Einzelne Aufgaben zur Analysis

(Experimentelle Fassung)

Internes Material der Arbeitsgruppe
Interaktive Mathematik- und Informatikgrundausbildung

HUMBOLDT-UNIVERSITÄT ZU BERLIN
Mathematisch-Naturwissenschaftliche Fakultät II
Institut für Mathematik

Roczen, Marko,   Wolter, Helmut

Einzelne Aufgaben zur Analysis (experimentelle Fassung)

Institut für Mathematik
an der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät II
der Humboldt-Universität zu Berlin, 2004

Vorbemerkung

Die Aufgaben zur Analysis bilden ein experimentelles Material der Arbeitsgruppe zur interaktiven Mathematik- und Informatikgrundausbildung an der Humboldt-Universität zu Berlin. Sie entstanden aus Diskussionen von H. Wolter und M. Roczen und wurden vom letztgenannten Autor in der vorliegenden Fassung bearbeitet.

Hier soll insbesondere die Verbindung zur Ausbildung auf dem Gebiet der linearen Algebra aufgezeigt werden; Darstellung und Gliederung sind dementsprechend nur vorläufig.

Wir erhielten teilweise Förderung durch das Bundesministerium für Bildung und Forschung unter dem Kennzeichen 01NM075D, die Verantwortung für den Inhalt liegt bei den Autoren.

Die Online-Fassung dieses Materials ist als Hypertext-Dokument unter

http://www.math.hu-berlin.de/~in2math/results.html

verfügbar, mit (S) gekennzeichnete Aufgaben stehen dort jeweils in Varianten zur Verfügung. Solche Aufgaben, die sowohl Bestandteil der Analysis-Grundausbildung als auch der Ausbildung zur linearen Algebra sein können, sind nur dann aufgenommen, wenn sie nicht bereits in der Online-Fassung

http://www.math.hu-berlin.de/~in2math/aufg/laAufg.pdf

unseres Materials zur linearen Algebra enthalten sind; in diesen Fällen haben wir uns mit einem Link zu den Aufgaben begnügt, die entsprechenden Indexeinträge jedoch aufgenommen.

Verweise auf Textstellen der Online-Fassung sind blau markiert; Hyperlinks (rot gekennzeichnet) verweisen auf weitere Dateien oder Web-Inhalte. Die Systematik folgt der Gliederung zur linearen Algebra, so dass die hier aufgeführten Aufgaben konsequenter Weise als Kapitel 7 beginnen.

Berlin, im September 2004

Aufgabensammlung

Im nachfolgenden Text genannte Stoffeinheiten beziehen sich auf das Material zur linearen Algebra. Folgen Sie den durch die Aufgabennummern gegebenen Links für detailliertere Information. Zum Kapitelanfang ist jeweils kurz skizziert, zu welchen Themenbereiche Aufgaben vorkommen.

Aufgaben zum Kapitel 0

MENGENLEHRE UND LOGIK

Inhalt mit Bezug zur Analysis:
Mengen, Logische Grundbegriffe, Relationen und Abbildungen

Aufgabe 0/1/010
Mengenoperationen (1)
Index: Differenz von Mengen, Durchschnitt zweier Mengen, Vereinigung zweier Mengen
Stoffeinheiten: 0/1/1 - 0/1/15 Mengen

Aufgabe 0/1/020
Mengenoperationen (2), Komplementärmengen
Index: Differenz von Mengen, Durchschnitt zweier Mengen, Vereinigung zweier Mengen, Komplement von Mengen
Stoffeinheiten: 0/1/1 - 0/1/15 Mengen

Aufgabe 0/1/030
Mengenoperationen (3)
Index: Komplement von Mengen, Durchschnitt eines Mengensystems, Vereinigung eines Mengensystems
Stoffeinheiten: 0/1/1 - 0/1/15 Mengen

Aufgabe 0/1/040
Durchschnitt eines Mengensystems
Index: Komplement von Mengen, Durchschnitt eines Mengensystems, Vereinigung eines Mengensystems, leere Menge
Stoffeinheiten: 0/1/1 - 0/1/15 Mengen

Aufgabe 0/1/050
Mengenoperationen, kartesisches Produkt
Index: kartesisches Produkt, Durchschnitt zweier Mengen, Vereinigung zweier Mengen
Stoffeinheiten: 0/1/1 - 0/1/15 Mengen

