenhangskomponenten lässt sich im Allgemeinen nicht sagen, ob sie offen oder abgeschlossen sind.

iii) Im Allgemeinen sind Schnitte von wegzusammenhängenden Teilräumen nicht einmal zusammenhängend: Betrachte hierzu S^1: Dann sind $S^1 \backslash \{(0,1)\}$ und $S^1 \backslash \{(0,-1)\}$ wegzusammenhängend, aber $(S^1 \backslash \{(0,1)\}) \cap (S^1 \backslash \{(0,-1)\}) = S^1 \backslash \{(0,-1),(0,1)\}$ ist nicht zusammenhängend.

18.Mai

9 Kompakte topolopologische Räume

Definition 1.95
*Sei X ein topologischer Raum und sei $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ ein Mengensystem. Dann heißt $\mathcal{A}$ eine **Überdeckung** von X, falls $X = \bigcup_{A \in \mathcal{A}} A$ gilt, und $\mathcal{A}$ heißt eine **offene Überdeckung** von X, wenn zusätzlich alle $A \in \mathcal{A}$ offene Teilmengen von X sind.*

Definition 1.96
*Ein topologischer Raum X heißt **kompakt**, wenn es zu jeder offenen Überdeckung $\mathcal{A}$ von X ein endliches Teilsystem $\mathcal{A}' \subset \mathcal{A}$ gibt, sodass $\mathcal{A}'$ immer noch eine Überdeckung von X ist.*

Beispiel 1.97

1. *Auf $\mathbb{R}^m$, betrachte $\mathcal{A} = \{\varepsilon\text{-Kugeln um die Null}\} \implies \mathbb{R}^m$ ist nicht kompakt.*
2. *$(0,1] \subset \mathbb{R}$ ist ebenfalls nicht kompakt: $\mathcal{A} := \left\{\left(\frac{1}{n}, 1\right] : n \in \mathbb{N}\right\}$.*
3. *$[0,1]^n \subset \mathbb{R}^n$ ist kompakt: Wir werden später sehen, dass $[0,1]$ kompakt ist und dass beliebige Produkte von kompakten Räumen in der Produkttopologie ebenfalls kompakt sind.*

Definition 1.98
*Sei X ein topologischer Raum, $Y \subset X$. Dann heißt $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ eine **Überdeckung** von Y, falls $Y \subset \bigcup_{A \in \mathcal{A}} A$.*

Theorem 1.99
Sei X ein topologischer Raum, $Y \subset X$ ein Teilraum. Dann ist Y genau dann kompakt, wenn für jede Überdeckung $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ von Y mit offenen Teilmengen von X ein endliches Mengensystem $\mathcal{A}' \subset \mathcal{A}$ existiert, so dass $\mathcal{A}'$ eine Überdeckung von Y bleibt.

Proof Übung.

Theorem 1.100

- *i) Sei X ein kompakter Raum und $Y \subset X$ abgeschlossen. Dann ist Y ein kompakter Teilraum.*
- *ii) Sei X ein Hausdorffraum, $Y \subset X$ ein kompakter Teilraum. Dann ist Y eine abgeschlossene Teilmenge von X.*

Proof

i) Sei
$$\mathcal{A} = \{U_i : i \in J\}$$
eine beliebige Überdeckung von Y mit offenen Teilmengen von X. Dann ist
$$X = \left(\bigcup_{j \in J} U_j\right) \cup (X \backslash Y)$$
eine offene Überdeckung von X. Da X kompakt ist gilt
$$X = U_{i_1} \cup \ldots \cup U_{i_l} \cup (X \backslash Y)$$
für endlich viele $i_1, \ldots, i_l \in J$, d.h. $Y \subset U_{i_1} \cup \ldots \cup U_{i_l}$, was die Kompaktheit von Y zeigt.

ii) Wir zeigen: Zu jedem $x_0 \in X \backslash Y$ existiert eine Umgebung U von x_0 mit $U \cap Y = \emptyset$ (was also impliziert, dass $X \backslash Y$ offen in X ist). Zu jedem $y \in Y$ existiert jedenfalls eine Umgebung U_y von x_0 und V_y von y mit $U_y \cap V_y = \emptyset$ (da X Hausdorff ist); dann ist $Y \subset \bigcup_{y \in Y} V_y$ eine Überdeckung von Y mit offenen Teilmengen von X, und es gilt $\bigcup_{j=1}^{l} V_{y_j} =: V$ für geeignete $y_1, \ldots, y_l \in Y$, da X kompakt ist. Wir setzen
$$U := U_{y_1} \cap \ldots \cap U_{Y_l}.$$
Dann ist U eine offene zu V disjunkte Teimengen von X und es gilt $U \cap Y = \emptyset$.□.

Theorem 1.101
Sei X ein kompakter Raum, Y ein topologischer Raum und $f\colon X \to Y$ stetig. Dann ist $f(X) \subset Y$ ein kompakter Teilraum.

Proof
Sei $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(Y)$ eine Überdeckung von $f(X)$ mit offenen Teilmengen von Y. Dann ist $\{f^{-1}(A) : A \in \mathcal{A}\}$ eine offene Überdeckung von X, und es gilt $X = \bigcup_{i=1}^{l} f^{-1}(A_i)$ für geeignete $A_1, \ldots, A_l \subset \mathcal{A}$, da X kompakt ist. Damit ist $f(X) \subset \bigcup_{i=1}^{l} A_i$ eine Überdeckung von $f(X)$ mit offenen Teilmengen von Y, und $f(X)$ ist also kompakt. □

Theorem 1.102
Sei X ein kompakter topologischer Raum, Y ein Hausdorffraum und $f\colon X \to Y$ stetig und bijektiv. Dann ist f bereits ein Homöomorphismus.

Proof Zu zeigen ist, dass $f^{-1}\colon Y \to X$ stetig ist. Dies ist äquivalent dazu, dass für alle abgeschlossener Mengen $A \subset X$ die Menge $f(A)$ abgeschlossen ist. Die Menge A ist nach Voraussetzung kompakt, also ist $f(A) \subset Y$ ein kompakter Teilraum. Aber X ist Hausdorff, und somit ist $f(A)$ abgeschlossen. □

Bemerkung 1.103 *Offensichtlich ist ein topologischer Raum X genau dann kompakt, wenn für eine (und dann jede) Basis $\mathcal{B}$ der Topologie folgende Aussage gilt:*
Für jede Überdeckung $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$ von X existiert ein endliches Teilsystem $\mathcal{A}' \subset \mathcal{A}$, so dass $\mathcal{A}'$ eine Überdeckung von X bleibt.

Weniger offensichtlich:

Theorem 1.104 *(Alexander's Subbasis Lemma)*
Man kann in der Bemerkung 1.103 "Basis" durch "Subbasis" ersetzen.

Proof
Der Beweis benutzt das Auswahlaxion und wird hier nicht gegeben. □

Damit kann man nun in drei Zeilen beweisen:

Lemma 1.105
Intervalle der Art $[a, b] \subset \mathbb{R}$ mit $a < b$ reell sind kompakte Teilräume.

Proof Übung. □

23.Mai

Theorem 1.106 *(Satz vom Minimum und Maximum)*
Sei X ein kompakter topologischer Raum, $f : X \to \mathbb{R}$ stetig. Dann hat $f(X)$ ein Minimum und ein Maximum, d.h. es existieren $x_1, x_2 \in X$ mit $f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2)$ für alle $x \in X$.

Proof
Angenommen $f(X)$ hätte kein Maximum. Dann ist $\{(-\infty, a) \mid a \in f(X)\}$ eine offene Überdeckung von $f(X)$. Aber $f(X)$ ist kompakt, d.h. es gilt $f(X) \subset \bigcup_{j=1}^{\ell}(-\infty, a_j)$ für gewisse $a_1, \dots, a_l \in f(X)$. Dies impliziert nun $\max\limits_{j=1,\dots,\ell} a_j \notin \bigcup_{j=1}^{\ell} (-\infty, a_j)$, ein Widerspruch. Für die Existenz des Minimums verfährt man analog, mit den Mengen (a, ∞), bzw. (a_j, ∞). □

Theorem 1.107 *(Tychonow)*
Seien X_α, $\alpha \in J$, topologische Räume (mit J einer beliebigen Indexmenge). Dann ist $\prod_{\alpha \in J} X_\alpha$ kompakt in der Produkttopologie genau dann, wenn jedes X_α kompakt ist.

Proof
Der Fall $|J|$ endlich ist halbwegs anschaulich. Alle Beweise für den Fall $|J|$ unendlich brauchen das Auswahlaxiom auf irgendeine Art. Man kann etwa einen kurzen Beweis mittels Alexander's Subbasis Lemma geben. □

Die Richtung $\Rightarrow$ in Tychonow's Theorem gilt auch für die Boxtopologie, wohingegen die Richtung $\Leftarrow$ im Allgemeinen falsch ist für die Boxtopologie.
Es gibt weitere Kompaktheitsbegriffe:

Definition 1.108
Sei X ein topologischer Raum. Dann heißt X

i) ***folgenkompakt****, wenn jede Folge in X eine konvergente Teilfolge besitzt.*

ii) ***Bolzano-Weierstrass-kompakt*** *(BW), falls jede unendliche Teilmenge von X einen Häufungspunkt besitzt.*

Die einzige allgemeingültige Implikation ist:

Lemma 1.109
Ist X kompakt, so ist X BW-kompakt.

Proof
Sei $A \subset X$ eine beliebige Teilmenge. Wir zeigen: Hat A keinen Häufungspunkt, so ist A endlich.Habe A also keinen Häufungspunkt. Dann gilt $A = \bar{A}$. D.h. für alle $a \in A$ existiert eine offene Umgebung U_a von a mit $U_a \cap A = \{a\}$ $(*)$. Dies macht

$$X = (X \setminus A) \cup \bigcup_{a \in A} U_a$$

zu einer offenen Überdeckung. Da X kompakt ist, gilt

$$X = (X \setminus A) \cup U_{a_1} \cup \cdots \cup U_{a_\ell}$$

für gewisse $a_1, \ldots, a_\ell \in A$, also

$$A \subset U_{a_1} \cup ... \cup U_{a_\ell}$$

und

$$A = (U_{a_1} \cap A) \cup ... \cup (U_{a_\ell} \cap A).$$

Somit gilt

$$A = \{a_1, ..., a_\ell\},$$

wegen $(*)$. □

Im metrischen Fall fallen alle Kompaktheitsbegriffe zusammen und es gilt ein abstrakter Satz von Heine-Borel:

Definition 1.110
Sei (X, d) ein metrischer Raum.

i) Eine Teilmenge $K \subset (X, d)$ heißt ***beschränkt****, wenn ein $r > 0$, sowie ein $x \in X$ existieren mit :*

$$K \subset B_d(x, r)$$

ii) Eine Teilmenge $K \subset (X,d)$ heißt **`total beschränkt`**, *falls es zu jedem $\varepsilon > 0$ endlich viele Punkte $x_1, ..., x_\ell \in K$ gibt mit:*

$$K \subset \bigcup_{j=1}^{\ell} B_d(x_j, \varepsilon).$$

Bemerkung 1.111
i) Total beschränkt $\Rightarrow$ beschränkt; im Allgemeinen gilt die Umkehrung nicht (Übung).
ii) Teilmengen von (total) beschränkten Teilmengen sind wieder (total) beschränkt (Übung).

Lemma 1.112
Sei (X,d) ein metrischer Raum, $A \subset X$ eine beliebige Teilmenge. Dann stimmt die Teilraumtopolgie von A mit der metrischen Topologie von $d\big|_{A\times A}$ überein.

Proof
Sehr leicht, wenn man sich passende Basen der Topologien ansieht. □

Bemerkung 1.113
Es gilt in obiger Situation $B_{d\big|_{A\times A}}(x,r) = B_d(x,r) \cap A$.

Theorem 1.114 (Heine-Borel)
Sei (X,d) ein metrischer Raum, $K \subset X$ ein Teilraum. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

i) K ist kompakt.

ii) K ist BW-kompakt.

iii) K ist folgenkompakt.

iv) K ist totalbeschränkt (bzgl. d) und vollständig (bzgl. $d|_{K\times K}$).

Proof Heine-Borel

i) $\Rightarrow$ ii): Bereits erledigt.

ii) $\Rightarrow$ iii): Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset K$ eine beliebige Folge, $A = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$.
Falls A endlich ist, ist die Aussage offensichtlich.
Sei nun A unendlich $\overset{K \text{ ist } BW}{\Longrightarrow}$ A hat einen Häufungspunkt $x \in X$. Wähle x_{n_1} beliebig aus $B_{d|_{K\times K}}(x,1)$. Sei zu gegebenen $j \in \mathbb{N}$ die natürliche Zahl n_{j-1} bereits gewählt. In $B_{d|_{K\times K}}(x,\frac{1}{j})$ liegen unendlich viele Eemente von A. $\Longrightarrow \exists n_j > n_{j-1}$ mit $x_{n_j} \in B_{d|_{K\times K}}(x,\frac{1}{j})$
$\Longrightarrow$ x_n konvertiert gegen $x \Longrightarrow X$ ist folgenkompakt.

iii) $\Rightarrow$ iv): K ist vollständig, denn: Sei $(x_n) \subset K$ Cauchy-Folge $\implies \exists$ Teilfolge (x_{n_j}) von (x_n) sowie $x \in K$ mit $d(x_{n_j}, x) \xrightarrow{j\to\infty} 0 \implies d(x_n, x) \leq (x_n, x_{n_j}) + d(x_{n_j}, x) < \varepsilon$ für n groß $\implies K$ ist vollständig.
K ist totalbeschränkt, denn: Angenommen nicht.
Dann existiert ein $r > 0$, so dass K nicht durch endlich viele $d|_{K\times K}$-Bälle mit Radus r und Zahlen in K überdeckt werden kann. Wähle $x_1 \in K$ beliebig. Da $K \not\subset B_{d|_{K\times K}}(x_1, r)$ existiert ein $x_2 \in K \backslash B_d(x_1, r)$.
Induktiv: Seien $x_1, \ldots, x_n$ bereits gewählt.
$\implies \exists x_{n+1} \in K \backslash \bigcup\limits_{j=1}^{n} B_{d|_{K\times K}}(x_j, r) \implies d(x_n, x_l) \geq r$ für alle $l, n \in \mathbb{N}$
$\implies$ offensichtlich kann (x_n) keine konvergente Teilfolge enthalten, da alle x_n mindestens den Abstand r voneinander haben $\implies$ Widerspruch zur Folgenkompaktheit.

iv) $\Rightarrow$ i): Sei also K vollständig und totalbeschränkt und sei $K \subset \bigcup\limits_{i\in I} U_i$ eine Überdeckung von K mit offenen Teilmengen von X. Angenommen, es existiert kein endliches Teilsystem von $(U_i)_{i\in I}$, welches K immer noch überdeckt. Da K totalbeschränkt ist, existieren endlich viele Bälle

$$B_1^0 := \bar{B}_{d|_{K\times K}}(y_1^0, 1/2^1), \ldots, B_{n_0}^0 := \bar{B}_{d|_{K\times K}}(y_{n_0}^0, 1/2^1)$$

mit $y_j^0 \in K$ für alle $j = 1, \ldots, n_0$ und $K \subset \bigcup\limits_{j=1}^{n_0} B_r^0$. Es existiert dann ein $j_0 \in \{1, \ldots, n_0\}$ mit der Eigenschaft, dass $K \cap B_{j_0}^0$ nicht durch ein endliches Teilsystem von (U_i) überdeckt werden kann. Setze $K_1 := K \cap B_{j_0}^0$. Dann ist $K_1 \subset K$ totalbeschränkt, und es existierten endlich viele Bälle

$$B_1^1 := \bar{B}_{d|_{K\times K}}(y_1^1, 1/2^2), \ldots, B_{n_1}^1 = \bar{B}_{d|_{K\times K}}(y_{n_1}^1, 1/2^2)$$

mit $y_j^1 \in K_1$ für alle $J = 1, \ldots, n_1$ sowie $K_1 \subset \bigcup\limits_{j=1}^{n_1} B_j^1$. Es existiert dann ein $j_1 \in \{1, \ldots, n_1\}$ mit der analogen Eigenschaft wie j_0 oben. Sei nun $K_2 := K_1 \cap B_{j_1}^1$ usw.. Induktiv kann man nun eine Folge $(K_l)_{l\in\mathbb{N}}$ mit $\ldots \subset \ldots \subset K_l \subset K_{l-1} \subset \ldots \subset K_1$ für alle $l \in \mathbb{N}$ und jedes K_l ist abgeschlossen (K selbst ist vollständig, also abgeschlossen) sowie kein K_l kann durch ein endliches Teilsystem von (U_i) überdeckt werden. Per Konstruktion gilt für alle $l \in \mathbb{N}$, sowie $x, y \in K_l$ die Ungleichung

$$d\Big(x, y\Big) \leq d\left(x, y_{j_{l-1}}^{l-1}\right) + d\left(y_{j_{l-1}}^{l-1}, y\right) \leq \frac{1}{2^l} + \frac{1}{2^l} = \frac{1}{2^{l-1}} \ (*).$$

Wähle zu jedem l ein $x_l \in K_l$. Dann ist (x_l) eine Cauchy-Folge, denn es gilt

$$d(x_n, x_m) \leq \frac{1}{2^{j-1}} \quad \text{für } n, m \geq j.$$

Da K vollständig ist, gilt also $d(x_n, x) \xrightarrow{n\to\infty} 0$ für ein $x \in K$. Aber $K \subset \bigcup_{i\in I} U_i$, also $x \in U_j$ für ein $j \in J$. Es gibt dann ein $\varepsilon > 0$ mit $B_d(x,\varepsilon) \subset U_j$ $(**)$. Sei $n \in \mathbb{N}$ beliebig, $y \in K_m$. Dann gilt $d(x,y) \leq \frac{1}{2^{m-1}}$ wegen $(*)$. Da $x \in K_m$ für alle $m \in \mathbb{N}$ gilt (dies folgt daraus, dass $(x_l)_{l\geq m} \subset K_m$ gilt und dass K_m abgeschlossen ist), haben wir es nun geschafft, dass für große m die Bedingung

$$K_m \subset B(x,\varepsilon) \overset{(**)}{\subset} U_j$$

erfüllt ist, im Widerspruch zur Konstruktion der K_m. □

Lemma 1.115
Sei X ein T_1 Raum (z.B. kann also X Hausdorff oder spezieller X metrisierbar sein), und sei $A \subset X$ eine Teilmenge, sowie $x \in X$. Dann ist x ein Häufungspunkt von A genau dann, wenn jede Umgebung von x unendlich viele Elemente von A enthält.

Proof

$\Leftarrow$: Klar.

