Dr. Batu Güneysu
Institut für Mathematik
Rudower Chaussee 25
Haus 1 Raum 309

Übungsblatt 7

Topologie I SS 2016

Abgabe: 13. Mai

Aufgabe 1 Zeigen Sie: Der metrische (also das erste Abzählbarkeitsaxiom erfüllende) Raum

$$\mathbb{R}^\infty = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \cdots, \quad d\big((x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (y_n)_{n\in\mathbb{N}}\big) := \sup_{n\in\mathbb{N}} \min(|x_n - y_n|, 1)$$

erfüllt nicht das zweite Abzählbarkeitsaxiom.

Aufgabe 2 Sei J eine abzählbare Menge und seien X_j, $j \in J$, topologische Räume. Zeigen Sie:
a) Der Raum $\prod_{j\in J} X_j$ erfüllt das erste Abzählbarkeitsaxiom in der Produkttopologie, genau dann wenn jedes X_j das erste Abzählbarkeitsaxiom erfüllt.
b) Der Raum $\prod_{j\in J} X_j$ erfüllt das zweite Abzählbarkeitsaxiom in der Produkttopologie, genau dann wenn jedes X_j das zweite Abzählbarkeitsaxiom erfüllt.

Aufgabe 3 Betrachten Sie auf $\mathbb{R}$ die Topologie $\tau_{\mathscr{B}}$ die erzeugt wird von der Basis

$$\mathscr{B} := \{A \subset \mathbb{R} : \ A = (a,b) \text{ für gewisse reelle } a < b \text{ oder } A = (a,b) \setminus Y \text{ für gewisse reelle } a < b\},$$

wobei $Y := \{1/n : \ n \in \mathbb{N}\}$. Zeigen Sie: $(\mathbb{R}, \tau_{\mathscr{B}})$ ist Hausdorff aber nicht regulär.