Aufgabe 0/1/060
Potenzmengen
Index: Potenzmenge
Stoffeinheiten: 0/1/1 - 0/1/15 Mengen

Aufgabe 0/1/070
Potenzmengen und Mengenoperationen
Index: Potenzmenge, Durchschnitt zweier Mengen, Vereinigung zweier Mengen, Teilmengenbeziehung
Stoffeinheiten: 0/1/1 - 0/1/15 Mengen

Aufgabe 0/2/010 (S)
Wahrheitswerte (1)
Index: Wahrheitswert, klassische Aussagenverbindungen
Stoffeinheiten: 0/2/1 - 0/2/7 Logische Grundbegriffe

Aufgabe 0/2/011 (S)
Wahrheitswerte (2)
Index: Wahrheitswert, klassische Aussagenverbindungen
Stoffeinheiten: 0/2/1 - 0/2/7 Logische Grundbegriffe

Aufgabe 0/2/012 (S)
Wahrheitswerte (3)
Index: Wahrheitswert, klassische Aussagenverbindungen
Stoffeinheiten: 0/2/1 - 0/2/7 Logische Grundbegriffe

Aufgabe 0/2/013 (S)
Wahrheitswerte (4)
Index: Wahrheitswert, klassische Aussagenverbindungen
Stoffeinheiten: 0/2/1 - 0/2/7 Logische Grundbegriffe

Aufgabe 0/2/014 (S)
Wahrheitswerte (5)
Index: Wahrheitswert, klassische Aussagenverbindungen
Stoffeinheiten: 0/2/1 - 0/2/7 Logische Grundbegriffe

Aufgabe 0/2/015 (S)

Wahrheitswerte (6)

Index: Wahrheitswert, klassische Aussagenverbindungen, Wahrheitswerttabelle

Stoffeinheiten: 0/2/1 - 0/2/7 Logische Grundbegriffe

Aufgabe 0/2/020
Äquivalenz von Aussagen (1)

Index: klassische Aussagenverbindungen, Wahrheitswerttabelle, Äquivalenz von Aussagen

Stoffeinheiten: 0/2/1 - 0/2/7 Logische Grundbegriffe

Aufgabe 0/2/030
Äquivalenz von Aussagen (2)

Index: klassische Aussagenverbindungen, Wahrheitswerttabelle, Abtrennungsregel, Kettenschluss, Kontraposition, indirekter Beweis, Beweisprinzipien

Stoffeinheiten: 0/2/1 - 0/2/7 Logische Grundbegriffe

Aufgabe 0/2/040
Aussagenverbindungen (1)

Index: klassische Aussagenverbindungen, Wahrheitswerttabelle, Implikation

Stoffeinheiten: 0/2/1 - 0/2/7 Logische Grundbegriffe

Aufgabe 0/2/050
Aussagenverbindungen (2)

Index: klassische Aussagenverbindungen, Implikation

Stoffeinheiten: 0/2/1 - 0/2/7 Logische Grundbegriffe

Aufgabe 0/2/060
Aussagenverbindungen (3)

Index: klassische Aussagenverbindungen, Äquivalenz von Aussagen

Stoffeinheiten: 0/2/1 - 0/2/7 Logische Grundbegriffe

Aufgabe 0/2/070
Aussagenverbindungen (4)

Index: klassische Aussagenverbindungen, Negation

Stoffeinheiten: 0/2/1 - 0/2/7 Logische Grundbegriffe

Aufgabe 0/2/080
Aussagenverbindungen (5)

Index: klassische Aussagenverbindungen, Wahrheitswerttabelle, indirekter Beweis

Stoffeinheiten: 0/2/1 - 0/2/7 Logische Grundbegriffe

Aufgabe 0/2/090

Aussagenverbindungen (6)

Index: klassische Aussagenverbindungen, Äquivalenz von Aussagen, Negation

Stoffeinheiten: 0/2/1 - 0/2/7 Logische Grundbegriffe

Aufgabe 0/2/100
Binomialkoeffizienten

Index: vollständige Induktion, Induktionsaxiom, Induktionsschritt, Induktionsbehauptung, Anfangsschritt, Induktionsvoraussetzung

Stoffeinheiten: 0/2/1 - 0/2/7 Logische Grundbegriffe

Aufgabe 0/2/110
Potenzmenge, Anzahl der Elemente

Index: vollständige Induktion, Induktionsaxiom, Induktionsschritt, Induktionsbehauptung, Anfangsschritt, Induktionsvoraussetzung, Potenzmenge