$\Rightarrow$: Sei U eine beliebige Umgebung. Angenommen $U \cap A$ ist endlich. Dann ist $U \cap (A\backslash\{x\})$ endlich, etwa
$$U \cap (A\backslash\{x\}) = \{x_1, ..., x_\ell\}.$$
Da $X\backslash\{x_1, ..., x_\ell\}$ offen ist, ist $U \cap (X\backslash\{x_1, ..., x_\ell\})$ eine Umgebung von x mit
$$U \cap (X\backslash\{x_1, ..., x_\ell\}) \cap (A \setminus \{x\}) = \emptyset,$$
im Widerspruch dazu, dass x ein Häufungspunkt von A ist.

□

25.Mai

Korollar 1.116
Sei $K \subset (\mathbb{R}^m, d_{eukl.})$. Dann ist K genau dann kompakt, wenn K beschränkt und abgeschlossen ist.

Proof

$\Rightarrow$: K kompakt $\implies$ K totalbeschränkt ($\implies$ beschränkt) und vollständig ($\implies$ abgeschlossen, da $(\mathbb{R}, d_{eukl.})$ vollständig ist)

$\Leftarrow$: Zum einen ist die Menge K vollständig, da $(\mathbb{R}^n, d_{eukl.})$ vollständig ist. Zum anderen ist in $(\mathbb{R}^n, d_{eukl.})$ jede beschränkte Menge automatisch totalbeschränkt: Am leichtesten sieht man letzteres, indem man die Äquivalenz der Metriken $d_{eukl}(x,y) \sim d_\infty(x,y) = \max_{1\leq i\leq n} |x_i - y_i|$ feststellt. In der letzteren Metrik sehen die Bälle wie Quader aus. □

30.Mai

Erinnerung

Definition 1.117
Seien (X, d_X) und (Y, d_Y) metrische Räume. Dann heißt $f\colon X \to Y$ ***gleichmäßig stetig*** *(bzgl. d_X, d_Y), falls*

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists \delta = \delta(\epsilon) > 0\, \forall x, y \in X :\ d_X(x, y) < \delta \implies d_Y(f(x), f(y)) < \varepsilon.$$

Gleichmäßig stetige Funktionen sind offensichtlich stetig.

Theorem 1.118
Seien (X, d_X) und (Y, d_Y) metrische Räume, sei (X, d_X) kompakt und sei $f\colon X \to Y$ stetig. Dann ist f bereits gleichmäßig stetig.

Proof
Sei $\varepsilon > 0$. Da f stetig ist, existiert zu jedem $x \in X$ ein $\delta_x > 0$, so dass für alle $y \in X$ folgende Implikation gilt: $d(x, y) < \delta_x \implies d(f(x), f(y)) < \frac{\varepsilon}{2}$. Da (X, d_X) kompakt ist, gibt es $x_1, \ldots, x_l \in X$ mit

$$X = \bigcup_{j=1}^{l} B_{d_X}\left(x_j, \frac{\delta_{x_j}}{2}\right).$$

Wähle $0 < \delta < \min\limits_{j=1,\ldots,l} \left(\frac{\delta_{x_j}}{2}\right)$. Sei nun $x, y \in X$ beliebig mit $d_X(x, y) < \delta$. Es existiert ein $j \in \{1, \ldots, l\}$ mit

$$x \in B_{d_X}\left(x_j, \frac{\delta_{x_j}}{2}\right).$$

Dies impliziert

$$d_X(y, x_j) \le d_X(y, x) + d_X(x, x_j) < \delta + \frac{\delta_{x_j}}{2} < \delta_{x_j},$$

also

$$d_X(f(x), f(y)) \le d_Y(f(x), f(x_j)) + d_Y(f(x_j), f(y)) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

$\square$

10 Lokalkompakte Räume und Kompaktifizierungen

Definition 1.119
Sei X ein topologischer Raum. Dann heißt X **`lokalkompakt`**, *wenn für alle $x \in X$ ein kompakter Teilraum $C \subset X$ sowie eine offene Menge $U \subset X$ existiert mit $x \in U \subset C$.*

Bemerkung 1.120

1. *$\mathbb{R}^m$ ist lokalkompakt: $x \in (a_1, b_1) \times \ldots \times (a_m, b_m) \subset [a_1, b_1] \times \ldots \times [a_m, b_m]$.*

2. *Kompakte Räume sind lokalkompakt.*

3. *$\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \ldots$ ist nicht lokalkompakt (weder in der Box-, noch in der Produkttopologie).*

4. *$[0, 1] \times [0, 1] \times \ldots$ ist kompakt in der Produkttopologie aber nicht einmal lokalkompakt in der Boxtopologie.*

5. *$\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ ist nicht lokalkompakt.*

6. *Seien X_α, $\alpha \in J$, topologische Räume (mit J einer beliebigen Indexmenge). Dann ist $\prod\limits_{\alpha \in J} X_\alpha$ lokalkompakt in der Produkttopologie genau dann, wenn alle X_α lokalkompakt sind und fast alle X_α kompakt sind (Übung).*

Definition 1.121
Sei X ein topologischer Raum. Dann heißt ein Paar (φ, Y) bestehend aus einem kompakten Hausdorffraum Y und einer stetigen Abbildung $\varphi\colon X \to Y$ eine **`Kompaktifizierung`** *von X, falls folgende Bedingungen erfüllt sind:*

1. *Die induzierte Abbildung $X \to \varphi(X)$, $x \mapsto \varphi(x)$ ist ein Homöomorphismus.*

2. *Es gilt $\overline{\varphi(X)}^{Y} = Y$.*

Zwei Kompaktifizierungen (φ, Y) und (φ', Y') heißen **`äquivalent`**, *wenn es einen Homömorphismus ψ gibt, der das Diagramm*

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "\varphi"] \arrow[dr, "\varphi'"'] & Y \\
& Y' \arrow[u, dotted, "\cong", "\Psi"']
\end{tikzcd}$$

kommutieren lässt.

Beispiel 1.122 *Die Umkehrabbildung der stereographischen Projektion ist eine Kompaktifizierung $\mathbb{R}^m \to S^m$ des $\mathbb{R}^m$.*

Theorem 1.123 *(Alexandroff)*
Sei X ein topologischer Raum. Dann ist X ein lokalkompakter Hausdorffraum, genau dann wenn ein kompakter Hausdorffraum Y existiert mit folgenden Eigenschaften:

i) $X \subset Y$ ist ein Teilraum.

ii) $\#(Y \backslash X) = 1$.

Es gilt dann folgende Eindeutigkeitsaussage:
Ist Y' ein weiterer kompaker Hausdorffraum mit i), ii), dann ist die kanonische Abbildung $h \colon Y = X \bigsqcup \{p\} \to Y' = X \bigsqcup \{q\}$ mit $h(x) := \begin{cases} x & , x \in X \\ q & , x = p \end{cases}$ ein Homöomorphismus.

Man bemerke, dass in der obigen Situation X offen in Y ist (denn Y ist T_1).

Beweis von Theorem 1.123

1. Eindeutigkeit:
   Zu zeigen ist, dass h ein Homöomorphismus ist. Jedenfalls ist h bijektiv, d.h. h ist Homöomorphismus genau dann, wenn gilt:
   $\forall U \subset Y : U$ ist offen $\Leftrightarrow h(U) \subset Y'$ ist offen.

   Fall $p \notin U$:
   Da Y, Y' Hausdorffräume sind, ist $X = Y \backslash \{p\}$ offen in Y, bzw. $X = Y' \backslash \{q\}$ offen in Y'. Es gilt $h(U) = U \subset X$, also gelten folgende Äquivalenzen:
   U ist offen in Y
   $\Leftrightarrow U$ ist offen in X (da X offen ist in Y, Y')
   $\Leftrightarrow U$ ist offen in Y'.

   Fall $p \in U$:
   Beachte, dass in diesem Fall für $C := Y \backslash U$ gilt: $U \subset X$. Wir haben folgende Äquivalenzen:
   $$\begin{array}{cl} & U \text{ ist offen in } Y. \\ \Leftrightarrow & C = Y \backslash U \text{ ist abgeschlossen in } Y. \\ \overset{Y \text{ Hausdorff, kompakt}}{\Leftrightarrow} & C \text{ ist kompakter Teilraum von } Y. \\ \overset{X \text{ Teilraum von } Y'}{\Leftrightarrow} & C \subset X \text{ ist kompakter Teilraum in } X. \\ \overset{X \text{ Teilraum von } Y'}{\Leftrightarrow} & C \subset Y' \text{ ist kompakter Teilraum} \\ \overset{Y' \text{ Hausdorff, kompakt}}{\Leftrightarrow} & C \text{ abgeschlossen in } Y' \\ \Leftrightarrow & h(U) = Y' \backslash C \text{ offen }. \end{array}$$
   Also ist h ein Homöomorphismus.

2. Existenz von Y mit den gewünschten Eigenschaften, wenn X lokalkompakt und Hausdorffraum ist:

Wir nehmen hierzu einen Punkt $\infty \notin X$ und setzen $Y := X \cup \{\infty\}$. Wir definieren die Topologie auf Y über:
$U \subset Y$ "offen", falls entweder

(Typ1) $U \subset X$ und U ist offen in X oder

(Typ2) $C := Y \backslash U \subset X$ und C ist kompakter Teilraum von X.

Dies definiert tatsächlich eine Topologie auf Y:

(a) $\emptyset \subset X$ offen in $X \implies \emptyset$ "offen" in Y (Typ 1)

(b) $Y = Y \backslash \emptyset$ und $\emptyset \subset X$ ist kompakter Teilraum von $X \implies Y$ "offen" in Y (Typ 2)

(c) Sind etwa $U_1, U_2 \subset Y$ "offen" in Y, so gilt

$$U_1 \cap U_2 = \begin{cases} \text{Typ 1} & \text{falls beide } U_j \text{ vom Typ 1 sind} \\ (Y \backslash C_1) \cap (Y \backslash C_2) = Y \backslash (C_1 \cup C_2) & \text{falls beide } U_j \text{ vom Typ 2 sind} \\ U_1 \cap (Y \backslash C_2) = U_1 \cap (X \backslash C_2) & \text{falls } U_1 \text{ Typ 1, } U_2 \text{ Typ 2.} \end{cases}$$

(d) Analog zeigt man: Beliebige Vereinigungen "offener" Mengen sind wieder "offen".

Wir zeigen nun, dass die Topologie auf X gerade die Teilraumtopologie $X \subset Y$ ist: Sei hierzu $U \subset Y$ offen. Dann ist $U \cap X \subset X$ offen in X, denn:
Fall U ist Typ 1: Dieser Fall ist klar.
Fall U ist Typ 2: Dann gilt $U = Y \backslash C$ mit $C \subset X$ einem kompakten Teilraum, und

$$U \cap X = (Y \backslash C) \cap X = X \backslash C$$

was offen in X ist.
Ist umgekehrt $U \subset X$ offen in X, so ist U ist offen in Y (da Typ 1).

Als nächstes zeigen wir, dass Y kompakt ist:
Sei hierzu $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ eine offene Überdeckung von Y.
$\implies \exists$ offene Teilmenge $Y \backslash C \in \mathcal{A}$ vom Typ 2. Sei nun $\tilde{\mathcal{A}} := \{A \cap X : A \in \mathcal{A}\}$.
$\implies \tilde{\mathcal{A}}$ ist Überdeckung von C mit offenen Teilmenge von X.
$\implies \exists \tilde{\mathcal{A}}' \subset \mathcal{A}$ endliches Teilsystem, sodass C immer noch von $\tilde{\mathcal{A}}'$ überdeckt wird.
$\implies \mathcal{A}' := \tilde{\mathcal{A}}' \cup (Y \backslash C) \subset \mathcal{A}$ ist endliche Teilüberdeckung von Y.
$\implies Y$ ist kompakt.

Es verbleibt zu zeigen: Y ist ein Hausdorffraum.
Seien hierzu $x, y \in Y$ beliebig.
Fall: $x, y \in X$: Klar, da X Hausdorffraum ist, $X \subset Y$ offen ist und die Topologie auf X der Teilraumtopologie entspricht.
Fall: $x \in X$, $y = \infty$: Wähle $C \subset X$ kompakten Teilraum, so dass C eine

Umgebung U von x in X enthält. Dann ist U eine Umgebung von x in Y und $Y\backslash C$ ist eine offene Umgebung von ∞ in Y (Typ 2). Es gilt $U\cap(Y\backslash C) \subset C\cap(Y\backslash C) = \emptyset$. Also ist Y Hausdorff.

3. Existiert zum topologischen Raum X ein topologischer Raum Y mit den besagten Eigenschaften, dann ist X lokalkompakt und Hausdorff:
   X ist Hausdorff, da X ein Teilraum des Hausdorffraums Y ist.
   X ist lokalkompakt: Sei hierzu $x \in X$ und $Y\backslash X =: \{p\}$. Wähle disjunkte Umgebungen $U \subset Y$ von x und V von p. Dann ist $C := Y\backslash V$ ein kompakter Teilraum von X der die Umgebung U von x enthält. □

Korollar 1.124
Sei X ein lokalkompakter Hausdorffraum, der nicht kompakt ist. Dann ist für jedes Y wie in Theorem 1.123 die Inklusionsabbildung $\iota_{X,Y}\colon X \hookrightarrow Y$ eine Kompaktifizierung. Ist Y' ein weiterer Raum der die gleichen Eigenschaften wie Y in Theorem 1.123 hat, so sind die Kompaktifizierungen $(\iota_{X,Y}, Y)$ und $(\iota_{X,Y'}, Y')$ äquivalent.

Definition 1.125
*Der Raum $\hat{X} := Y$ aus Theorem 1.123 heißt die **Alexandroff-Kompaktifizierung** des lokalkompakten und nicht kompakten Hausdorffraums X; $\hat{X}$ wird aus offensichtlichen Gründen auch die **Einpunktkompaktifizierung** von X genannt.*

Diese Definition ist sinnvoll, da $\hat{X}$ im Wesentlichen eindeutig bestimmt ist (ebenfalls nach Theorem 1.123).

1.Juni

Lemma 1.126
Sei X ein Hausdorffraum, $Y \subset X$ ein kompakter Teilraum und $x_0 \in X\backslash Y$. Dann existieren offene Mengen $U, V \subset X$ mit $U \cap V = \emptyset$ und $x_0 \in U$, $Y \subset V$.

Proof
Dies ist enthalten im Beweis von Theorem 1.100 ii). □

Theorem 1.127
Sei X ein Hausdorffraum. Dann ist X lokalkompakt, genau dann wenn zu jedem $x \in X$ und zu jeder Umgebung U von x eine Umgebung V von x existiert so dass $\bar{V} \subset X$ ein kompakter Teilraum ist mit $\bar{V} \subset U$.

Proof

$\Leftarrow$: Zu $x \in X$ kann man nach Voraussetzung eine Umgebung V von x wählen mit $\bar{V}$ kompakt, also $x \in V \subset \bar{V}$ und somit ist X lokalkompakt.

$\Rightarrow$ Sei nun X lokalkompakt, $x \in U$ mit $U \subset X$ offen in X. Sei Y wie in Alexandroff's Theorem und $C := Y \backslash U$.
$\Longrightarrow$ C ist kompakter Teilraum von Y (da U wegen der Konstruktion von Y auch offen in Y ist, ist C abgeschlossen in Y).
$\Longrightarrow$ $\exists \tilde{U}, \tilde{V} \subset Y$ offen in Y mit $x \in \tilde{U}, C \subset \tilde{V}, \tilde{U} \cap \tilde{V} = \emptyset$ (diese Mengen existieren nach Lemma 1.126).
$\Longrightarrow$ $\tilde{U} \subset Y \backslash \tilde{V} \implies \bar{\tilde{U}}^Y \subset Y \backslash \tilde{V} \subset Y \backslash C = U$ und $\bar{\tilde{U}}^Y$ ist kompakt
$\Longrightarrow$ Behauptung mit $V := \tilde{U}$ (man beachte $\bar{\tilde{U}}^X \subset \bar{\tilde{V}}^Y$). □

6.Juni

Korollar 1.128
Sei X ein lokalkompakter Hausdorffraum, $A \subset X$ ein Teilraum. Ist A entweder abgeschlossen oder offen in X, so ist A ebenfalls lokalkompakt.

Proof
Sei A abgeschlossen in X und sei $x \in A$. Es existiert jedenfalls ein $C \subset X$ kompakter Teilraum, welcher eine Umgebung U von x in X enthält: $x \in U \subset C$. Die Menge $C \cap A$ ist abgeschlossen in C, also auch ein kompakter Teilraum, und $U \cap A$ ist eine Umgebung von x in der Teilraumtopologie von A, und es gilt $x \in U \cap A \subset C \cap A \implies$ A ist lokalkompakt.
Sei A nun offen in X und $x \in A$. Dann ist A eine Umgebung in X von $x \overset{\text{Theorem 1.127}}{\Longrightarrow} \exists$ Umgebung V in X von x mit $\bar{V}^X$ kompakt und $\bar{V}^X \subset A$. Setze nun $C := \bar{V}^X$. Dann ist C kompakt und enthält die Umgebung V von x in A. □

Korollar 1.129
Sei X ein topologischer Raum X. Dann ist X lokalkompakt und Hausdorff, genau dann wenn X homöomorph ist zu einer offenen Teilmenge eines kompakten Hausdorffraums.

Proof
Korollar 1.128 liefert die eine Richtung, Alexandroff's Theorem die andere Richtung. □

Die folgende Bemerkung ist nicht klausurrelevant, aber man sollte sie im Hinterkopf behalten:

Bemerkung 1.130 *i) $\mathbb{R}$ hat auch eine Kompaktifizierung $\iota : \mathbb{R} \to Y$ mit $\#(Y \backslash \iota(R)) = 2$. Man kann einfach $\mathbb{R} \overset{\sim}{=} (-1,1) \hookrightarrow [-1,1]$ betrachten*

ii) Magi hat in 1965 bewiesen, dass es keine Kompaktifizierung $\iota : Y \to \mathbb{R}$ von $\mathbb{R}$ gibt mit $\#(Y \backslash \iota(\mathbb{R})) \in \mathbb{N}_{\geq 3}$.

iii) Ist $m \geq 2$, so hat Magi auch bewiesen, dass keine Kompaktifizierung $\iota : Y \to \mathbb{R}^m$ von $\mathbb{R}^m$ mit $\#(Y \backslash \iota(\mathbb{R}^m)) \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ existiert.