Stoffeinheiten: 0/2/1 - 0/2/7 Logische Grundbegriffe

Aufgabe 0/2/120
Vollständige Induktion (1)

Index: vollständige Induktion, Induktionsaxiom, Induktionsschritt, Induktionsbehauptung, Anfangsschritt, Induktionsvoraussetzung

Stoffeinheiten: 0/2/1 - 0/2/7 Logische Grundbegriffe

Aufgabe 0/2/130
Vollständige Induktion (2)

Index: vollständige Induktion, Induktionsaxiom, Induktionsschritt, Induktionsbehauptung, Anfangsschritt, Induktionsvoraussetzung

Stoffeinheiten: 0/2/1 - 0/2/7 Logische Grundbegriffe

Aufgabe 0/3/010
Potenzmenge und charakteristische Funktion

Index: bijektive Abbildung, Abbildung

Stoffeinheiten: 0/3/1 - 0/3/37 Relationen und Abbildungen

Aufgabe 0/3/020
Relationen, Beispiele (1)

Index: Relation, Eigenschaften von Relationen

Stoffeinheiten: 0/3/1 - 0/3/37 Relationen und Abbildungen

Aufgabe 0/3/030
Relationen, Beispiele (2)

Index: Relation, Eigenschaften von Relationen

Stoffeinheiten: 0/3/1 - 0/3/37 Relationen und Abbildungen

Aufgabe 0/3/040
Differenzengleichheit auf $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$

Index: Differenzengleichheit, Äquivalenzrelation, Relation

Stoffeinheiten: 0/3/1 - 0/3/37 Relationen und Abbildungen

Aufgabe 0/3/050
Operationen rationaler Zahlen

Index: Quotientengleicheit, Äquivalenzrelation, Relation, Repräsentantenunabhängigkeit

Stoffeinheiten: 0/3/1 - 0/3/37 Relationen und Abbildungen

Aufgabe 0/3/060
Lexikographische Ordnung

Index: Ordnung, lexikographische Ordnung

Stoffeinheiten: 0/3/1 - 0/3/37 Relationen und Abbildungen

Aufgabe 0/3/070
Abbildungen, Wertetafeln

Index: Abbildung, Wertetafel einer Abbildung

Stoffeinheiten: 0/3/1 - 0/3/37 Relationen und Abbildungen

Aufgabe 0/3/080
Eigenschaften von Abbildungen (1)

Index: Abbildung, Eigenschaften von Abbildungen, Komposition von Abbildungen, injektive Abbildung, surjektive Abbildung, Produkt von Abbildungen

Stoffeinheiten: 0/3/1 - 0/3/37 Relationen und Abbildungen

Aufgabe 0/3/090
Eigenschaften von Abbildungen (2)

Index: Abbildung, Eigenschaften von Abbildungen, Komposition von Abbildungen, injektive Abbildung, bijektive Abbildung, Produkt von Abbildungen, Umkehrabbildung

Stoffeinheiten: 0/3/1 - 0/3/37 Relationen und Abbildungen

Aufgabe 0/3/100
Eigenschaften von Abbildungen (3)

Index: gleichmächtige Mengen, surjektive Abbildung

Stoffeinheiten: 0/3/1 - 0/3/37 Relationen und Abbildungen

Aufgabe 0/3/110
Natürliche Zahlen

Index: natürliche Ordnung, Addition ganzer Zahlen

Stoffeinheiten: 0/3/1 - 0/3/37 Relationen und Abbildungen

Aufgabe 0/3/120
Mengenpotenzen (1)

Index: Abbildung, Definitionsbereich einer Abbildung, Bild einer Abbildung

Stoffeinheiten: 0/3/1 - 0/3/37 Relationen und Abbildungen

Aufgabe 0/3/130
Mengenpotenzen (2)

Index: Abbildung, Definitionsbereich einer Abbildung, Bild einer Abbildung

Stoffeinheiten: 0/3/1 - 0/3/37 Relationen und Abbildungen

Aufgaben zum Kapitel 1

EINIGE ARITHMETISCHE OPERATIONEN

Inhalt mit Bezug zur Analysis:
Monoide, Begriff der Gruppe, Rationale Zahlen, Der Körper der komplexen Zahlen, Polynome in einer Unbestimmten, Der Begriff der Teilbarkeit, Teilbarkeitslehre für ganze Zahlen

Aufgabe 1/1/010
Operationen, Beispiele
Index: Operation, Monoid, Operation eines Monoids
Stoffeinheiten: 1/1/1 Monoide

Aufgabe 1/1/020
Monoide und Gruppen, Beispiele
Index: Operation, Monoid, Gruppe
Stoffeinheiten: 1/1/2 - 1/1/5 Begriff der Gruppe

Aufgabe 1/1/030
Beispiele für Gruppen (1)
Index: Gruppe
Stoffeinheiten: 1/1/2 - 1/1/5 Begriff der Gruppe

Aufgabe 1/1/040
Rechnen mit Gruppenelementen (1)
Index: Gruppenoperation
Stoffeinheiten: 1/1/2 - 1/1/5 Begriff der Gruppe

Aufgabe 1/2/050 (S)
Rechnen mit komplexen Zahlen (2)
Index: komplexe Zahlen, Körper
Stoffeinheiten: 1/2/7 - 1/2/8 Der Körper der komplexen Zahlen

Aufgabe 1/2/070
Adjunktion von Quadratwurzeln
Index: Unterkörper
Stoffeinheiten: 1/2/4 - 1/2/5 Integritätsbereiche und Körper

Aufgaben zum Kapitel 2

GLEICHUNGEN UND POLYNOME

Inhalt mit Bezug zur Analysis:

Der Begriff des Gleichungssystems, Euklidischer Algorithmus, Nullstellen und Faktorzerlegung

Aufgabe 2/1/010 (S)

Nullstellenmengen von Polynomen (1)

Index: Nullstellenmenge, Polynom

Stoffeinheiten: 2/1/1 - 2/1/2 Der Begriff des Gleichungssystems

Aufgabe 2/1/015 (S)

Nullstellenmengen von Polynomen (2)

Index: Nullstellenmenge, Polynom

Stoffeinheiten: 2/1/1 - 2/1/2 Der Begriff des Gleichungssystems

Aufgabe 2/1/030

Eigenschaften von Nullstellenmengen (2)

Index: Nullstellenmenge

Stoffeinheiten: 2/1/1 - 2/1/2 Der Begriff des Gleichungssystems

Aufgabe 2/1/040 (S)

Nullstellenmengen von Polynomen (3)

Index: Nullstellenmenge, Polynom

Stoffeinheiten: 2/1/1 - 2/1/2 Der Begriff des Gleichungssystems

Aufgabe 2/1/050 (S)

Nullstellenmengen von Polynomen (4)

Index: Nullstellenmenge, Polynom

Stoffeinheiten: 2/1/1 - 2/1/2 Der Begriff des Gleichungssystems

Aufgabe 2/1/060

Veranschaulichung von Nullstellenmengen

Index: Nullstellenmenge, Polynom

Stoffeinheiten: 2/1/1 - 2/1/2 Der Begriff des Gleichungssystems

Aufgabe 2/4/005 (S)

Division mit Rest für Polynome (1)

Index: Division mit Rest

Stoffeinheiten: 2/4/1 - 2/4/4 Der euklidische Algorithmus

Aufgabe 2/4/006 (S)
Division mit Rest, ausführliche Darstellung (2)

Index: Division mit Rest

Stoffeinheiten: 2/4/1 - 2/4/4 Der euklidische Algorithmus

Aufgabe 2/4/007 (S)
Bestimmung des größten gemeinsamen Teilers von Polynomen (1)

Index: größter gemeinsamer Teiler für Polynome, Division mit Rest, Kettendivision, euklidischer Algorithmus

Stoffeinheiten: 2/4/5 - 2/4/14 Nullstellen und Faktorzerlegung

Aufgabe 2/4/010 (S)
Division mit Rest für Polynome (3)

Index: Division mit Rest

Stoffeinheiten: 2/4/1 - 2/4/4 Der euklidische Algorithmus

Aufgabe 2/4/020 (S)
Bestimmung des größten gemeinsamen Teilers von Polynomen (2)

Index: größter gemeinsamer Teiler für Polynome, Division mit Rest, Kettendivision, euklidischer Algorithmus

Stoffeinheiten: 2/4/5 - 2/4/14 Nullstellen und Faktorzerlegung

Aufgabe 2/4/030 (S)
Der größte gemeinsame Teiler in Abhängigkeit von Parametern

Index: größter gemeinsamer Teiler für Polynome, Division mit Rest, Kettendivision