Es gibt weitere sinnvolle Kompaktifizierungen von lokalkompakten Hausdorffräumen (nicht klausurrelevant):

Theorem 1.131 *(Stone-Cech-Kompaktifizierung, 1957)*
Sei X ein lokalkompakter Hausdorffraum (man könnte hier etwas allgemeiner Räume zulassen). Dann existiert bis auf Äquivalenz genau eine Kompaktifizierung (Y, φ) von Y mit folgender universeller Eigenschaft: Ist Z ein kompakter Hausdorffraum und $f \colon X \to Z$ stetig, so existiert genau eine stetige Abbildung $f^\varphi \colon Y \to Z$ mit

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "f"'] & Y \arrow[dl, dotted, "\exists! f^\varphi"] \\ Z & \end{tikzcd}$$

kommutiert.

Proof Ein vollständiger Beweis lässt sich im Buch “Topology” von Munkres finden (§ 38 in der second edition) finden. Der wesentliche Punkt für die Existenz von Y ist, dass sich Räume wie X in einen Raum der Art

$$[0,1]^J = \prod_{\alpha \in J} X_\alpha, \quad X_\alpha := [0,1],$$

topologisch einbetten[2] lassen, wobei J eine Indexmenge ist mit

$$\{\text{stetige Funktionen } X \to [0,1]\} = \{\varphi_\alpha : X \to [0,1] \mid \alpha \in J\}.$$

Ist $\varphi' : X \to [0,1]^J$ so eine Einbettung, so leistet die induzierte Abbildung $\varphi : X \to Y := \iota(\bar{X})$ das gewünschte.
Die Eindeutigkeit folgt aus einem abstrakten kategorientheoretischen Argument. Etwas spezieller, kann man wie folgt vorgehen: Angenommen, es existierte eine weitere Kompaktifizierung $\varphi' \colon X \to Y'$ mit der gleichen universellen Eigenschaft. Dann gibt es die gestrichelten stetigen Abbildungen Φ, Φ':

$$\begin{tikzcd} & Y \arrow[d, dotted, "\Phi"'] \arrow[dd, dotted, bend left, "id_Y"] \\ X \arrow[ur, "\varphi"] \arrow[r, "\varphi'"] \arrow[dr, "\varphi"'] & Y' \arrow[d, dotted, "\Phi'"'] \\ & Y \end{tikzcd}$$

Da beide Dreiecke kommutieren gilt $\Phi' \circ \Phi \circ \varphi = \varphi$ und $id_Y \circ \varphi = \varphi$, wegen der Eindeutigkeitsaussage der universellen Eigenschft muss dann aber $\Phi' \circ \Phi = id_Y$. Analog zeigt man $\Phi \circ \Phi' = id_{Y'}$. Dies zeigt, dass Φ ein Hömo ist und φ äquivalent zu φ' ist. □

---

[2]Eine Abbildung zwischen topologischen $T : A \to B$ heißt eine `topologische Einbettung`, falls T stetig und injektiv ist und die von T induzierte Abbildung $A \to T(B)$, $x \mapsto T(x)$, ein Homöomorphismus ist.

11 Abzählbarkeitsaxiome und Separabilitätsaxiome

Wir beschäftigen uns nun mit der folgenden Frage: Unter welchen Bedindingen ist ein topologischer Raum X metrisierbar (d.h., wann gibt es eine Metrik auf X die die gegebene Topologie induziert)? Es stellt sich heraus, dass man eine geeignete topologische Abzählbedingung und geeignete Trennungsbedingung an X stellen muss.

11.1 Abzählbarkeitsaxiome

Definition 1.132
Ein topologischer Raum erfüllt das **`erste Abzählbarkeitsaxiom`**, *falls für alle $x \in X$ eine abzählbare Kollektion $\mathcal{B}_x$ von Umgebungen von x existiert, so dass für jede Umgebung U von x ein $B \in \mathcal{B}_x$ existiert mit $x \in B \subset U$ (d.h., falls jedes x hat eine abzählbare Umgebungsbasis hat).*

Wir werden dann auch einfach sagen, dass X erstabzählbar sei.

Beispiel 1.133
Metrische Räume erfüllen das erste Abzählbarkeitsaxiom, denn zu $x \in (X, d)$ kann man $\mathcal{B}_x = \left\{B_d\left(x, \frac{1}{n}\right) : n \in \mathbb{N}\right\}$ betrachten.

Theorem 1.134
Es erfülle X das erste Abzählbarkeitsaxiom. Dann gelten folgende Aussagen:

i) Für alle Teilmengen $A \subset X$ und alle $x \in \bar{A}$ existiert eine Folge $(x_n) \subset A$ mit $x_n \to x$.

ii) Ist Y ein topologischer Raum und hat eine Abbildung $f\colon X \to Y$ die Eigenschaft, dass für alle $x \in X$ und alle Folgen $(x_n) \subset X$ die Implikation $x_n \to x \implies f(x_n) \to f(x)$ erfüllt ist $(n \to \infty)$, so ist f stetig.

Proof
Genau wie für X metrisierbar. □

8.Juni

Definition 1.135
Ein topologischer Raum erfüllt das **`zweite Abzählbarkeitsaxiom`**, *falls es eine abzählbare Basis der Topologie auf X gibt.*

Wir werden dann X auch einfach zweitabzählbar nennen.

Bemerkung 1.136

i) Das zweite Abzählbarkeitsaxiom impliziert das erste:
Sei $\mathcal{B}$ eine abzählbare Basis. Zu $x \in X$ wähle dann $\mathcal{B}_x := \{B \in \mathcal{B} : x \in B\}$.

ii) Es gibt metrische Räume, die nicht das zweite Abzählbarkeitsaxiom erfüllen: Nehme zum Beispiel den unendlichen Produktraum $(\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \dots, d_\infty)$ *mit*

$$d_\infty((x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (y_n)_{n\in\mathbb{N}}) := \sup_{n\in\mathbb{N}} \min(|x_n - y_n|, 1).$$

iii) Kompakte metrische Räume sind immer zweitabzählbar: Für jedes $n \in \mathbb{N}$ *wähle eine endliche offene Überdeckung des kompakten Raums* X *von* $\frac{1}{n}$*-Bällen. Die Menge all dieser Bälle ist abzählbar und eine Basis der Topologie von* X.

Theorem 1.137

i) Sei X *ein zweitabzählbarer Raum und sei* $A \subset X$ *ein Teilraum. Dann ist* A *auch zweitabzählbar.*

ii) Seien $X_\alpha,\ \alpha \in J$ *topologische Räume mit* J *einer abzählbaren Indexmenge. Dann sind alle* X_α *zweitabzählbar genau dann, wenn* $\prod_{\alpha\in J} X_\alpha$ *zweitabzählbar ist in der Produkttopologie.*

Beide Aussagen stimmen auch für "erstabzählbar".

Proof i) Etwa für zweitabzählbar: Ist $\mathcal{B}$ eine abzählbare Basis der Topologie auf X, so ist $\mathcal{B}_A := \{A \cap B \colon B \in \mathcal{B}\}$ eine abzählbare Basis der Teilraumtopologie auf A. Analog für 'erstabzählbar'.
ii) Übung. $\square$.

Theorem 1.138
Sei X *ein zweitabzählbarer topologischer Raum. Dann gelten folgende Aussagen:*

i) Jede offene Überdeckung $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ *von* X *enthält ein abzählbares Teilsystem* $\mathcal{A}' \subset \mathcal{A}$*, welches* X *immer noch überdeckt.*

ii) Es existiert eine abzählbare dichte Teilmenge D *von* X *(d.h.* D *ist abzählbar mit* $\bar{D} = X$*).*

Proof
Sei im Folgenden $\mathcal{B} = \{B_n : n \in \mathbb{N}\}$ eine abzählbare Basis der Topologie auf X.

i) Setze $J := \{n \in \mathbb{N} : \exists A \in \mathcal{A} \text{ mit } B_n \subset A\}$. Zu jedem $n \in J$ sei $A_n \in \mathcal{A}$ mit $B_n \subset A_n$ beliebig, aber fest gewählt. Dann ist $\mathcal{A}' = \{A_n : n \in J\} \subset \mathcal{A}$ abzählbar, aber auch eine Überdeckung von X, denn: Zu jedem $x \in X$ existiert ein $A \in \mathcal{A}$ mit $x \in A \implies \exists n \in \mathbb{N}$ mit $x \in B_n \subset A \implies n \in J \implies x \in B_n \subset A_n$.

ii) Setze $J := \{n : B_n \neq \emptyset\}$. Zu jedem $n \in J$ sei $x_n \in B_n$. Setze $D := \{x_n : n \in J\}$. Dann ist D abzählbar und dicht in X. $\square$

Definition 1.139

i) *Ein topologischer Raum, der die Eigenschaft i) von Theorem 1.138 erfüllt, heißt* ***Lindelöf-Raum****.*

ii) *Ein topologischer Raum, der die Eigenschaft ii) von Theorem 1.138 erfüllt, heißt* ***separabel****.*

Theorem 1.140
Sei X ein metrisierbarer topologischer Raum. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

i) *X ist separabel.*

ii) *X ist Lindelöf.*

iii) *X ist zweitabzählbar.*

Proof
Noch zu zeigen: i) $\Rightarrow$ iii) und ii) $\Rightarrow$ iii).

i) $\Rightarrow$ iii): Sei D abzählbar mit $\bar{D} = X$. Dann ist $\mathcal{S} = \{B_d(y, \frac{1}{n}) : y \in D, n \in \mathbb{N}\}$ eine abzählbare Basis der metrischen Topologie auf X, denn: Sei $x \in X$ und $U \subset X$ offene Umgebung von x. Wähle $r > 0$ mit $B_d(x, r) \subset U$. Wähle $n > \frac{2}{r}$ und $y \in D$ mit $y \in B_d(x, \frac{1}{n})$. Es gilt nun $x \in B_d\left(y, \frac{1}{n}\right) \subset B_d(x, r) \subset U$, wegen der Dreiecksungleichung und $n > \frac{2}{r}$.

ii) $\Rightarrow$iii): Zu jedem $n \in \mathbb{N}$ sei $(x_j)_{j\in\mathbb{N}}$ so gewählt, dass $X = \bigcup_{j\in\mathbb{N}} B\left(x_j, \frac{1}{n}\right)$ (X ist Lindelöf). Dann ist $\mathcal{B} := \left\{B_d\left(x_j, \frac{1}{n}\right) : n \in \mathbb{N}, j \in \mathbb{N}\right\}$ eine abzählbare Basis. □

11.2 Separationsaxiome

Definition 1.141
Sei X ein T_1-Raum.

i) X heißt ***regulär****, falls für alle $x \in X$ und alle abgeschlossenen Teilmengen $A \subset X\backslash\{x\}$ offene Mengen $U, V \subset X$ existieren mit $U \cap V = \emptyset$ und $x \in U$ sowie $A \subset V$.*

ii) X heißt ***normal****, falls zu beliebigen disjunkten abgeschlossenen Teilmengen $A, B \subset X$ offen Mengen $U, V \subset X$ existieren mit $U \cap V = \emptyset$ und $A \subset U$ sowie $B \subset V$.*

Bemerkung 1.142

i) Regulär $\Longrightarrow$ Hausdorff.

ii) Normal $\Longrightarrow$ Regulär.

iii) $\mathbb{R}$ mit der Topologie zur Basis $\mathcal{B}_{sorg} := \{[a, b) : a < b\}$ ist normal ($\Longrightarrow$ regulär); hier steht 'sorg' für 'Sorgenfrey'. Hingegen ist der Produktraum $\left(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{\mathcal{B}_{sorg}}\right) \times \left(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{\mathcal{B}_{sorg}}\right)$ regulär, aber nicht normal.

iv) Wir setzen $Y := \left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\} \subset \mathbb{R}$ und definieren eine Basis $\mathcal{B}$ auf $\mathbb{R}$ durch $A \in \mathcal{B}$, genau dann wenn es reelle Zahlen $a < b$ gibt mit $A = (a, b)$ oder wenn es reelle Zahlen $a < b$ gibt mit $A = (a, b) \setminus Y$. Dann ist $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{\mathcal{B}})$ ist Hausdorff, aber nicht regulär (Übung).

15.Juni

Lemma 1.143
Sei X ein T_1-Raum. Dann gelten folgende Aussagen:

i) X regulär, genau dann wenn für alle $x \in X$ ein Umgebung V von x existiert mit $\bar{V} \subset U$.

ii) X ist normal, genau dann wenn für alle abgeschlossenen Mengen $A \subset X$ und alle offenen Mengen $U \subset X$ mit $A \subset U$ eine offene Menge $V \subset X$ existiert mit $A \subset V$ und $\bar{V} \subset U$.

Proof

i) $\Rightarrow$: Sei X regulär. Setze $B := X \backslash U$. Dann ist B abgeschlossen und $x \notin B$, es gibt also $\exists V, W \subset X$ offen mit $V \cap W = \emptyset$ und $x \in V,\ B \subset W$. Aus $V \subset X \backslash W$ folgt

$$\bar{V} \subset \overline{X \backslash W} = X \backslash W \subset X \backslash B = U.$$

$\Leftarrow$: Sei nun $x \in X,\ B \subset X$ abgeschlossen und $x \neq B$. Dann ist also $x \in U := X \backslash B$, und es gibt $V \subset X$ offen mit $x \in V$ und $V \subset \bar{V} \subset U$. Also gilt $x \in V$ und $B \subset X \backslash \bar{V}$, sowie $V \cap \left(X \backslash \bar{V}\right) = \emptyset$.

ii) Völlig analog. □

Theorem 1.144

i) Sei X regulär und $Y \subset X$ ein Teilraum. Dann ist Y regulär.

ii) Sei $X_\alpha,\ \alpha \in J$ topologische Räume (mit J einer beliebigen Indexmenge). Dann ist $\prod_{\alpha \in J} X_\alpha$ regulär in der Produkttopologie genau dann, wenn alle X_α regulär sind.

Proof

i) Y ist ein T_1-Raum, denn $\overline{\{y\}}^Y = \overline{\{y\}}^X \cap Y = \{y\} \cap Y = \{y\}$. Sei nun $x \in Y,\ B \subset Y$ abgeschlossen in Y, $x \notin B \implies B = \bar{B}^Y = \bar{B}^X \cap Y \implies x \notin \bar{B}^X \implies \exists U, V \subset X$ offen in X,
disjunkt mit $x \in U,\ \bar{B}^X \subset V \implies U \cap Y,\ V \cap Y$ offen in Y, disjunkt und $x \in U \cap V,\ B \subset V \cap Y \implies Y$ regulär.

ii) $\Rightarrow$: X_α ist homöomorph zu einem Teilraum von $\prod_{\alpha \in J} X_\alpha \overset{i)}{\implies} X_\alpha$ ist regulär (wir nehmen wie bei allen unendlichen Produkten an, dass alle Faktoren nichtleer sind).

$\Leftarrow$: $\prod_{\alpha \in J} X_\alpha$ ist jedenfalls T_1, weil dies ein Hausdorff ist. Wir werden nun das obige Lemma benutzen: Sei $x = (x_\alpha) \in \prod_{\alpha \in J} X_\alpha$ und $U \subset \prod_{\alpha \in J} X_\alpha$ offen mit $x \in U$. Wähle Basiselement $\prod_\alpha U_\alpha$ mit $x \in \prod_\alpha U_\alpha \subset U$ und setze

$$V_\alpha := \begin{cases} X_\alpha, \text{ falls } U_\alpha = X_\alpha \\ \text{Umgebung von } x_\alpha \text{ in } X_\alpha \text{ deren Abschluss in } X_\alpha \text{ enthalten ist, sonst} \end{cases}$$

$\implies V := \prod_\alpha V_\alpha$ ist Umgebung von x und

$$\bar{V} = \prod_{\alpha \in J} \bar{V_\alpha} \subset \prod_{\alpha \in J} U_\alpha \subset U.$$

Das heißt, $\prod_{\alpha \in J} X_\alpha$ ist regulär.

$\square$

Theorem 1.145
Jeder reguläre zweitabzählbare Raum ist normal.

Proof
Seien $A, B \subset X$ abgeschlossen mit $A \cap B = \emptyset$. Nimm eine abzählbare Basis $\mathcal{B}$ der Topologie auf X. Zu jedem $x \in A$ existiert eine Umgebung U von x mit $U \cap B = \emptyset$. Wähle Umgebung V von x mit $\bar{V} \subset U$ sowie $W \in \mathcal{B}$ mit $x \in W \subset V$. Wähle nun für jedes $x \in A$ so ein $W \implies A \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} W_n$ mit W_n offen und $\bar{W_n} \cap B = \emptyset$. Analog $B \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} Y_n$ mit Y_n offen und $\bar{Y_n} \cap A = \emptyset$. Setze $W_n' := W_n \setminus \bigcup_{i=1}^n \bar{Y_i}$ und $Y_n' := Y_n \setminus \bigcup_{n=1}^n \bar{W_i}$ sowie $W' := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} W_n'$ und $Y' := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} Y_n'$. Dann sind W', Y' offen und es gilt $A \subset W$ und $B \subset Y'$. Noch zu zeigen: $W' \cap Y' = \emptyset$. Dies sieht man wie folgt: Aus $x \in W' \cap Y'$ folgt Existenz von $j, k \in \mathbb{N}$ mit $x \in W_j' \cap Y_k'$. Sei etwa $j \leq k \implies x \in W_j$, aber $x \notin \bar{W_j}$, da $x \in Y_k' = Y_k \setminus \bigcup_{i=1}^k \bar{W_i} \implies$ Widerspruch. Der Fall $j > k$ geht analog. Damit ist X normal. $\square$

Theorem 1.146
Jeder metrisierbare Raum X ist normal.

Proof
Sei d eine die Topologie auf X induzierende Metrik auf X. Seien $A, B \subset X$ abgeschlossen mit $A \cap B = \emptyset$. Wähle zu jedem $x \in A$ ein $\varepsilon_x > 0$ mit $B_d(x, \varepsilon_x) \cap B = \emptyset$ und wähle zu jedem $y \in B$ ein $\varepsilon_y > 0$ mit $B_d(y, \varepsilon_y) \cap A = \emptyset$. Setze $U = \bigcup_{a \in A} B_d\left(a, \frac{\varepsilon_a}{2}\right)$ und $V = \bigcup_{b \in B} B_d\left(b, \frac{\varepsilon_b}{2}\right)$. Daraus folgt $U \cap V = \emptyset$ mit $A \subset U$ und $B \subset Y$, und U sowie V sind offensichtlich offen. $\square$

Theorem 1.147

i) Sei X normal und $A \subset X$ ein abgeschlossener Teilraum. Dann ist A normal.

ii) X ist regulär und Lindelöf. Dann ist X normal.