Stoffeinheiten: 2/4/5 - 2/4/14 Nullstellen und Faktorzerlegung

Aufgabe 2/4/040 (S)
Nullstellenbestimmung mit Hilfe des euklidischen Algorithmus

Index: größter gemeinsamer Teiler für Polynome, Division mit Rest, Kettendivision, Nullstellenmenge

Stoffeinheiten: 2/4/5 - 2/4/14 Nullstellen und Faktorzerlegung

Aufgabe 2/4/050 (S)
Nullstellen rationaler Polynome

Index: größter gemeinsamer Teiler für Polynome, Division mit Rest, Kettendivision, Nullstellenmenge

Stoffeinheiten: 2/4/5 - 2/4/14 Nullstellen und Faktorzerlegung

Aufgabe 2/4/070 (S)

Der größte gemeinsame Teiler als Vielfachensumme

Index: größter gemeinsamer Teiler für Polynome, euklidischer Algorithmus, Division mit Rest, Kettendivision

Stoffeinheiten: 2/4/5 - 2/4/14 Nullstellen und Faktorzerlegung

Aufgaben zum Kapitel 6

LINEARE DYNAMISCHE SYSTEME

Inhalt mit Bezug zur Analysis:

Begriff des dynamischen Systems, Norm eines Endomorphismus, Das Exponential, Homogene lineare Differenzialgleichungssysteme, Lineare Differenzialgleichungen höherer Ordnung

Aufgabe 6/4/010

Norm eines Endomorphismus (1)

Index: unitärer Vektorraum, Norm eines Endomorphismus, unitärer Automorphismus

Stoffeinheiten: 6/4/8 - 6/4/13 Norm eines Endomorphismus

Aufgabe 6/4/020

Norm eines Endomorphismus (2)

Index: unitärer Vektorraum, Norm eines Endomorphismus

Stoffeinheiten: 6/4/8 - 6/4/13 Norm eines Endomorphismus

Aufgabe 6/4/030

Norm eines Endomorphismus (3)

Index: unitärer Vektorraum, Norm eines Endomorphismus, adjungierter Endomorphismus

Stoffeinheiten: 6/4/8 - 6/4/13 Norm eines Endomorphismus

Aufgabe 6/4/040

Exponential eines Endomorphismus, Eigenschaften

Index: Exponential eines Endomorphismus, orthogonaler Automorphismus, euklidischer Vektorraum, adjungierter Endomorphismus

Stoffeinheiten: 6/4/14 - 6/4/15 Das Exponential

Aufgabe 6/4/050 (S)

Beispiele 2-dimensionaler linearer dynamischer Systeme, Beschreibung der Orbits

Index: lineares dynamisches System, Exponential einer Matrix, Orbit eines Punktes im Phasenraum, singuläre Punkte eines dynamischen Systems

Stoffeinheiten: 6/4/16 - 6/4/21 Homogene lineare Differenzialgleichungssysteme

Aufgabe 6/4/060 (S)

Lineare Differenzialgleichungen 3. Ordnung

Index: homogene lineare Differenzialgleichung n-ter Ordnung, Exponential einer Matrix, Fundamentalsystem einer homogenen linearen Differenzialgleichung n-ter Ordnung

Stoffeinheiten: 6/4/22 - 6/4/24 Lineare Differenzialgleichungen höherer Ordnung

Aufgaben zum Grundkurs Analysis

GRENZWERTE, STETIGE FUNKTIONEN

Hier finden sich einige sehr einfache Übungsaufgaben des Standardstoffs zu den Themen Grenzwerte von Folgen und Funktionen, Stetigkeit, Differenzierbarkeit (Kurvendiskussion, taylorscher Satz); sie wurden ohne weiteren Kommentar eingefügt. Das Kapitel 6 baut selbstverständlich darauf auf.

Aufgabe 7/1/010 (S: Varianten)
Grenzwert einer Folge von Quotienten
Index: Folge, Grenzwert einer Zahlenfolge

Bestimmen Sie

$$\lim_{n\to\infty} \frac{-3n^3 - n^2 + n + 9}{5n^3 + 3n^2 + 4n + 6} .$$

Lösung. Offensichtlich konvergieren Zähler und Nenner der rechten Seite von

$$\lim_{n\to\infty} \frac{-3 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + \frac{9}{n^3}}{5 + \frac{3}{n} + \frac{4}{n^2} + \frac{4}{n^3}} = \frac{\lim_{n\to\infty}(-3 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + \frac{9}{n^3})}{\lim_{n\to\infty}(5 + \frac{3}{n} + \frac{4}{n^2} + \frac{4}{n^3})} ,$$

gegen -3, bzw. 5. daher existiert der gesuchte Grenzwert und ist gleich $-\dfrac{3}{5}$.

Aufgabe 7/1/020 (S: Varianten)
Grenzwert einer rationalen Funktion (1)
Index: rationale Funktion, Grenzwert einer Funktion

Bestimmen Sie

$$\lim_{x\to\frac{4}{7}} \frac{14x^3 - 29x^2 + 26x - 8}{(7x - 4)\cdot(-x^2 + x - 1)} .$$

Lösung. Mit $F(x) = 14x^3-29x^2+26x-8$ und $G(x) = -7x^3+11x^2-11x+4$ bezeichnen wir Zähler, bzw. Nenner des angegebenen Quotienten. Gesucht ist der Grenzwert für $x \to x_0 := \frac{4}{7}$. Offensichtlich konvergieren $F(x)$ und $G(x)$ $\big($als stetige Funktionen$\big)$ gegen $F(x_0) = 0$, bzw. $G(x_0) = 0$. Beide sind daher Vielfache des Linearfaktors $x-x_0$, gleichbedeutend Vielfache von $p(x) := 7x - 4$. Wir erhalten nach Division der entsprechenden Polynome eine Faktorisierung $F = p \cdot F_1$, $G = p \cdot G_1$ mit

$$F(x) = (7x - 4) \cdot (2x^2 - 3x + 2), \quad G(x) = (7x - 4) \cdot (-x^2 + x - 1).$$

Der gesuchte Grenzwert ist daher

$$\lim_{x\to x_0} \frac{2x^2 - 3x + 2}{-x^2 + x - 1} = \frac{F_1(x_0)}{G_1(x_0)} = -\frac{46}{37} .$$

Aufgabe 7/1/030 (S: Varianten)
Grenzwert einer rationalen Funktion (2)
Index: rationale Funktion, Grenzwert einer Funktion

Bestimmen Sie
$$\lim_{x\to\frac{3}{5}} \frac{-5x^3+23x^2-27x+9}{-10x^3+21x^2+6x-9} \ .$$

Lösung. Mit $F(x) = -5x^3+23x^2-27x+9$ und $G(x) = -10x^3+21x^2+6x-9$ bezeichnen wir Zähler, bzw. Nenner des angegebenen Quotienten. Gesucht ist der Grenzwert für $x \to x_0 := \frac{3}{5}$. Offensichtlich konvergieren $F(x)$ und $G(x)$ (als stetige Funktionen) gegen $F(x_0) = 0$, bzw. $G(x_0) = 0$. Beide sind daher Vielfache des Linearfaktors $x - x_0$, gleichbedeutend Vielfache von $p(x) := 5x-3$. Wir erhalten nach Division der entsprechenden Polynome eine Faktorisierung $F = p \cdot F_1$, $G = p \cdot G_1$ mit
$$F(x) = (5x-3)\cdot(-x^2+4x-3), \quad G(x) = (5x-3)\cdot(-2x^2+3x+3).$$
Der gesuchte Grenzwert ist daher
$$\lim_{x\to x_0} \frac{-x^2+4x-3}{-2x^2+3x+3} = \frac{F_1(x_0)}{G_1(x_0)} = -\frac{4}{17} \ .$$

Aufgabe 7/1/040 (S: Varianten)
Index: Kurvendiskussion, Polynom, Nullstelle, lokales Extremum, Wendepunkt, Monotonie, Konvexität

Es sei $f(x) = -x^3+x^2+4x-4$. Untersuchen Sie die Funktion f auf Nullstellen, lokale Extrema, Wendepunkte, Monotonie und auf Konvexität.

Lösung.

(a) Bei den Nullstellen ist eine zu erraten, die anderen lassen sich berechnen. Das Nullstellentripel von f ist $(-2, 2, 1)$.