Proof
Übungsaufgabe. $\square$

Theorem 1.148 *(Urysohn's Lemma)*
i) Ist X ein T_1-Raum mit der Eigenschaft, dass für alle $A, B \subset X$ abgeschlossen mit $A \cap B = \emptyset$ eine stetige Funktion $f\colon X \to [0,1]$ existiert mit $f(x) = 0$ für alle $x \in A$ und $f(x) = 1$ für alle $x \in B$, so ist X normal.

ii) Sei X ein normaler Raum, $A, B \subset X$ abgeschlossen mit $A \cap B = \emptyset$. Dann existiert eine stetige Funktion $f\colon X \to [0,1]$ mit $f(x) = 0$ für alle $x \in A$ und $f(x) = 1$ für alle $x \in B$.

Da es für alle reellen Zahlen $a < b$ einen Homöomorphismus $\phi : [a, b] \to [0, 1]$ mit $\phi(a) = 0, \phi(b) = 1$ gibt, kann man überall im Urysohn-Lemma $[0, 1]$ durch $[a, b]$ ersetzen, wobei dann $f(x) = a$ für alle $x \in A$ und $f(x) = b$ für alle $x \in B$ gilt.

20.Juni

Proof of Urysohn's Lemma.
i) Die Mengen A und B werden durch die offenen Mengen $f^{-1}[0, \frac{1}{2})$ und $f^{-1}(\frac{1}{2}, 1]$ getrennt, d.h. X ist normal.

ii) Wir erklären zunächst die Beweisidee zur Konstruktion von f mit den gewünschten Eigenschaften: Die Normalität von X wird benutzt, um zu jedem $p \in \mathbb{Q}$ eine offene Menge $U_p \subset X$ zu konstruieren, so dass $A \subset U_0$, $U_1 = X \backslash B$ und $p < q \implies \bar{U}_p \subset U_q$, sowie $U_p = \emptyset$ für alle $p < 0$ und $U_p = X$ für alle $p > 0$. Wenn man diese Konstruktion hinbekommen hat, kann man einfach

$$f\colon X \to [0,1], \;\; f(x) := \inf \mathbb{Q}(x) := \inf \{p \in \mathbb{Q} : x \in U_p\}$$

setzen. Dieses f ist dann stetig (wenn man die U_p wie oben hat, wird für die Stetigkeit von f wird die Normalität von X nicht mehr gebraucht).

Konstruktion von $\{U_p \subset X : p \in \mathbb{Q}\}$:

Sei zunächst

$$P := [0, 1] \cap \mathbb{Q}.$$

Wir setzen $U_1 := X \backslash B$. Da abgeschlossen in X ist mit $A \subset U_1$, und U_1 offen in X ist, impliziert die Normalität von X die Existenz von $U_0 \subset X$ offen mit $A \subset U_0$ und $\bar{U}_0 \subset U_1$. Sei nun $P = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ (also eine Abzählung von $\mathbb{Q}$), wobei wir $x_1 = 1$ und $x_2 = 0$ setzen. Setze außerdem $P_n := \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ und sei $n \geq 3$. Angenommen, U_p ist bereits definiert für alle $p \in P_n$, so dass gilt $p, q \in P_n,\ q < p \implies \bar{U}_p \subset U_q$. Wir wollen nun U_p konstruieren für alle $p \in P_{n+1}$, so dass für alle $p, q \in P_{n+1}$ mit $p < q$ gilt $\bar{U}_p \subset U_q$. Sei hierzu $r := x_{n+1} \notin \{0, 1\}$. Die Menge $P_{n+1} = P_n \cup \{r\}$ ist endlich und einfach geordnet bezüglich $<$, d.h. r hat einen direkten Voränger $p' \in P_{n+1}$ und einen direkten Nachfolger $s \in P_{n+1}$, insbesondere gilt also $p' < r < s$, was $p', s \in P_n$ zur Folge hat. Die Mengen $U_{p'}$ und U_s sind also bereits definiert. Aus der Normalität folgt die Existenz von U_r offen in X mit

$$\bar{U_{p'}} \subset U_r \subset \bar{U}_r \subset U_s.$$

Diese Konstruktion liefert das Gewünschte: Sind nämlich $p, q \in P_{n+1}$ mit $p < q$, so gibt es zwei Fälle. Im ersten Fall sind $p, q \in P_n$, was nach Induktionsvoraussetzung $\bar{U}_p \subset U_q$ impliziert. Im anderen Fall ist $p = r$ und $q \in P_n$. Dann gilt entweder $q \leq p'$, was

$$\bar{U}_q \subset \bar{U}_{p'} \subset U_r$$

impliziert, oder es gilt $q \geq s$, was

$$\bar{U}_r \subset \bar{U}_s \subset U_q$$

impliziert.
Wir haben also bis jetzt U_j definiert für alle $j \in P = \bigcup_n P_n$, so dass $p, q \in P,\ q < p \implies \bar{U}_p \subset \bar{U}_q$. Nun setzen wir

$$U_p := \begin{cases} \emptyset & , p < 0 \\ X & , p > 1 \end{cases}$$

für alle $p \in \mathbb{Q} \setminus P$. Erneut gilt $p, q \in \mathbb{Q},\ q < p \implies \bar{U}_p \subset \bar{U}_q$.

Ist f wie oben definiert, so hat f alle gewünschte Eigenschaften:

Falls $x \in A$, so gilt $x \in U_p$ für alle $p > 0$, also $\mathbb{Q}(x) = \mathbb{Q}_{\geq 0}$, und $f(x) = 0$. Falls $x \in B$, so liegt x in keinem U_p mit $p \leq 1$, d.h. $\mathbb{Q}(x) = \mathbb{Q}_{\geq 1}$ und $f(x) = 1$.
Wir müssen nur noch zeigen, dass f stetig ist. Hierzu bemerken wir folgende beiden Hilfsaussagen:

A1: $r \in \mathbb{Q},\ x \in \bar{U}_r \implies f(x) \leq r$. Dies sieht man wie folgt: Es gilt $x \in U_s$ für alle $s > r$, also $\mathbb{Q}(x) \supset \mathbb{Q}_{\geq r}$ und $f(x) \leq r$.

A2: $r \in \mathbb{Q},\ x \notin U_r \implies f(x) \geq r$. Dies sieht man wie folgt: $\mathbb{Q}(x) \cap \mathbb{Q}_{\leq r} = \emptyset \implies f(x) \geq r$.

Sei nun $x_0 \in X$ beliebig und $f(x_0) \in (c, d)$ mit $c < d$. Gesucht ist eine Umgebung U von x_0 mit $f(U) \subset (c, d)$. Wähle hierzu $p, q \in \mathbb{Q}$ mit $c < p < f(x_0) < q < d \implies U := U_q \setminus \bar{U}_p$ ist offen und $x_0 \in U$, denn: $f(x_0) < q \overset{A2}{\implies} x_0 \in U_q$ und $f(x_0) > p \overset{A1}{\implies} x_0 \notin \bar{U}_p \implies x_0 \in U$ und $f(U) \subset (c, d)$, da für alle $x \in U$ gilt: $x \in U_q \subset \bar{U}_q \overset{A1}{\implies} f(x) \leq q < d$. Analog folgt mit A2, dass $f(x) \geq p > c$. Wir haben also beweisen, dass f stetig ist.

$\square$

Theorem 1.149 *(Tietzescher Fortsetzungssatz)*
Sei X normal, $A \subset X$ ein abgeschlossener Teilraum und $f\colon A \to \mathbb{R}$ stetig. Dann existiert eine stetige Fortsetzung von $F\colon X \to \mathbb{R}$ von f.

Proof

Behauptung 1: Gilt $f(x) \in [-r, r]$ für alle $x \in A$ und einem $r > 0$, so existiert ein $g\colon X \to \mathbb{R}$ stetig mit $|g(x)| \leq \frac{r}{3}$ für alle $x \in X$ und $|g(a) - f(a)| \leq \frac{2r}{3}$ für alle $a \in A$.

Beweis: Setze $I_1 := \left[-r, -\frac{1}{3}r\right]$, $I_2 := \left[-\frac{1}{3}r, \frac{1}{3}r\right]$, $I_3 := \left[\frac{1}{3}r, r\right]$, $B := f^{-1}(I_1)$, $C := f^{-1}(I_3)$. Nach dem Lemma von Uryson gibt es dann eine stetige Funktion $g\colon X \to \left[-\frac{1}{3}r, \frac{1}{3}r\right]$ mit $g|_B \equiv -\frac{1}{3}r$, $g|_C \equiv \frac{1}{3}r$. Diese Funktion g hat die gewünschte Eigenschaften.

Behauptung 2: Ist $f(x) \in [-1, 1]$, so existiert eine stetige Fortsetzung $F\colon X \to [-1, 1]$ von f.

Beweis: Wegen Behauptung 1 existiert $g_1\colon X \to \mathbb{R}$ stetig mit $|g_1(x)| \leq \frac{1}{3}$ für alle $x \in X$ und

$$|f(a) - g_1(a)| \leq \frac{2}{3} \quad \text{für alle } a \in A.$$

Betrachte nun

$$f - g_1\colon A \to \left[-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right].$$

Dann gibt es wegen Behauptung 1 eine stetige Funktion $g_2\colon X \to \mathbb{R}$ mit $|g_2(x)| \leq \frac{1}{3}\frac{2}{3}$ und

$$|f(a) - g_1(a) - g_2(a)| \leq \frac{2}{3}\frac{2}{3} \text{ für alle } a \in A.$$

Induktiv sieht man nun, dass es für alle $n \in \mathbb{N}$ eine stetige Funktion $g_n\colon X \to \mathbb{R}$ gibt mit $|g_n(x)| \overset{(*)}{\leq} \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$ für alle $x \in X$ und

$$\left| f(a) - \sum_{i=1}^{n} g_i(a) \right| \overset{(**)}{\leq} \left(\frac{2}{3}\right)^n \quad \text{für alle } a \in A.$$

D.h., die Funktionenreihe

$$F\colon X \to \mathbb{R},\ F(x) := \sum_{n=1}^{\infty} g_n(x)$$

konvergiert wegen $(*)$ gleichmäßig (F ist also stetig), und $(*)$ impliziert auch $F \in [-1, 1]$. Wegen $(**)$ gilt $F|_A \equiv f$.

Behauptung 3: Es gilt der Fortsetzungssatz von Tietze.

Beweis: OBdA sei $f\colon A \to (-1, 1)$ (wegen $(-1, 1) \cong \mathbb{R}$). Wegen Behauptung 2 gibt es dann eine stetige Fortsetzung $\tilde{F}\colon X \to [-1, 1]$ von f. Setzte $D := \tilde{F}^{-1}(\{-1\}) \cup \tilde{F}^{-1}(\{1\})$. Aus $\tilde{F}(A) = f(A) \subset (-1, 1)$ folgt dann $D \cap A = \emptyset$. Nach dem Lemma von Urysohn gibt es dann $\phi\colon X \to [0, 1]$ stetig mit $\phi(D) = \{0\}$ und $\phi(A) = \{1\}$. Dann hat $F\colon X \to (-1, 1)$, $F(x) := \phi(x)\tilde{F}(x)$ alle gewünschten Eigenschaften. $\square$

22. Juni

Theorem 1.150 *(Urysohnscher Metrisierungssatz)*
Jeder reguläre zweitabzählbare Raum X ist metrisierbar.

Bemerkung 1.151
Reguläre zweitabzählbare Räume sind normal.

Für den Beweis des Urysohnschen Metrisierungssatzes benötigen wir die folgenden drei Hilfsaussagen:

Lemma 1.152
$\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \dots$ *mit der Produkttopologie ist metrisierbar.*

Proof
Übungsaufgabe. □

Lemma 1.153
Sei X ein zweitabzählbarer, regulärer Raum. Dann existiert eine abzählbare Familie von stetigen Funktionen $f_n \colon X \to [0,1]$, $n \in \mathbb{N}$, mit der folgenden Eigenschaft: Zu jedem $x_0 \in X$ und jeder Umgebung U von x_0 existiert ein $n \in \mathbb{N}$ mit $f_n(x_0) > 0$ und $f_n|_{X \setminus U} \equiv 0$.

Proof
Übungsaufgabe. □

Lemma 1.154
Sei X ein T_1-Raum und sei $f_\alpha \colon X \to [0,1]$, $\alpha \in J$ (mit J einer beliebigen Indexmenge), eine Familie von stetigen Funktionen mit der folgenden Eigenschaft: Zu jedem $x_0 \in X$ und jeder Umgebung U von x_0 existiert ein $\alpha \in J$ mit $f_\alpha|_{X \setminus U} \equiv 0$. Dann ist die Abbildung

$$F \colon X \to [0,1]^J \;\; F(x)_\alpha := f_\alpha(x), \;\; \alpha \in J,$$

eine topologische Einbettung, d.h. F ist injektiv, stetig und die von F induzierte Abbildung $X \to F(X)$ ist ein Homöomorphismus. Hierbei bezeichnet $[0,1]^J$ das Produkt

$$[0,1]^J := \prod_{\alpha \in J} X_\alpha, \;\; X_\alpha := [0,1] \quad \textit{für alle } \alpha \in J,$$

und ist mit der Produkttopologie versehen.

Proof
In der Übung. □

Proof of Urysohnscher Metrisierungssatz.

Wähle $\{f_n : n \in \mathbb{N}\}$ wie in Lemma 1.153. Dann ist nach Lemma 1.154 die Abbildung

$$F : X \to [0,1]^{\mathbb{N}}, \;\; F(x)_n := f_n(x), \;\; n \in \mathbb{N},$$

ist eine topologische Einbettung, d.h. $X \cong F(X)$, aber $F(X)$ ist metrisierbar nach Lemma 1.152. □

Ohne Beweis geben wir noch die Metrisierungscharakterisierung von Nagata-Smirnov an. Hierzu brauchen wir eine Definition, die auch an einer anderen Strelle nützlich sein wird:

Definition 1.155
Sei X ein topologischer Raum und $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ ein Mengensystem. Dann heißt $\mathcal{A}$...

i) ***lokalendlich**, falls zu jedem $x \in X$ eine Umgebung U von x existiert mit*

$$\#\{A \in \mathcal{A} : A \cap U \neq \emptyset\} < \infty$$

ii) ***abzählbar lokal endlich**, falls zu jedem $n \in \mathbb{N}$ ein lokalendliches Mengensystem $\mathcal{A}_n \subset \mathcal{P}(X)$ existiert mit $\mathcal{A} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{A}_n$.*

Theorem 1.156 *(Nagata-Smirnov)*
Ein topologischer Raum X ist metrisierbar genau dann, wenn X regulär ist mit einer abzählbar lokalendlichen Basis der Topologie.

Da Zweitabzählbarkeit offensichtlich die Existenz einer abzählbar lokal endlichen Basis impliziert, ist also sogar die $\Leftarrow$-Richtung von Nagata-Smirnov allgemeiner als der Urysohnsche Metrisierungssatz.

Definition 1.157
Sei X ein topologischer Raum, $\{A_\alpha : \alpha \in J\}$ eine indizierte Familie von Teilmengen von X. Dann heißt $\{A_\alpha : \alpha \in J\}$ ***lokal endlich indiziert (l.e.i.)**, falls zu jedem $x \in X$ eine Umgebung U von x existiert mit*

$$\#\{\alpha \in J : U \cap A_\alpha \neq \emptyset\} < \infty.$$

Bemerkung 1.158
Eine indizierte Familie $\{A_\alpha : \alpha \in J\}$ von Teilmengen des topologischen Raums X ist lokal endlich indiziert, genau dann wenn $\{A_\alpha : \alpha \in J\}$ ein lokal endliches Mengensystem ist und die Bedingung

$$\#\{\alpha \in J : A_\alpha = A\} < \infty \quad \text{für alle } A \subset X \text{ mit } A \neq \emptyset$$

erfüllt ist.

Definition 1.159
Sei X ein topologischer Raum und sei $\{U_\alpha : \alpha \in J\}$ eine indizierte offene Überdeckung von X. Eine mit der gleichen Indexmenge J indizierte Familie $\{\phi_\alpha : \alpha \in J\}$ von stetigen Funktionen $\phi_\alpha \colon X \to [0,1]$ heißt ***eine der Überdeckung** $\{U_\alpha : \alpha \in J\}$ **untergeordnete stetige Teilung der Eins**, falls folgende Voraussetzungen erfüllt sind:*

i) $\operatorname{supp}(\phi_\alpha) := \overline{\{x \in X : \phi_\alpha(x) \neq 0\}} \subset U_\alpha$ *für alle $\alpha \in J$*

ii) $\{\mathrm{supp}(\phi_\alpha) : \alpha \in J\}$ *ist lokalendlich indiziert*

iii) $\sum_{\alpha \in J} \phi_\alpha(x) = 1$ *für alle* $x \in X$.

Wir wollen nun zeigen, es auf metrisierbaren topologischen Räumen zu jeder indizierten offenen Überdeckung eine untergeordnete stetige Teilung der Eins gibt. Für den Beweis beötigen wir das folgende Schrumpfungslemma:

Lemma 1.160 *Ist* X *metrisierbar, so existiert zu jeder indizierten offenen Überdeckung* $\{U_\alpha : \alpha \in J\}$ *von* X *eine offene lokal endlich indizierte Überdeckung* $\{V_\alpha : \alpha \in J\}$ *von* X *mit* $\bar{V}_\alpha \subset U_\alpha$ *für alle* $\alpha \in J$.

Proof
Wir benutzen den Parakompaktheitssatz von Stone. Dieser besagt, dass jeder metrisierbare topologische Raum X folgende Parakompaktheitseigenschaft hat: Zu jeder offenen Überdeckung $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ existiert eine lokalendliche offene Überdeckung $\mathcal{B} \subset \mathcal{P}(X)$ von X, mit der Eigenschaft dass für alle $B \in \mathcal{B}$ ein $A \in \mathcal{A}$ mit $B \subset A$ existiert. Ein Beweis lässt sich Munkres finden (Theorem 41.4 in der second edition).

Wir setzen nun

$$\mathcal{A} := \left\{ A \subset X \text{ offen } : \exists \alpha \in J \text{ mit } \bar{A} \subset U_\alpha \right\}.$$

Da X regulär ist, ist $\mathcal{A}$ eine offene Überdeckung von X. Wähle $\mathcal{B}$ wie in obigen Satz von Stone und schreibe $\mathcal{B} = \{B_\beta : \beta \in K\}$ für eine Indexmenge K. Dann ist $\mathcal{B}$ ist lokal endlich indiziert. Sei $f\colon K \to J$ eine Abbildung mit $\bar{B}_\beta \subset U_{f(\beta)}$ für alle $\beta \in K$. Zu $\alpha \in J$ sei

$$V_\alpha := \bigcup \{B_\beta : \beta \in K \text{ und } \alpha = f(\beta)\}.$$

Da $\{B_\beta : \beta \in K \text{ und } \alpha = f(\beta)\}$ lokalendlich ist, folgt die erste Inklusion in

$$\bar{V}_\alpha \overset{(*)}{\subset} \bigcup \left\{ \bar{B}_\beta : \beta \in K \text{ und } \alpha \in f(\beta) \right\} \subset U_\alpha.$$

Noch zu zeigen: $\{V_\alpha : \alpha \in J\}$ ist lokal endlich indiziert: Ist $x_0 \in X$, so existiert (da $\mathcal{B}$ lokal endlich indiziert ist), eine Umgebung U von x_0 mit $U \cap B_\beta \neq \emptyset$ für höchstens endlich viele $\beta = \beta_1, \ldots, \beta_l \in K \implies V_\alpha \cap U \neq 0$ nur für $\alpha = f(\beta_1), \ldots, f(\beta_l)$. □

27. Juni

Theorem 1.161
Sei X *ein metrisierbarer topologischer Raum. Dann existiert zu jeder indizierten offenen Überdeckung* $\{U_\alpha : \alpha \in J\}$ *von* X *eine untergeordnete stetige Teilung der Eins* $\{\phi_\alpha : \alpha \in J\}$.

Proof
Nach dem Schrumpfungslemma gibt es eine lokal endlich indizierte offene Überdeckung $\{V_\alpha : \alpha \in J\}$ von X mit $\bar{V}_\alpha \subset U_\alpha$ für alle $\alpha \in J$. Analog gibt es eine lokal endlich indiziert offene Überdeckung $\{W_\alpha : \alpha \in J\}$ von X mit $\bar{W}_\alpha \subset V_\alpha$ für alle $\alpha \in J$. Da X ist normal ist, finden wir nach dem Lemma von Urysohn für alle $\alpha \in J$ eine stetige Funktion $\psi_\alpha \colon X \to [0,1]$ mit $\psi_\alpha(\bar{W}_\alpha) = \{1\}$ und $\psi_\alpha\left(X \backslash V_\alpha\right) = \{0\}$. Daraus folgt direkt

$$\operatorname{supp}(\psi_\alpha) \subset \bar{V}_\alpha \subset U_\alpha \text{ für alle } \alpha \in J.$$

Da $\{\bar{V}_\alpha : \alpha \in J\}$ lokal endlich indiziert ist, gilt dies auch für $\{\operatorname{supp}(\psi_\alpha) : \alpha \in J\}$. Setze

$$\psi \colon X \to \mathbb{R},\ \ \psi(x) = \sum_{\alpha \in J} \psi_\alpha(x).$$

Da $\{\operatorname{supp}(\psi_\alpha) : \alpha \in J\}$ lokal endlich indiziert ist, ist ψ ist stetig mit $\psi(x) > 0$ für alle $x \in X$ (letzteres, da jedes $x \in X$ in einem W_α liegen muss). Nun sieht man leicht, dass

$$\phi_\alpha \colon X \to [0,1],\ \ \phi_\alpha(x) := \frac{\psi_\alpha(x)}{\psi(x)}$$

alle gewünschten Eigenschaften hat. □

Chapter 2

Homotopie, Fundamentalgruppen und Überlagerungen

1 Grundbegriffe zur Homotopietheorie und Fundamentalgruppen

Mit den bisher behandelten topologischen Invarianten (Kompaktheit, Wegzusammenhang, usw.) kann man nicht einmal beweisen, dass $\mathbb{R}^2 \not\cong \mathbb{R}^3$. Dafür braucht man feinere topologische Invarianten, etwa Fundamentalgruppen.
Im Folgenden bezeichne

$$I := [0,1]$$

stets das Einheitsinterval (welches also mit der Teilraumtopologie $\subset \mathbb{R}$ versehen wird).

Definition 2.1
*Seien $f, f' \colon X \to Y$ stetige Abbildungen zwischen den topologischen Räumen X und Y. Dann heißen f und f' **homotop**, fall eine stetige Abbildung $F \colon X \times I \to Y$ existiert mit $F(\cdot, 0) = f$ und $F(\cdot, 1) = f'$. So ein F heißt **Homotopie** zwischen f und f'. Sind f und f' homotop, so schreibt man $f \simeq f'$. Ist f homotop zu einer konstanten Abbildung, so heißt f **nullhomotop**.*

Von nun an sei X ein beliebiger topologischer Raum.

Bemerkung 2.2
*Für einen Weg $\gamma \colon I \to X$ heißt $\gamma(0)$ der Anfangspunkt von γ und $\gamma(1)$ der Endpunkt von γ. Es sei außerdem daran erinnert, dass Wege für uns per Definition stetig sind. Wege $\gamma : I \to X$ der Anfangspunkt $\gamma(0)$ mit dem Endpunkt $\gamma(1)$ übereinstimmt, werden wir auch **Schleifen** nennen. Der Punkt $x_0 := \gamma(0) = \gamma(1)$ heißt dann die **Basis** der Schleife γ.*

Definition 2.3
*Seien $f, f' \colon I \to X$ Wege. Dann heißen f und f' **weghomotop**, falls sie den gleichen*

Anfangspunkt x_0, den gleichen Endpunkt x_1 haben und außerdem eine Homotopie $F\colon I\times I \to X$ zwischen f und f' existiert mit $F(0,\cdot) \equiv x_0$ und $F(1,\cdot) \equiv x_1$. So eine Abbildung F heißt dann eine ***Weghomotopie*** *zwischen f und f'. Sind f und f' weghomotop, so schreibt man $f \simeq_P f'$.*

Lemma 2.4
$\simeq$ und $\simeq_P$ sind Äquivalenzrelationen.

Proof
Wir geben den Beweis für Weghomotopien (für Homotopien geht alles analog).

Reflexivität: $f \simeq_P f$,denn $F\colon I \times I \to X,\ F(s,t) := F(s)$ ist eine Weghomotopie zwischen f und f.

Symmetrie: $f \simeq_P f' \implies f' \simeq_P f$,denn ist $F\colon I \times I \to X$ ein Weghomotopie zwischen f und f', so ist $\bar{F}(s,t) := F(s, 1-t)$ ist dann eine Weghomotopie zwischen f' und f.

Transitivität: $f \simeq_P f'$ und $f' \simeq_P f'' \implies f \simeq_P f''$, denn mit den entsprechenden Weghomotopien F, F' ist

$$G(s,t) = \begin{cases} F(s,2t) & ,\ t \leq \frac{1}{2} \\ F'(s,2t-1) & ,\ t \geq \frac{1}{2} \end{cases}$$

eine Weghomotopie von f nach f''.

Beispiel 2.5
i) Sei $A \subset \mathbb{R}^m$ ein konvexer Teilraum (d.h. zu je zwei Punkten in A verläuft ihre gradlinige Verbindung vollständig in A). Dann sind je zwei Wege $f, f'\colon I \to A$ mit $f(0) = f'(0)$ und $f(1) = f'(1)$ weghomotop: In der Tat, $F(s,t) = (1-t)f(s) + tf'(s)$ ist eine Weghomotopie zwischen f und f', die so genannte ***gradlinige Weghomotopie zwischen f und f''***.
ii) Auf $X = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ sei f der Weg von $(1,0)$ nach $(-1,0)$ der entlang der oberen Hälfte von S^1 verläuft, und sei f' der Weg von $(1,0)$ nach $(-1,0)$ der entlang der unteren Hälfte von S^1 verläuft. Dann sind f und f' nicht weghomotop bezüglich X, wohl aber bezüglich $\mathbb{R}^2$.

Weghomotopieäquivalenzklassen von Wegen werden im Folgenden mit $[f]$ bezeichnet. D.h., für Wege $f, f'\colon I \to X$ gilt $[f] = [f']$, genau dann wenn $f \simeq_P f'$.

Definition 2.6
Sind $f, g\colon I \to X$ Wege mit $f(1) = g(0)$, so ist der Weg $f * g\colon I \to X$ definiert durch

$$f * g(s) = \begin{cases} f(2s) & ,\ s \leq \frac{1}{2} \\ g(2s-1) & ,\ s \geq \frac{1}{2} \end{cases}.$$

Im obiger Situation ist $[f] * [g] := [f * g]$ wohldefiniert: Aus $f_0 \simeq_P f_1$ mittels der Weghomotopie F und $g_0 \simeq_P g_1$ mittels der Weghomotopie G, folgt $f_0 * g_0 \simeq f_1 * g_1$ mittels der Weghomotopie

$$H(s,t) := (F(\cdot,t) * G(\cdot,t))(s).$$

29. Juni

Theorem 2.7
Sei $x_0 \in X$ und bezeichne

$$\pi_1(X, x_0) := \{[f] : f(0) = x_0 = f(1)\}$$

die Menge der Weghomotopieklassen von Schleifen auf X mit Basis x_0. Dann ist

$$(\pi_1(X, x_0), *, [e_{x_0}])$$

eine Gruppe, wobei

$$e_{x_0} \colon I \to X, \ \ s \mapsto x_0$$

, die Konstante Schleife bezeichnet.
Gruppeninverse sind wie folgt gegeben: Für $[f] \in \pi_1(X, x_0)$ ist $[f]^{-1} := [\bar{f}]$ mit

$$\bar{f} \colon I \to X, \ \ \bar{f}(s) = f(1 - s)$$

der rückwärts durchlaufenen Schleife.

Für den Beweis benötigen wir:

Definition 2.8
Sei $f \colon I \to X$ ein Weg und $\varphi \colon I \to I$ stetig mit $\varphi(0) = 0$ und $\varphi(1) = 1$. Dann heißt φ eine ***Parametertransformation*** *und $f \circ \varphi$ die* ***Umparametrisierung des Weges f bezüglich*** *φ.*

Bemerkung 2.9
Alle Parametertransformationen $\varphi \colon I \to I$ erhalten die Weghomotopieklassen, d.h. für alle Wege $f : I \to X$ gilt $[f] = [f \circ \varphi]$. Eine kanonische Weghomotopie zwischen f und $f \circ \varphi$ und ist durch

$$F(s,t) = f\big(t \cdot \varphi(s) + (1 - t)s\big)$$

gegeben. Außerdem folgt wegen $\varphi(0) = 0$ und $\varphi(1) = 1$ noch, dass für $[f] \in \pi_1(X, x_0)$ auch $[f \circ \varphi] \in \pi_1(X, x_0)$ gilt.

Proof of Theorem 2.7

Assoziativität des Produkts: Zu zeigen ist, dass für je drei Schleifen $f, g, h\colon I \to X$ mit Basis x_0 gilt $(f*g)*h \simeq_P f*(g*h)$. Dies gilt, da $f*(g*h) = ((f*g)*h)\circ\varphi$ mit $\varphi : I \to I$ der eindeutig bestimmten stückweise linearen Parametertransformation, die

$$\varphi(0) = 0,\ \varphi(1/2) = 1/4,\ \varphi(3/4) = 1/2,\ \varphi(1) = 1$$

erfüllt.

$[e_{x_0}]$ ist das neutrale Element: Zu zeigen ist, dass für jede Schleife $f\colon I \to X$ mit Basis x_0 die Identitäten $f * e_{x_0} \simeq_P f \simeq_P e_{x_0} * f$ erfüllt sind. Dies gilt, da zum einen $f * e_{x_0} = f \circ \varphi$ mit $\varphi : I \to I$ der eindeutig bestimmten stückweise linearen Parametertransformation, die

$$\varphi(0) = 0,\ \varphi(1/4) = 1/2,\ \varphi(1/2) = 1,\ \varphi(1) = 1$$

erfüllt. Zum anderen gilt $e_{x_0} * f = f \circ \varphi'$ mit $\varphi' : I \to I$ der eindeutig bestimmten stückweise linearen Parametertransformation, die

$$\varphi'(0) = 0,\ \varphi'(1/2) = 0,\ \varphi'(1) = 1$$

erfüllt.

Inverse Elemente: Zu zeigen ist $f * \bar{f} \simeq_P e_{x_0} \simeq_P \bar{f} * f$ für jede Schleife $f\colon I \to X$ mit Basis x_0. Wegen $\bar{\bar{f}} = f$ reicht es $f * \bar{f} \simeq_P e_{x_0}$ zu zeigen. Der Weg $f * \bar{f}$ ist aber weghomotop zur konstanten Schleife e_{x_0} mittels der Weghomotopie

$$F(s,t) := F_1(s,t) * F_1(1-s,t),$$

wobei $F_1 : I \times I \to X$ gegeben ist durch

$$F_1(s,t) := \begin{cases} f(s), & s \in [0, 1-t] \\ f(1-t), & s \in [1-t, 1]. \end{cases}$$

Wir sind im Beweis dem Buch "Algebraic Topology" von Hatcher gefolgt (welches frei im Internet erhältlich ist).

Definition 2.10
Sei $x_0 \in X$. Dann heißt $\pi_1(X, x_0)$ die ***Fundamentalgruppe des topologischen Raum X bei x_0****.*

Die Gruppe $\pi_1(X, x_0)$ wird auch die `erste Homotopiegruppe von` X `bei` x_0 genannt (es gibt also auch höhere Fundamentalgruppen $\pi_n(X, x_0)$; siehe etwa Hatcher). Es gilt stets $\pi_1(X, x_0) = \pi_1(C, x_0)$ mit C der Wegzusammenhangskomponente von x_0. Hierbei wird C als Teilraum von X angesehen.

Beispiel 2.11
Sei A ein konvexer Teilraum des $\mathbb{R}^m$. Dann gilt $\pi_1(A, x_0) = \{[e_{x_0}]\}$ für alle $x_0 \in X$. Dies folgt unmittelbar aus dem ersten Teil von Bemerkung 2.5.

Definition 2.12
Seien $x_0, x_1 \in X$ und $\alpha\colon I \to X$ ein Weg von x_0 nach x_1. Wir definieren

$$\hat{\alpha}\colon \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(X, x_1), \ \ [f] \mapsto [\bar{\alpha}] * [f] * [\alpha].$$

Bemerkung 2.13

i) *$\hat{\alpha}$ ist wohldefiniert und hängt nur von $[\alpha]$ ab.*

ii) *Wenn X nicht wegzusammenhängend ist, wird es natürlich i.A. für beliebige $x_0, x_1 \in X$ keinen Weg α von x_0 nach x_0 geben.*

Theorem 2.14
Seien $x_0, x_1 \in X$ und $\alpha\colon I \to X$ ein Weg von x_0 nach x_1. Dann ist $\hat{\alpha}$ ein Gruppenisomorphismus.

Proof
$\hat{\alpha}$ ist jedenfalls ein (Gruppen-)Homomorphismus, denn

$$\hat{\alpha}([f]) * \hat{\alpha}([g]) = ([\hat{\alpha}] * [f] * [\alpha]) * ([\hat{\alpha}] * [g] * [\alpha]) = \hat{\alpha}([f] * [g]).$$

Außerdem ist $\hat{\alpha}$ bijektiv mit $(\hat{\alpha})^{-1} = \hat{\bar{\alpha}}$. □

Korollar 2.15
Ist X wegzusammenhängend, so gilt $\pi_1(X, x_0) \cong \pi_1(X, x_1)$ für alle $x_0, x_1 \in X$.

Der Isomorphismus aus dem Korollar 2.15 ist im Allgemeinen nicht kanonisch. Es gilt aber:

Theorem 2.16
Sei X wegszusammenhängend und $x_0, x_1 \in X$. Dann ist $\pi_1(X, x_0)$ kommutativ, genau dann wenn für alle Wege $\alpha, \beta\colon I \to X$ von x_0 nach x_1 die Bedingung $\hat{\alpha} = \hat{\beta}$ erfüllt ist.

Proof
Übungsaufgabe. □

Definition 2.17
*X heißt **einfach wegzusammenhängend**, falls X wegzusammenhängend ist und $\pi_1(X, x_0)$ trivial ist für ein $x_0 \in X$, d.h. $\pi_1(X, x_0) = \{[e_{x_0}]\}$.*

Dann ist $\pi_1(X, x)$ trivial für alle $x \in X$, wegen Korollar 2.15. Für die Trivialität von $\pi_1(X, x_0)$ schreibt man oft auch $\pi_1(X, x_0) = 0$.

Lemma 2.18
Sei X wegzusammenhängend. Dann ist X genau dann einfach wegzusammenhängend, wenn für alle Wege $\alpha, \beta\colon I \to X$ mit gleichem Anfangspunkt und gleichem Endpunkt die Bedingung $\alpha \simeq_P \beta$ erfüllt ist.

Proof

- $\Rightarrow$: Sei x_0 der Anfangspunkt von α und β und x_1 ihr gemeinsamer Endpunkt. Dann ist $\alpha * \bar{\beta}$ eine Schleife mit Basispunkt x_0. Da X einfach wegzusammenhängend ist, folgt $\alpha * \bar{\beta} \simeq_P e_{x_0}$, also $[\alpha * \bar{\beta}] * [\beta] = [e_{x_0}] * [\beta]$, und schließlich $[\alpha] = [\beta]$.
- $\Leftarrow$: Das ist trivial.

$\square$

Wir wollen nun zeigen, dass stetige Abbildungen zwischen punktierten topologischen Räumen kanonisch Gruppenhomomorphismen induzieren. Hierzu führen wir folgende Notation ein: Wir schreiben $h\colon (X, x_0) \to (Y, y_0)$, falls $x_0 \in X, y_0 \in Y$ und falls $h\colon X \to Y$ eine Abbildung mit $h(x_0) = y_0$ ist.

Definition 2.19
Für eine stetige Abbildung $h(X, x_0) \to (Y, y_0)$ zwischen den topologischen Räumen X und Y sei h_* definiert durch

$$h_*\colon \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, y_0), \;\; [f] \mapsto [h \circ f].$$

Dann heißt h_* der von h ***induzierte Gruppenhomomorphismus****.*

Bemerkung 2.20

i) Die Abbildung h_* ist wohldefiniert.

ii) Es gilt, $(h \circ g)_* = h_* \circ g_*$, wann immer es sinnvoll ist. Außerdem gilt $(id_{X,x_0})_* = id_{\pi_1(X,x_0)}$, falls $id_{X,x_0} : (X, x_0) \to (X, x_0)$ die Identität ist.

4. Juli

Theorem 2.21
Ist $h\colon (X, x_0) \to (Y, y_0)$ ein Homöomorphismus, so ist $h_*\colon \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, y_0)$ ein Gruppenisomorphismus.

Proof
Es gilt $(h_*)^{-1} = (h^{-1})_*$. $\square$

Das heißt, $\pi_1(X, x_0)$ ist also eine topologische Invariante in dem Sinne, das homöomorphe punktierte topologische Räume isomorphe Fundamentalgruppen haben. Insbesondere ist die Isomorphie der Fundamentalgruppen notwendig für die Homöomorphie.

2 Überlagerungen

Für den Moment werden Überlagerungen ein technisches Hilfsmittel für uns sein, um Fundamentalgruppen auszurechnen. Oft sind Überlagerungen mit gewissen Zusatzeigenschaften aber auch für sich interessant, etwa in der Differentialgeomtrie (Spin-Gruppen, die orientierbare Überlagerung einer Mannigfaltigkeit usw.).

Definition 2.22
Sei $p\colon E \to B$ ein stetige surjektive Abbildung zwischen topologischen Räumen.

i) Eine offene Menge $U \subset B$ heißt eine **Überlagerunsmenge von** *p, falls eine disjunkte Familie $\{V_\alpha : \alpha \in J\}$ offener disjunkter Teilmengen von E existiert (mit J einer beliebigen Indexmenge), so dass $p^{-1}(U) = \bigsqcup_{\alpha \in J} V_\alpha$ und so dass $p|_{V_\alpha}\colon V_\alpha \to U$ ein Homöomorphismus ist. Dann nennt man $\{V_\alpha : \alpha \in J\}$ auch eine Zerlegung von $p^{-1}(U)$ in Scheiben.*

ii) p heißt eine **Überlagerung***, falls es zu jedem $b \in B$ eine Umgebung U von b gibt, so dass U zugleich eine Überlagerungsmenge von p ist.*

iii) Sind E', B' topologische Räume, so heißt E' ein **Überlagerungsraum von** *B', falls eine Überlagerung $p'\colon E' \to B'$ exisiert.*

Lemma 2.23
Sei $p\colon E \to B$ eine Überlagerung. Dann gelten folgende Aussagen:

i) Für alle $b \in B$ trägt der Teilraum $p^{-1}(b) \subset E$ die diskrete Topologie.

ii) p ist offen.

Proof
Übung. □

Beispiel 2.24

1. *Sei X ein topologischer Raum und $n \in \mathbb{N}$. Dann ist $p\colon X \times \{1,\dots,n\} \to X$, $(x,j) \mapsto X$ eine Überlagerung. Hierbei wird $\{1,\dots,n\}$ mit der diskreten Topologie versehen, so dass $X \times \{1,\dots,n\}$ als n-fache disjunkte Kopie von sich selbst gelesen werden kann.*

2. *Die Abbildung*
$$p\colon \mathbb{R}^1 \to S^1, \quad x \mapsto (\cos(2\pi x), \sin(2\pi x))$$
ist eine Überlagerung: Sei etwa U_{rechts} :="rechter offener Halbkreis des Einheitskreises". Dann gilt
$$p^{-1}(U_{rechts}) = \bigsqcup_{n \in \mathbb{N}} V_n$$
mit $V_n := \left(n - \frac{1}{4}, n + \frac{1}{4}\right)$, und U_{rechts} wird zu einer Überlagerungsmenge von p. Analog für U_{links}, U_{oben}, U_{unten}, und diese Mengen überdecken S^1.

Bemerkung 2.25

i) Überlagerungen sind lokale Homöomorphismen. Es gibt aber viele sogar surjektive lokale Homöomorphismen, die aber dennoch keine Überlagerungen sind: Etwa

$$\mathbb{R}_+ \to S^1,\ x \mapsto (\cos(2\pi x), \sin(2\pi x)).$$

ii) Topologische Räume haben i. A. viele recht unterschiedliche Überlagerungsräume: So ist etwa für alle natürlichen Zahlen n die Abbildung $p\colon \mathbb{C} \supset S^1 \to S^1 \subset \mathbb{C},\ z \mapsto z^n$ eine weitere Überlagerung.

Gibt es für eine Überlagerung $p : E \to B$ eine Kardinalzahl κ mit $\#p^{-1}(b) = \kappa$, so nennt man p eine `κ-fache Überlagerung`. Die obige Überlagerung $p : \mathbb{R} \to S^1$ etwa ist eine $\mathcal{N}$-fache Überlagerung, mit $\mathcal{N}$ der Kardinalität der natürlichen Zahlen. Die Überlagerung $p\colon S^1 \to S^1,\ z \mapsto z^n$ hingegen ist eine n-fache Überlagerung. Dieser Begriff soll uns aber im Folgenden nicht weiter beschäftigen.

Lemma 2.26
Ist $p\colon E \to B$ eine Überlagerung und $B_0 \subset B$ ein Teilraum, so ist

$$p_0 := p|_{p^{-1}(B_0)}\colon p^{-1}(B_0) \to B_0$$

eine Überlagerung.

Proof
Ist U eine Überlagerungsmenge von p mit zugehörigen Scheiben $V_\alpha, \alpha \in J$, so gilt

$$p_0^{-1}(U \cap B_0) = \bigsqcup_{\alpha \in J} V_\alpha \cap p^{-1}(B_0)$$

und $U \cap B_0$ wird zu einer Überlagerungsmenge von p_0 mit Scheiben $V_\alpha \cap p^{-1}(B_0)$. $\square$

Lemma 2.27
Sind $p\colon E \to B,\ p'\colon E' \to B'$ Überlagerungen, so auch $(p, p')\colon E \times E' \to B \times B'$.

Proof
Ist U eine Überlagerungsmenge von p mit zugehörigen Scheiben $V_\alpha, \alpha \in J$, und U' eine Überlagerungsmenge von p' mit zugehörigen Scheiben $V'_{\alpha'}, \alpha' \in J'$, so gilt

$$(p, p')^{-1}(U \times U') = \bigsqcup_{(\alpha,\alpha') \in J \times J'} V_\alpha \times V'_{\alpha'}$$

und $U \times U'$ wird zu einer Überlagerungsmenge von (p, p') mit Scheiben $V_\alpha \times V'_{\alpha'}$, $(\alpha, \alpha') \in J \times J'$. $\square$

Beispiel 2.28
Mit $p\colon \mathbb{R}^1 \to S^1$ wie oben ist $(p,p)\colon \mathbb{R}^2 \to S^1 \times S^1 = T^1$ eine Überlagerung des Einheitstorus.

Theorem 2.29
Sei $p\colon E \to B$ stetig und surjektiv und sei $U \subset B$ eine zusammenhängende Überlagerungsmenge von p. Dann ist die Zerlegung von U in Scheiben eindeutig bestimmt.

Proof
Übungsaufgabe. $\square$

Definition 2.30
Sei $p\colon E \to B$ stetig und sei $f\colon X \to B$ stetig. Eine stetige Abbildung $\tilde{f}\colon X \to E$ heißt ein p-`Lift` von f, falls

$$\begin{tikzcd} & E \arrow[d, "p"] \\ X \arrow[ur, "\tilde{f}"] \arrow[r, "f"'] & B \end{tikzcd}$$

kommutiert.

Lemma 2.31 *(Lemma von Lebesgue)*
Sei (X,d) ein kompakter metrischer Raum und sei $\{\tilde{U}_i : i \in I\}$ eine offene Überdeckung von X. Dann existiert ein $\delta > 0$ mit folgender Eigenschaft: Ist $A \subset X$ eine Teilmenge mit

$$\sup_{a_1,a_2 \in A} d(a_1,a_2) < \delta,$$

so gibt es ein $i \in I$ mit $A \subset \tilde{U}_i$.

Proof
Übung. $\square$

6. Juli

Lemma 2.32
Sei $p\colon E \to B$ eine Überlagerung und sei $b_0 \in B$. Dann existiert zu jedem $e_0 \in E$ mit $p(e_0) = b_0$ und jedem Weg $f\colon I \to B$ mit Startpunkt b genau ein p-Lift $\tilde{f}\colon I \to E$ von f mit Schnittpunkt e_0.

Proof
Sei $B = \bigcup_{i\in I} U_i$ eine Überdeckung von B mit p-Überlagerungsmengen. Es existiert eine Unterteilung $0 = s_0 < \ldots < s_n = 1$, sodass zu jedem $i \in \{0,\ldots,n-1\}$ ein $j(i) \in I$ existiert mit $f[s_i, s_{i+1}] \subset U_{j(i)}$. Die folgt leicht aus dem Lebesgueschen Lemma, wenn man dieses mit $X = [0,1]$ und $\tilde{U}_i = f^{-1}(U_i)$ benutzt.

<u>Existenz von $\tilde{f}$</u>: Setze $\tilde{f}(0) = e_0$. Sei $\tilde{f}(s)$ bereits definiert auf einem Intervall $[0,s_j]$ so, dass $\tilde{f}|_{[0,s_j]}$ ein p-Lift von $f|_{[0,s_j]}$ ist. Dann setzen wir $\tilde{f}$ auf $[0,s_{i+1}]$ wie folgt fort:

Wir wählen eine Zerlegung $p^{-1}\left(U_{j(i)}\right) = \bigsqcup_{\alpha\in J} V_{\alpha,i}$ in Scheiben. Wähle $\alpha_i \in J_i$ mit $\tilde{f}(s_i) \in V_{\alpha_i,i}$ und setze $\tilde{f}(s) := \left(p|_{V_{\alpha_i,i}}\right)^{-1}(f(s))$ für alle $s \in [s_i, s_{i+1}]$. Dann ist $\tilde{f}$ stetig auf $[0, s_{i+1}]$ und lifted auf dieser Menge die Einschränkung f auf die gleiche Menge. Usw...Letztendlich ist $\tilde{f}$ definiert auf ganz $[0,1]$ und lifted f.

Eindeutigkeit von $\tilde{f}$: Seien $\tilde{f}, \tilde{\tilde{f}}$ beide p-Lifts von f mit Startpunkt e_0. Angenommen es gilt $\tilde{\tilde{f}}(s) = \tilde{f}(s)$ für alle $s \in [0, s_i]$. Seien $\alpha_i \in J_i$ wie oben. Es gilt

$$\tilde{\tilde{f}}[s_i, s_{i+1}] \subset p^{-1}\left(U_{j(i)}\right) = \bigsqcup_{\alpha} V_{\alpha,i}$$

und

$$\tilde{f}[s_i, s_{i+1}] \subset p^{-1}\left(U_{j(i)}\right) = \bigsqcup_{\alpha} V_{\alpha,i}.$$

Da $\tilde{f}[s_i, s_{i+1}]$ zusammenhängend ist und $\tilde{f}(s_i) \in V_{\alpha_i,i}$, gilt $\tilde{f}[s_i, s_{i+1}] \subset V_{\alpha_i,i}$. Analog folgt aus $\tilde{f}(s_i) = \tilde{\tilde{f}}(s_i)$ auch $\tilde{\tilde{f}}[s_i, s_{i+1}] \subset V_{\alpha_i,i}$. Aber $p|_{V_{\alpha_i,i}} : V_{\alpha,i} \xrightarrow{\cong} U_{j(i)}$, d.h aus $p \circ \tilde{f} = p \circ \tilde{\tilde{f}}$ folgt $\tilde{f} = \tilde{\tilde{f}}$ auf $[s_i, s_{i+1}]$, also auf $[0, s_{i+1}]$. Usw. $\square$

Lemma 2.33
Sei A ein Teilraum eines topologischen Raums mit diskreter Topologie. Dann ist A genau dann zusammenhängend, falls $|A| \in \{0,1\}$

Definition 2.34
$F\colon I \times I \to X$ heißt eine **`Weghomotopie`**, *falls F eine Weghomotopie zwischen den Wegen $F(\cdot,1)$ und $F(\cdot,0)$ ist.*

Eine stetige Abbildung $F\colon I \times I \to X$ ist genau dann eine Weghomotopie, wenn die Mengen $F(\{1\} \times I)$ und $F(\{0\} \times I)$ einelementig sind.

Theorem 2.35
Sei $p\colon E \to B$ eine Überlagerung, $b_0 \in B$ und $F\colon I \times I \to B$ eine Weghomotopie mit $F(0,0) = b_0$. Dann existiert für alle $e_0 \in p^{-1}(b_0)$ genau ein p-Lift $\tilde{F}\colon I \times I \to E$ von F mit $\tilde{F}(0,0) = e_0$. Dieser p-Lift ist automatisch eine Weghomotopie.

Proof
Existenz von $\tilde{F}$ als p-Lift von F mit Startpunkt e_0: Sei $\tilde{F}(0,\cdot)$ definiert als der p-Lift von $F(0,\cdot)$ mit Startpunkt e_0 (mittels Lemma 2.32). Wähle nach dem Lebesgue Lemma eine Unterteilung $0 = s_0 < s_1 < \ldots < s_m = 1$ und $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = 1$, so dass jedes Rechteck

$$I_i \times J_j := [s_i, s_{i+1}] \times [t_j, t_{j+1}]$$

für $i = 1, \ldots, m,\ j = 1, \ldots, n$ von F in einer Überlagerungsmenge von p liegt. Sei

$$(i_0, j_0) \in \{1, \ldots, m\} \times \{1, \ldots, n\}$$

beliebig gegeben und sei $A \subset I \times I$ definiert als Vereinigung von $I \times \{0\}$, $\{0\} \times I$, sowie von allen $I_i \times J_j$ mit $i < i_0$ und j beliebig, sowie $i = i_0$ und $j < j_0$. Angenommen, wir haben $\tilde{F}|_A$ bereits definiert als p-Lift von $F|_A$. Wir wollen $\tilde{F}|_A$ nun auf $(I_{i_0} \times J_{j_0}) \cup A$ fortsetzen zu einem p-Lift von $F|_{A \cup (I_{i_0} \times J_{j_0})}$. Sei hierzu $U \subset B$ eine Überlagerungsmenge von p mit $F(I_{i_0} \times J_{j_0}) \subset U$ $(*)$ und sei $p^{-1}(U) = \bigsqcup_\alpha V_\alpha$ eine Zerlegung in Scheiben. Die Menge $\tilde{F}|_A(A \cap (I_{i_0} \times J_{j_0}))$ ist zusammenhängend und in $p^{-1}(U)$ enthalten (p-Lift Eigenschaft). Es existiert dann ein α_0 mit

$$\tilde{F}|_A(A \cap (I_{i_0} \times J_{j_0})) \subset V_{\alpha_0}.$$

Aber $p|_{V_{\alpha_0}} \colon V_{\alpha_0} \xrightarrow{\cong} U$, d.h. wegen $(*)$ können wir

$$\tilde{F}|_{A \cup (I_{i_0} \times J_{j_0})}(x) = \begin{cases} F|_A(x) & , x \in A \\ \left(p|_{V_{\alpha_0}}\right)^{-1} \circ F(x) & , x \in I_{i_0} \times J_{j_0} \end{cases}$$

setzen. Usw... Also existiert ein p-Lift $\tilde{F}$ von F.

<u>Jeder p-Lift $\tilde{F}$ von F mit Startpunkt e_0 ist automatisch eine Weghomotopie:</u> Es gilt

$$F(\{0\} \times I) = \{b_0\}.$$

Da $\tilde{F}$ ein p-Lift von F ist, folgt $\tilde{F}(\{0\} \times I) \subset p^{-1}(b_0)$. Aber $p^{-1}(b_0)$ ist diskret und $\tilde{F}(\{0\} \times I)$ ist zusammenhängend. Daraus folgt mit Lemma 2.33, dass $\tilde{F}(\{0\} \times I)$ einelementig ist. Völlig analog gilt: $\tilde{F}(\{1\} \times I)$ ist einelementig. Damit ist $\tilde{F}$ eine Weghomotopie.

11. Juli

<u>Eindeutigkeit von $\tilde{F}$ als p-Lift von F mit Startpunkt e_0:</u> Sei $\tilde{\tilde{F}}$ ein weiterer p-Lift mit Startpunkt e_0. Wir wissen bereits, dass $\tilde{F}, \tilde{\tilde{F}}$ beide Weghomotopien sind. Für beliebiges aber festes $t \in I$ sind dann $\tilde{F}(\cdot, t)$ und $\tilde{\tilde{F}}(\cdot, t)$ p-Lifts des Weges $F(\cdot, t)$. Außerdem gilt $\tilde{F}(0,t) = \tilde{F}(0,0) = e_0 = \tilde{\tilde{F}}(0,0) = \tilde{\tilde{F}}(0,t)$, da $\tilde{F}, \tilde{\tilde{F}}$ Weghomotopien sind. Damit folgt $\tilde{\tilde{F}}(s,t) = \tilde{F}(s,t)$ für alle $t \in I$ aufgrund der Eindeutigkeitsaussage für p-Lifts von Wegen. $\square$

Korollar 2.36 *(Monodromielemma)*
Sei $p \colon E \to B$ eine Überlagerung, $b_0, b_1 \in B$, $e_0 \in p^{-1}(\{b_0\})$ und Wege $f, g \colon I \to B$ von b_0 nach b_1. Mit $\tilde{f}, \tilde{g} \colon I \to E$ die zugehörigen p-Lifts mit $\tilde{f}(0) = e_0 = \tilde{g}(0)$ gilt folgende Implikation: $f \simeq_P g \implies \tilde{f}(1) = \tilde{g}(1)$ und $\tilde{f} \simeq_P \tilde{g}$.

Proof
Sei $F \colon I \times I \to B$ die Weghomotopie zwischen f und g, also $F(0,0) = b_0$. Sei $\tilde{F} \colon I \times I \to E$ die zugehörige p-geliftete Weghomotopie mit $\tilde{F}(0,0) = e_0$. Es gilt (Eindeutigkeit von Lifts) $\tilde{f} = \tilde{F}(\cdot, 0)$ und $\tilde{g} = \tilde{F}(\cdot, 1)$. Aber $\tilde{F}(\{1\} \times I)$ ist einelementig. Daraus folgt $\tilde{f}(1) = \tilde{F}(1,1) = \tilde{F}(1,0) = \tilde{g}(1)$. $\square$

Definition 2.37
Sei $p\colon E \to B$ eine Überlagerung, $b_0 \in B$, $e_0 \in p^{-1}(\{b_0\})$. Dann heißt

$$\begin{aligned}\phi_{p,b_0,e_0}\colon \pi_1(B,b_0) &\to p^{-1}(b_0)\\ [f] &\mapsto \tilde{f}(1),\end{aligned}$$

wobei $\tilde{f}$ der p-Lift von f mit Startpunkt e_0 ist, die von p, b_0, e_0 **`induzierte Liftkorrespondenz`**.

In dieser Situation ist ϕ_{p,b_0,e_0} wohldefiniert. Das ist gerade die Aussage des Monodromielemmas.

Theorem 2.38
Sei $p\colon E \to B$ eine Überlagerung, E wegzusammenhängend, $b_0 \in B, e_0 \in p^{-1}(\{b_0\})$. Dann ist ϕ_{p,b_0,e_0} surjektiv, und sogar bijektiv, falls E einfach zusammenhängend ist.

Proof
Surjektivität: Sei $e_1 \in p^{-1}(\{b_0\})$ beliebig. Also existiert ein Weg $\tilde{f}\colon I \to E$ von e_0 nach e_1. Damit gilt: $p \circ \tilde{f}\colon I \to B$ ist Schleife mit Basis b_0 und $\phi_{p,b_0,e_0}([p \circ \tilde{f}]) = e_1$.

Injektivität fuer E einfach zusammenhängend: Seien $[f],[g] \in \pi_1(B,b_0)$ mit $\phi_{p,b_0,e_0}([f]) = \phi_{p,b_0,e_0}([g])$. Seien $\tilde{f}, \tilde{g}\colon I \to E$ die zugehörigen p-Lifts mit Startpunkt e_0. Daraus folgt $\tilde{f}(1) = \tilde{g}(1)$. Da E einfach zusammenhängend ist, existiert eine Weghomotopie $\tilde{\mathbb{F}}\colon I \times I \to E$ zwischen $\tilde{f}$ und $\tilde{g}$. Dann ist $p \circ F\colon I \times I \to B$ eine Weghomotopie zwischen f und g, und somit $[f] = [g]$. □

Theorem 2.39
Es gilt

$$\pi_1(S^1, b_0) \cong \mathbb{Z} \qquad \textit{für alle } b_0 \in S^1.$$

Genauer: Ist $p\colon \mathbb{R} \to S^1$ die übliche Überlagerung, so ist die Liftkorrespondenz

$$\phi_{p,(1,0),0} : \pi_1(S^1,(1,0)) \to p^{-1}((1,0)) = \mathbb{Z}$$

ein Gruppenisomorphismus.

Proof
Sei $b_0 := p(0) = (1,0)$. Damit ist tatsächlich $p^{-1}(b_0) = \mathbb{Z}$. Also ist $\phi_{p,b_0,0} \to \mathbb{Z}$ ist bijektiv. Es ist noch zu zeigen, dass $\phi := \phi_{p,b_0,0}$ ein Gruppenhomomorphismus ist. Sei hierzu $[f],[g] \in \pi_1(S^1,b_0)$ und sei $\tilde{f}, \tilde{g}\colon I \to \mathbb{R}$ die zugehörigen p-Lifts mit Startpunkt $e_0 = 0$, sowie $n := \tilde{f}(1)$ und $m := \tilde{g}(1)$. Damit ist $\phi_{p,b_0,e_0}[f] = n$ und $\phi_{p,b_0,e_0}[g] = m$. Betrachte $\tilde{\tilde{g}}\colon I \to \mathbb{R}$, $s \mapsto \tilde{g}(s)+n$. Wegen $p(x+n) = p(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ ist $\tilde{\tilde{g}}$ ein p-Lift von g. Der Weg $\tilde{f} * \tilde{\tilde{g}}$ ist wohldefiniert und gerade der Lift von $f * g$ mit Startpunkt 0. Es gilt $\tilde{\tilde{g}}(1) = m+n$. Damit ist

$$\phi_{p,b_0,0}([f]*[g]) = \phi_{p,b_0,0}([f*g]) = m+n = \phi_{p,b_0,0}([f]) + \phi_{p,b_0,0}([g]).$$

□

Theorem 2.40
Sei $p\colon E \to B$ *eine Überlagerung,* $b_0 \in B$*,* $e_0 \in p^{-1}(\{b_0\})$*. Dann gelten folgende Aussagen:*

i) $p_*\colon \pi_1(E, e_0) \to \pi_1(B, b_0)$ *ist ein injektiver Gruppenhomomorphismus.*

ii) Sei $H_{p,e_0} := p_*(\pi_1(E, e_0))$*. Dann induziert* ϕ_{p,b_0,e_0} *die wohldefinierte injektive Abbildung*[1]

$$\begin{aligned}\psi_{p,b_0,e_0}\colon H_{p,e_0}\backslash\pi_1(B, b_0) &\to p^{-1}(\{b_0\})\\ H_{p,e_0} * [f] &\mapsto \phi_{p,b_0,e_0}[f],\end{aligned}$$

die sogar bijektiv ist, falls E wegzusammenhängend ist.

iii) Ist $f\colon I \to B$ *eine Schleife mit Basis* b_0*, so gilt* $[f] \in H_{p,e_0}$ *genau dann, falls sich f bezüglich p liften lässt zu einer Schleife auf E mit Startpunkt* e_0*.*

Proof
i) Ist $\tilde{h} : I \to E$ eine Schleife mit Basis e_0 so, dass $p \circ \tilde{h}$ mittels der Weghomotopie F weghomotop zur konstanten Schleife e_{b_0} ist, so ist der p-Lift $\tilde{F}$ mit Startpunkt e_0 von F eine Weghomotopie zwischen $\tilde{h}$ und der konstanten Schleife e_{e_0}. In anderen Worten: p_* hat einen trivial Kern und ist somit injektiv.
ii) Ein Beweis dieser Aussage lässt sich im Buch "Topology" von Munkres finden (Theorem 54.6 (b) in der second edition).
iii) Aus dem Injektivitätsteil der Aussage ii) folgt, dass die Identität $\phi_{p,b_0,e_0}([f]) = e_0$ äquivalent zu $[f] \in H_{p,e_0}$ ist. Aber genau dann gilt $\phi_{p,b_0,e_0}([f]) = e_0$, wenn der p-Lift von f mit Startpunkt e_0 auch in e_0 endet.

13. Juli

[1] H_{p,e_0} ist eine Untergruppe von $\pi_1(B, b_0)$ und $H_{p,e_0}\backslash\pi_1(B, b_0)$ steht für die Menge der Rechtsnebenklassen $\{H_{p,e_0} * [f]\colon [f] \in \pi_1(B, b_0)\}$. Munkres schreibt an dieser Stelle einfach ${}^{\pi_1(B,b_0)}/_{H_{p,e_0}}$, was normalerweise für die Linksnebenklassen steht. Da H_{p,e_0} im Allgemeinen kein Normalteiler ist, scheint Munkres notation etwas seltsam zu sein. Oder ich habe etwas übersehen.

3 Homotopietypen von topologischen Räumen

Wir wissen bisher, dass Überlagerungen Informationen über Fundamentalgruppen liefern. Eine weitere Möglichkeit um Informationen über Fundamentalgruppen zu erhalten, ist durch Homotopieäquivalenzen gegeben:

Definition 2.41
Eine stetige Abbildung $f\colon X \to Y$ heißt eine **Homotopieäquivalenz***, falls eine stetige Abbildung $g\colon Y \to X$ existiert mit $f \circ g \simeq id_Y$ und $g \circ f \simeq id_X$. Dann heißt g eine* **Homotopieinverse** *von f.*

Definition 2.42
X und Y heißen **homotopieäquivalent***, falls es eine Homotopieäquivalenz $f\colon X \to Y$ gibt.*

Falls $f\colon X \to Y$, $f'\colon Y \to Z$ Homotopieäquivalenzen sind, so auch $f' \circ f\colon X \to Z$. Daraus folgt, dass Homotopieäquivalenz eine Äquivalenzrelation auf der Menge der topologischen Räume ist.

Definition 2.43
Man sagt X und Y habe den gleichen **Homotopietyp***, falls sie homotopieäquivalent sind.*

Lemma 2.44
Seien $h, k\colon X \to Y$ stetig, $x_0 \in X$, $y_0 := h(x_0)$, $y_1 := k(x_0)$. Gilt $h \simeq k$, so existiert ein Weg $\alpha\colon I \to Y$ von y_0 nach y_1, sodass folgendes Diagramm gilt:

$$\begin{tikzcd}
\pi_1(X, x_0) \arrow[r, "(h_{x_0})_*"] \arrow[dr, "(k_{x_0})_*"'] & \pi_1(Y, y_0) \arrow[d, "\hat{\alpha}"] \\
& \pi_1(Y, y_1)
\end{tikzcd}$$

Die obige Notation ist wie folgt zu verstehen: Das Symbol h_{x_0} steht für die Abbildung

$$h_{x_0} : (X, x_0) \to (Y, h(x_0)),\ \ y \mapsto h(x)$$

zwischen punktierten Räumen (analog für k usw.).

Proof
Sei $H\colon X \times I \to Y$ eine Homotopie zwischen h und k. Dann erfüllt $\alpha(s) := H(x_0, s)$ den Job. $\square$

Korollar 2.45
Ist unter den Voraussetzung von Lemma 2.44 die Abbildung $(h_{x_0})_*$ injektiv (surjektiv) [trivial], so ist auch $(k_{x_0})_*$ injektiv (surjektiv) [trivial].

Korollar 2.46
Unter den Voraussetzungen des Lemmas 2.44 gilt: Wenn k konstant ist, dann ist $(h_{x_0})_*$ trivial.

Proof
Aus k konstant folgt, dass (k_{x_0}) trivial ist. Damit gilt $(h_{x_0})^* = (\hat{\alpha})^{-1} \circ (k_{x_0})_*$. □

Nun können wir zeigen, dass Räume mit dem gleichem Homotopietyp isomorphe Fundamentalgruppen haben:

Theorem 2.47
Sei $f\colon X \to Y$ stetig, $x_0 \in X$ und $y_0 := f(x_0)$. Ist f eine Homotopoieäquivalenz, so ist $(f_{x_0})_*\colon \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, y_0)$ ein Gruppenisomorphismus.

Proof
Sei $g\colon Y \to X$ eine Homotopieinverse von f uns sei $x_1 := g(y_0)$, $y_1 := f(x_1)$. Nach Voraussetzung ist $g \circ f \simeq id_X$. Damit gilt $(g_{y_0}) \circ (f_{x_0})_* = ((g \circ f)_{x_0})* = \hat{\alpha} \circ (id_{X,x_0})$ mit einem geeignet α wie in Lemma 2.44. Dann ist $(g_{y_0})_* \circ (f_{x_0})_*$ ein Isomorphismus und damit $(g_{y_0})_*$ surjektiv. Analog folgt: $(f_{x_1})_* \circ (g_{y_0})_*$ ist ein Isomorphismus und $(g_{y_0})_*$ injektiv. Insgesamt ist $(g_{y_0})_*$ ein Isomorphismus und $(f_{x_0})_* = (g_{y_0})_*^{-1} \circ \hat{\alpha}$ ist ein Isomorphismus. □

Wichtig Beispiele von Homotopieäquivalenzen sind durch die Inklusionsabbildung von Deformationsretrakten gegeben:

Definition 2.48
Sei $A \subset X$ ein Teilraum. Dann heißt A ein `Deformationsretrakt` *von X, falls es eine stetige Abbildung $H\colon X \times I \to X$ gibt mit:*

i) $H(x, 0) = x$ für alle $x \in X$

ii) $H(x, 1) \in A$ für alle $x \in X$

iii) $H(a, t) = a$ für alle $t \in I$ und $a \in A$.

In anderen Worten: Ist $A \subset X$ ein Teilraum, so ist A ein Deformationsretrakt von X genau dann, wenn id_X homotop ist zu einer Abbildung $\tilde{r}\colon X \to X$ mit $\tilde{r}(X) \subset A$ mittels einer Homotopie, die alle Punkte aus A während der Deformation fix lässt.

Definition 2.49
In obiger Situation heißt $r\colon X \to A$, $x \mapsto \tilde{r}(x)$ eine `Retraktionsabbildung` *für $A \subset X$.*

Beispiel 2.50
Die Abbildung

$$H\colon \mathbb{R}^{m+1}\backslash\{0\} \times I \to \mathbb{R}^{m+1}\backslash\{0\}, \quad (x,t) \mapsto (1-t)x + \frac{tx}{\left(\sum\limits_{i=1}^{m} x_i^2\right)^{\frac{1}{2}}}$$

macht S^m zu einem Deformationsretrakt von $\mathbb{R}^{m+1}\backslash\{0\}$.

Lemma 2.51
Sei $A \subset X$ ein Deformationsretrakt von X. Dann ist die Inklusionsabbildung $\iota\colon A \hookrightarrow X$ eine Homotopiäquivalenz. Insbesondere ist für alle $x_0 \in A$ die Abbildung

$$(\iota_{x_0})_*\colon \pi_1(A, x_0) \to \pi_1(X, x_0)$$

ein Gruppenisomorphismus.

Proof
Sei $r\colon X \to A$ eine Retraktionabbildung. Dann ist $r \circ \iota = id_A$ und $\iota \circ r \simeq id_X$. $\square$

Korollar 2.52
Für alle $x_0 \in S^m$ ist, mit

$$\iota\colon S^m \hookrightarrow \mathbb{R}^{m+1}\backslash\{0\}$$

der Inklusionsabbildung, die Abbildung

$$(\iota_{x_0})_*\colon \pi_1(S^m, x_0) \to \pi_1\left(\mathbb{R}^{m+1}\backslash\{0\}, x_0\right)$$

ein Gruppenisomorphismus.

4 Die Fundamentalgruppe von S^m mit $m \geq 2$

Die folgende Aussage kann auch aus einem abstrakten Satz der algebraischen Topologie (Satz von Seifert/von Kampen) abgeleitet werden:

Theorem 2.53
Seien $U, V \subset X$ offen mit $X = U \cup V$, $x_0 \in U \cap V$ und sei $U \cap V$ wegzusammenhängend. Mit $\iota_U \colon U \to X$ und $\iota_V \colon V \to X$ den Inklusionsabbildungen gilt dann folgende Aussage: Die Vereinigung der Bilder von

$$(\iota_{U,x_0})_* \colon \pi_1(U, x_0) \to \pi_1(X, x_0)$$

und

$$(\iota_{V,x_0})_* \colon \pi_1(V, x_0) \to \pi_1(X, x_0)$$

erzeugt die Gruppe $\pi_1(X, x_0)$.

Proof
Die Aussage des Theorems bedeutet nichts anderes als das Folgende: Jede Schleife $f \colon I \to X$ mit der Basis x_0 ist weghomotop zu einer Schleife der Art $g_1 * \ldots * g_n$, $n \in \mathbb{N}$, wobei jedes $g \colon I \to X$ eine Schleife mit Basis x_0 ist, die entweder vollständig in U oder vollständig in V verläuft.
Das Lebesgue-Lemma und ein einfaches Umnummerierungsargument liefert eine Unterteilung $0 = a_0 < a_1 < \ldots < a_n = 1$, so dass $f(a_i) \in U \cap V$ und $f[a_{i-1}, a_i] \subset U$ oder $f[a_{i-1}, a_i] \subset V$. Sei $\varphi_i \colon I \to [a_{i-1}, a_i]$ gegeben als die eindeutig bestimmte stetige Funktion mit linearem Graphen die $\varphi_i(0) = a_{i-1}$ und $\varphi_i(1) = a_i$ erfüllt, und sei $f_i \colon I \to X$, $f_i(s) := f(\varphi_i(s))$. Dann verläuft f_i vollständig in U oder vollstänig in V und es gilt $[f] = [f_1 * \ldots * f_n]$.
Wir sind fast fertig, aber die f_i sind keine Schleifen. Um dies zu beheben, sei $\alpha_i \colon I \to U \cap V$ ein Weg von x_0 nach $f(a_i)$. Dann erfüllen $g_i := (\alpha_{i-1} * f_i) * \bar{\alpha}_i$ für $i = 1, \ldots, m$ den Job (es gilt $[g_1 * \ldots g_n] = [f_1 * \ldots * f_n]$). □

18.Juli

Korollar 2.54
Sei $U, V \subset X$ offen und $U \cap V \neq$ und wegzusammenhängend, und $X = U \cup V$. Dann gilt folgende Implikation: Sind U und V einfach zusammenhängend, so gilt dies auch für X.

Theorem 2.55
S^m ist einfach zusammenhängend für alle $m \geq 2$.

Proof
Sei $p := (0, \ldots, 0, 1) \in S^m \subset \mathbb{R}^{m+1}$ und $q := (0, \ldots, 0, -1) \in S^m$. Dann ist

$$f\colon S^m\backslash\{q\} \to \mathbb{R}^m$$
$$(x_1,\ldots,x_{m+1}) \mapsto \frac{1}{1-x_{m+1}}(x_1,\ldots .x_m)$$

ein Homöomorphismus (stereographische Projektion) und $S^m\backslash\{p\}$ ist homöomorph zu $S^m\backslash\{q\}$ etwa mittels der Reflektion

$$(x_1,\ldots,x_{m+1}) \mapsto (x_1,\ldots,x_m,-x_{m+1}).$$

Daraus folgt $U := S^m\backslash\{p\} \cong \mathbb{R}^m$, $V := S^m\backslash\{q\} \cong \mathbb{R}^m$ (d.h. U und V sind wegzusammenhängend) und $U\cap V = S^m\backslash\{p,q\} \neq \emptyset$. Außerdem ist $U\cap V = S^m\backslash\{p,q\} \cong \mathbb{R}^m\backslash\{0\}$ mittels $f|_{S^m\backslash\{p,q\}}$. Aber $\mathbb{R}^m\backslash\{0\}$ ist wegzusammenhängend, genau dann wenn $m \geq 2$ gilt. $\square$

5 Klassifikation von Überlagerungen

Bis jetzt haben uns Überlagerungen Informationen über Fundamentalgruppen geliefert. Nun wollen wir umgekehrt Fundamentagruppen nutzen, um Informationen über Überlagerungen zu gewinnen.

Definition 2.56
Ein topologischer Raum X heißt **`lokal wegzusammenhängend`**, *wenn für alle Umgebungen U von x eine wegzusammenhängende Umgebung V von x existiert mit $V \subset U$.*

Im Allgemeinen sind wegzusammenhängend und lokal wegzusammenhängend voneinander disjunkte Eigenschaften, was anschaulich recht klar sein sollte. Konkrete Gegenbeispiele zu konstruieren ist allerdings halbwegs kompliziert.

Lemma 2.57 *(Liftsatz)*
Sei $p\colon E \to B$ eine Überlagerung mit E, B wegzusammenhängend und lokal wegzusammenhängend. Sei Y wegzusammenhängend und lokal wegzusammenhängend, $f: Y \to B$ setig und $b_0 \in B$, $y_0 \in Y$, $e_0 \in E$ mit $p(e_0) = b_0$, $f(y_0) = b_0$. Dann existiert ein p-Lift

$$\tilde{f}\colon Y \to E \text{ von } f \text{ mit } \tilde{f}(y_0) = e_0,$$

genau dann wenn

$$f_*(\pi_1(Y, y_0)) \subset p_*(\pi_1(E, e_0)).$$

Falls dies der Fall ist, so ist $\tilde{f}$ eindeutig bestimmt.

Proof

i) $\Rightarrow$: Dies folgt aus $f_* = p_* \circ \tilde{f}_*$.

ii) Eindeutigkeit des Lifts $\tilde{f}$: Sei $y_1 \in Y$ beliebig und sei $\alpha\colon I \to Y$ ein Weg von y_0 nach y_1 und γ der p-Lift von $f \circ \alpha$ mit Startpunkt e_0. Dann ist $f \circ \alpha$ ein p-Lift von $f \circ \alpha$ mit Startpunkt e_0, also $\gamma = \tilde{f} \circ \alpha$. Damit folgt $\tilde{f}(\alpha(1)) = \gamma(1)$.

iii) $\Leftarrow$: (also Existenz von $\tilde{f}$) Sei $y_1 \in Y$ beliebig. Wähle nun α und γ wie in ii). Setze $\tilde{(}y_1) := \gamma(1)$. Dann ist $\tilde{f}(y_1)$ wohldefiniert, denn:
Sei hierzu $\beta\colon I \to Y$ ein weiterer Weg von y_0 nach y_1 und γ' der p-Lift von $f \circ \beta$ mit Startpunkt e_0. Wir müssen also zeigen, dass $\gamma'(1) = \gamma(1)$ gilt. Sei hierzu δ der p-Lift von $f \circ \bar{\beta}$ mit Startpunkt $\gamma(1)$. Also ist $\gamma * \delta$ ein p-Lift von $f \circ (\alpha * \bar{\beta})$, was eine Schleife ist. Nach Voraussetzung ist $[f \circ (\alpha * \bar{\beta})] \in p_*(\pi_1(E, e_0))$ und damit ist $\gamma * \delta$ eine Schleife (dies folgt aus Theorem 2.40 iii)), also gilt $e_0 = \gamma(0) = \gamma * \delta(0) = \gamma * \delta(1) = \gamma(1)$. Außerdem ist $\bar{\delta}$ ein p-Lift von $f \circ \beta$, wie wir nun wissen mit Startpunkt $\bar{\delta}(0) = \delta(1) = e_0$. Also $\bar{\delta} = \gamma'$, und damit $\bar{\delta}(1) = \gamma'(1) = \delta(0) = \gamma(1)$. Damit ist $\tilde{f}$ wohldefiniert. Sicherlich ist $\tilde{f}$ nach Konstruktion p-Lift von f mit $\tilde{f}(y_0) = e_0$.

Wir müssen noch zeigen, dass $\tilde{f}$ stetig ist: Sei hierzu $y_1 \in Y$ und eine Umgebung N von $f(y_1)$ gegeben. Wir zeigen, dass eine Umbegung W von y_1 existiert mit $\tilde{f}(W) \subset N$. Wähle eine wegzusammenhängende Umgebung U von $f(y_1)$ die zugleich eine Überlagerungsmenge von p ist. Sei $V_0 \subset E$ die Scheibe von $p^{-1}(U)$, die $\tilde{f}(y_1)$ enthält. OBdA gilt $V_0 \subset N$. Damit ist $p_0 := |_{V_0}\colon V_0 \to U$ eine Homöomorphismus. Wähle eine eine wegzusammenhängende Umgebung W von y_1 mit $f(W) \subset U$ (f ist stetig). Wir zeigen nun, dass $\tilde{f}(W) \subset V_0$ gilt. Sei dazu $y \in W$ und β ein Weg in W von y_1 nach y. Sei desweiteren α ein Weg von y_0 nach y und γ der p-Lift von $f \circ \alpha$ mit Startpunkt e_0. Damit ist $\alpha * \beta$ ein Weg von y_0 nach y und $\gamma * (p_0^{-1} \circ f \circ \beta)$ ist der p-Lift von $\alpha * \beta$ mit Startpunkt e_0 (beachte, dass der Ausdruck $p_0^{-1} \circ f \circ \beta$ Sinn macht), wobei γ der p-Lift von $f \circ \alpha$ mit Startpunkt e_0 sei. Beachtet man die wohldefinierte Konstruktionsvorschrift für $\tilde{f}$, so findet man die erste Gleichheit in

$$\tilde{f}(y) = \gamma * (p_0^{-1} \circ f \circ \beta) = p_0^{-1} \circ f \circ \beta(1) \in V_0.$$

Der Beweis ist komplett. □

Definition 2.58
Seiein $p\colon E \to B$ und $p'\colon E' \to B$ Überlagerungen. Dann heißt ein Homöomorphismus $h\colon E \to E'$ eine ***Überlagerungsäquivalenz*** *zwischen p und p', falls*

$$\begin{tikzcd} E \arrow[rr, "h"] \arrow[dr, "p"'] & & E' \arrow[dl, "p'"] \\ & B & \end{tikzcd}$$

kommutiert.

Zwei Überlagerungen $p\colon E \to B$ und $p'\colon E' \to B$ werden dann `überlagerungsäquivalent` genannt, falls es eine Überlagerungsäquivalenz zwischen ihnen gibt. Dies ist eine Äquivalenzrelation.

Eine Überlagerung $p\colon E \to B$ induziert die Untergruppe $p_*(\pi_1(E, e_0)) \subset \pi_1(B, b_0)$. Tatsächlich gilt $p_*(\pi_1(E, e_0)) \cong \pi_1(E; e_0)$, da p_* injektiv ist. Es wird sich herausstellen, dass p bis auf Überlagerungsäquivalenz eindeutig durch die Untergruppe $p_*(\pi_1(E, e_0))$ bestimmt ist (zumindest unter schwachen zusätzlichen Voraussetzungen an E, B).

Theorem 2.59
Seien $p\colon E \to B$, $p'\colon E' \to B$ mit E, B, E' wegzusammenhängend und lokal wegzusammenhängend. Seien $b_0 \in B, e_0 \in E, e'_o \in E'$ mit $p(e_0) = p(e'_0) = b_0$. Dann existiert eine Überlagerungsäquivalenz $h\colon E \to E'$ zwischen p und p' mit $h(e_0) = e'_0$ genau dann, wenn

$$H_0 := p_*(\pi_1(E, e_0)) = H'_0 := p'_*(\pi(E', e'_0)).$$

Proof

$\Rightarrow$: Da h ein Homöomorphismus ist, gilt $h_*(\pi_1(E, e_0)) = \pi_1(E', e_0')$, also

$$p_*(\pi_1(E, e_0)) = (p'_* \circ h_*)(\pi_1(E, e_0)) = p'_*(\pi_1(E', e_0')).$$

$\Leftarrow$: Wegen dem Liftsatz 2.57 existiert $h\colon E \to E'$ stetig mit $h(e_0) = e_0'$ und $p' \circ h = p$. Analog existiert $k\colon E' \to E$ stetig mit $k(e_0') = e_0$ und $p \circ k = p'$. Die Abbildung $k \circ h\colon E \to E$ erfüllt $p \circ k \circ h = p' \circ h = p$. Außerdem erfüllt id_E die Bedingung $p \circ id_E = p$. Der Eindeutigkeitsteil des Liftsatzes gibt sofort $k \circ h = id_E$. Analog zeigt man: $h \circ k = id_{E'}$. $\square$

Was passiert, wenn im obigen Satz nicht $h(e_0) = e_0'$ gefordert wird? Hierzu erinnern wir an das folgende einfache Konzept aus der Gruppentheorie: Sei G eine Gruppe und $H_1, H_2 \subset G$ Untergruppen. Dann heißt H_1 `konjugiert zu` H_2, falls es ein $g \in G$ gibt mit $H_2 = gH_1g^{-1}$. Dies ist eine Äquivalenzrelation.

Theorem 2.60
Seien $p\colon E \to B$, $p\colon E' \to B$ Überlagerungen mit E, B, E' wegzusammenhängend und lokal wegzusammenhängend, und seien $b_0 \in B$, $e_0 \in E$, $e_0' \in E'$. Dann existiert genau dann eine Überlagerungsäquivalenz $h\colon E \to E'$ zwischen p und p', wenn die Untergruppen $H_0 := p_*(\pi_1(E, e_0))$ und $H_0' := p'_*(\pi_1(E', e_0'))$ von $\pi_1(B, b_0)$ konjugiert zueinander sind.

Lemma 2.61
Sei $p\colon E \to B$ eine Überlagerung, $b_0 \in B$. Dann gelten folgende Aussagen:

i) Ist $e_0, e_1 \in p^{-1}(b_0)$ und ist $\gamma\colon I \to E$ ein Weg von e_0 nach e_1, so gilt für die Schleife $\alpha := p \circ \gamma\colon I \to B$ mit Basis b_0 die Identität $[\alpha] * H_1 * [\alpha]^{-1} = H_0$ mit $H_i := p_*(\pi_1(E, e_i))$

ii) Ist $e_0 \in p^{-1}(b_0)$ und ist $H \subset \pi_1(B, b_0)$ eine Untergruppe die zu H_0 konjugiert ist, so existiert $e_1 \in p^{-1}(b_0)$ mit $H_1 = H$, wobei erneut $H_i := p_*(\pi_1(E, e_1))$.

Proof i) Es reicht zu zeigen, dass für alle γ, α, e_0, e_1 wie in der Annahme die Inklusion

$$[\alpha] * H_1 * [\alpha]^{-1} \subset H_0$$

gilt (denn daraus folgt $[\bar{\alpha}] * h_0 * [\bar{\alpha}]^{-1} \subset H_1$). Sei hierzu $[h] \in H_1$ und wähle die Schleife $\tilde{h}\colon I \to E$ mit Basis e_1 mit $p_*([\tilde{h}]) = [h]$. Dann ist $\tilde{k} := (\gamma * \tilde{h})\bar{\gamma}$ eine Schleife mit Basis e_0 und $p_*([\tilde{k}]) = [\alpha] * [h] * [\alpha]^{-1}$. Damit folgt $[\alpha] * H_1 * [\alpha]^{-1} \subset H_0$.

ii) Nach Voraussetzung existiert eine Schleife $\alpha\colon I \to B$ mit Basis b_0 mit

$$H_0 = [\alpha] * H_1 * [\alpha]^{-1}.$$

Sei γ der p-Lift von α mit $\gamma(0) = e_0$. Aus i) folgt

$$H_0 = [\alpha] * p_*(\pi_1(E, \gamma(1))) * [\alpha]^{-1}$$

. Damit folgt die Aussage mit $e_1 := \gamma(1)$, also $H = H_1$. $\square$

20. Juli

Beweis von Theorem 2.60

- $\Rightarrow$ Setze $e_1' := h(e_0)$ und $H_1' := p_*(\pi_1(E', e_1'))$. Also ist $H_0 = h_1'$ nach dem vorherigen Theorem 2.59. Teil i) des Lemmas 2.61 liefert dann, dass H_1' konjugiert ist zu H_0'.

- $\Leftarrow$ Teil i) des Lemmas 2.61 zeigt die Existienz von $e_1' \in p'(b_0)$ mit $H_1' := p_*'(\pi_1(E', e_1')) = H_0$. Das Theorem 2.59 liefert dann die Existenz von h. $\square$

Definition 2.62
Eine Überlagerung $p\colon E \to B$ heißt ***`universell`****, falls E einfach zusammenhängend ist.*

Die Wichtigkeit von universellen Überlagerungen beruht auf folgenden beiden Tatsachen, die wir gleich beweisen werden: Universelle Überlagerungen von B sind bis auf Äquivalenz eindeutig bestimmt, und die Überlagerungsräume von universellen Überlagerungen von B überlagern alle anderen Überlagerungsräume von B.

Theorem 2.63
Seien $p\colon E \to B$ und $p'\colon E' \to B$ universelle Überlagerungen mit E, B, E' wegzusammenhängend und lokal wegzusammenhängend. Dann gibt es eine Überlagerungsäquivalenz $h\colon E \to E'$ zwischen p und p'.

Proof
Es gilt
$$p_*(\pi_1(E, e_0)) = \{[e_0]\} = p_*'(\pi_1(E', e_0'))$$
für alle $b_0 \in B$ und $e_0 \in E,\ e_0' \in E'$, also können wir Theorem 2.60 benutzen. $\square$

Lemma 2.64
Sei X, Y, Z wegzusammenhängend und lokal wegzusammenhängend und sei das kommutative Diagramm stetiger Abbildungen

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "q"] \arrow[dr, "p"'] & & Y \arrow[dl, "r"] \\ & Z & \end{tikzcd}$$

gegeben (also $p = r \circ q$). Sind p und r Überlagerungen, so gilt dies auch für q.

Proof
<u>q ist surjektiv:</u> Sei $x_0 \in X,\ y_0 \in Y$ und $z_0 \in Z$. Sei weiterhin $y \in Y$ beliebig und sei $\tilde{\alpha}\colon I \to Y$ ein Weg von y_0 nach y. Dann ist $\alpha = r \circ \tilde{\alpha}$ ein Weg mit Startpunkt z_0. Sei $\tilde{\tilde{\alpha}}$ der q-Lift von α mit Startpunkt x_0. Dann sind $q \circ \tilde{\tilde{\alpha}}$ sowie $\tilde{\alpha}$ r-Lifts von α mit Startpunkt y_0, also $\tilde{\alpha} = q \circ \tilde{\tilde{\alpha}}$. Aber $q\left(\tilde{\tilde{\alpha}}(1)\right) = \tilde{\alpha}(1) = y$.

Jeder Punkt $y \in Y$ liegt in einer Überlagerungsmenge $V \subset Y$ von q: Sei $z := r(y)$. Es existiert dann eine wegzusammenhängende Umgebung von z, die für p und r eine Überlagerungsmenge ist. Sei V die Scheibe von $r^{-1}(U)$ mit $y \in V$. Sei $p^{-1}(U) = \bigsqcup_{\alpha \in J} U_\alpha$ eine Zerlegung in Scheiben. Die Abbildung q bildet jedes U_α nach $r^{-1}(U)$ ab. Die U_α sind zusammenhängend und disjunkt und q ist stetig, also ist $q(U_\alpha)$ zusammenhängend, d.h. q bildet U_α komplett in genau eine Scheibe von $r^{-1}(U)$ ab. Daraus folgt,

$$q^{-1}(V) = \bigsqcup_{J' := \{\alpha \in J : q(U_\alpha) \subset V\}} U_\alpha.$$

Mit $p_0 := p|_{U_\alpha},\ q_0 := q|_{U_\alpha}$ und $r_0 := r|_V$ erhält man das kommutative Diagramm

$$\begin{tikzcd}
U_\alpha \arrow[rr, "q_0"] \arrow[dr, "p_0"'] & & V \arrow[dl, "r_0"] \\
& U &
\end{tikzcd},$$

also ist $q_0 = r_0^{-1} \circ p_0$ ein Homöomorphimus. □

Theorem 2.65
Sei $p\colon E \to B$ eine universelle Überlagerung und $r\colon Y \to B$ eine Überlagerung mit E, B, Y wegzusammenhängend und lokal wegzusammenhängend. Dann existiert eine Überlagerung $q\colon E \to Y$ die das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
E \arrow[rr, "q"] \arrow[dr, "p"'] & & Y \arrow[dl, "r"] \\
& B &
\end{tikzcd}$$

kommutieren lässt.

Proof
Sei $b_0 \in B,\ e_0 \in E$ und $y_0 \in Y$ mit $p(e_0) = r(y_0) = b_0$. Da E einfach zusammenhängend ist, gilt

$$p_*(\pi_1(E, e_0)) = \{[e_{b_0}]\} \subset r_*(\pi_1(Y, y_0)).$$

Der Liftsatz 2.57 liefert nun einen r-Lift $q\colon E \to Y$ von p. Nach Lemma 2.64 ist q eine Überlagerung. □

Wir wissen bereits, dass sich gutartige Überlagerungen $p\colon E \to B$ durch Untergruppen von $\pi_1(B, b_0)$ charakterisieren lassen. Unter einer weiteren topologischen Voraussetzung an B gilt auch die Umkehrung, d.h. Untergruppen von $\pi_1(B, b_0)$ lassen sich durch Überlagerungen $p\colon E \to B$ charakterisieren. Hierzu:

Definition 2.66
Der topologische Raum X heißt **`semilokal einfach zusammenhängend`**, *wenn für alle $x \in X$ eine Umgebung U von X existiert, so dass die durch die Inklusionsabbildung $\iota\colon U \hookrightarrow X$ induzierte Abbildung*

$$\iota_*\colon \pi_1(U, x) \to \pi_1(X, x)$$

der triviale Gruppenhomomorphismus ist.

Bemerkung 2.67
Aus einfach zusammenhängend folgt semilokal einfach zusammenhängend.

Definition 2.68
Wir nennen eine Überlagerung $p\colon E \to B$ **`gut`**, *falls E lokal wegzusammenhängend und wegzusammenhängend ist.*

Wir bezeichnen mit $[p : E \to B]_{\text{Ü}}$ die Menge aller zu p überlagerungsäquivalenten Überlagerungen $p'\colon E' \to B$. Außerdem sei $[H]_{\pi_1(B,b_0)}$ die Menge aller zur Untergruppe $H \subset \pi_1(B, b_0)$ konjugierten Untergruppen von $\pi_1(B, b_0)$. Dies sind also Äquivalenzklassen.

Theorem 2.69
Sei B lokal wegzusammenhängend und wegzusammenhängend und $b_0 \in B$. Dann ist die Abbildung

$$\begin{aligned} &\left\{[p : E \to B]_{\text{Ü}} \;\middle|\; p\colon E \to B \text{ ist eine gute Überlagerung} \right\} \\ &\longrightarrow \left\{[H]_{\pi_1(B,b_0)} \;\middle|\; H \text{ ist eine Untergruppe von } \pi_1(B, b_0)\right\}, \\ [p : E \to B]_{\text{Ü}} &\longmapsto [p_*(\pi_1(E, e_0))]_{\pi_1(B,b_0)}, \end{aligned}$$

für irgendein $e_0 \in p^{-1}(b_0)$, wohldefiniert (insbesondere unabhängig von der Wahl von e_0) und injektiv und sogar bijektiv, falls B zusätzlich semilokal einfach zusammenhängend.

Proof
Die Wohldefiniertheit und Injektivität dieser Abbildung folgt, indem man Theorem 2.60 (mehrfach) benutzt.
Noch zu zeigen: Ist B lokal wegzusammenhängend, wegzusammenhängend und semilokal einfach zusammenhängend, so existiert zu gegebener Untergruppe $H \subset \pi_1(B, b_0)$ eine gute Überlagerung $p\colon E \to B$ und ein $e_0 \in p^{-1}(b_0)$ mit $p_*(\pi_1(E, e_0)) = H$. Ein Beweis dieser Surjektivitätsaussage lässt sich im Buch 'Topology' von Munkres, §§77, finden. Der Beweis ist wohl nicht so sehr wichtig für die algebraische Topologie, aber auf jeden Fall sehr typisch für die Flächen der komplexen Analysis. □

Ich bedanke mich bei allen Zuhörern: Sie sind alle sehr lieb gewesen!