(b) Wir setzen $f = ax^3+bx^2+cx+d$ mit $a=-1$, $b=1$, $c=4$, $d=-4$. Es ist $f'(x) = 3ax^2+2bx+c = -3x^2+2x+4$, $f''(x) = -6x+2$, $f'''(x) = -6$.
Zur Bestimmung der kritischen Punkte ist eine Fallunterscheidung vorzunehmen.
Da $b^2-3ac = 13 > 0$ ist, besitzt f' die verschiedenen Nullstellen $x_{1,2} = \frac{1}{3} \mp \frac{1}{3}\sqrt{13}$.
Für $f''(x_i) > 0$ hat f an der Stelle x_i ein lokales Minimum, für $f''(x_i) < 0$ ein lokales Maximum der Größe $f(x_i)$. Es ist $f''(x_1) = 2\sqrt{13}$ und $f''(x_2) = -2\sqrt{13}$.
Daher muß an der Stelle x_1 ein lokales Minimum und an der Stelle x_2 ein lokales Maximum vorliegen. Einsetzen ergibt für f die entsprechenden Werte $f(x_1) = -(\frac{26}{27}\sqrt{13}+\frac{70}{27})$ und $f(x_2) = (\frac{26}{27}\sqrt{13}-\frac{70}{27})$.

(c) Einzige Nullstelle von f'' ist $\frac{1}{3}$; da f''' konstant und nicht null ist, besitzt f dort einen Wendepunkt. Die Koordinaten des Wendepunktes sind $(\frac{1}{3}, f(\frac{1}{3})) = (\frac{1}{3}, -\frac{70}{27})$.

(d) Monotonie und Konvexität ergeben sich unmittelbar aus den obigen Betrachtungen.

Aufgabe 7/1/050 (S: Varianten)

Funktionswert (nach dem taylorschen Satz)

Index: taylorscher Lehrsatz, Ableitung, Entwicklung einer Funktion nach dem taylorschen Satz

Entwickeln Sie die Funktion

$$f(x) = \ln(\frac{1+x}{1-x}) \quad \text{an der Stelle} \quad x = 0$$

nach dem Taylorschen Satz so weit, dass Sie damit für die Zahl $y := f(0.01)$ die ersten 7 Stellen nach dem Komma errechnen können; geben Sie y mit dieser Genauigkeit an.

Lösung. Wir berechnen zunächst die Ableitungen bis zur 4. Ordnung:

$$f'(x) = \frac{2}{1-x^2}, \qquad f''(x) = \frac{4x}{(1-x^2)^2}$$

$$f'''(x) = \frac{4\cdot(3x^2+1)}{(1-x^2)^3}, \qquad f^{(4)}(x) = \frac{48x\cdot(x^2+1)}{(1-x^2)^4}.$$

Das lagrangesche Restglied $R_4(x) = \dfrac{f^{(4)}(\theta x)}{4!}x^4$ mit $0 < \theta < 1$ lässt sich für $x = 10^{-2}$ durch

$$|R_4(x)| < \frac{1}{4!}48\cdot 10^{-2}\cdot 4\cdot 10^{-8} < 10^{-8}$$

abschätzen. Nach der Taylorschen Formel folgt

$$f(x) = 2x + \frac{4}{3!}x^3 + R_3(x), \text{ daher}$$

$$y = f(0.01) = 0.02 + 0.000000\overline{6} + R_3(0.01) = 0.0200006\ldots$$

(Anmerkung: Übliche Taschenrechner geben ein falsches Resultat aus.)

Aufgabe 7/1/060

Eine Ungleichung

Index: Ungleichungen für reelle Zahlen, vollständige Induktion

Stellen Sie fest, für welche Zahlen $n \in \mathbb{N},\ n > 0$ die angegebene Bedingung erfüllt ist:

$$n! < (\frac{n}{2})^n$$

Lösung. Für n=1,2,3,4,5 ist die Bedingung offenbar falsch:

n	1	2	3	4	5	6
$(\frac{n}{2})^n$	$\frac{1}{2}$	1	< 4	16	< 98	729
n!	1	2	6	24	120	720

Wir beweisen, dass für $n \geq 6$ die Ungleichung erfüllt ist. Da dies für n=6 bereits gezeigt wurde, bleibt nur induktiv zu zeigen, dass für $n \geq 6$ aus $n! < (\frac{n}{2})^n$ stets $(n+1)! < (\frac{n+1}{2})^{n+1}$ folgt.

Die Behauptung ist äquivalent zu $2^{n+1}(n+1)! < (n+1)^{n+1}$, die Voraussetzung zu $2^n n! < (n)^n$. Aus letzterer erhalten wir nach Multiplikation mit $2(n+1)$ die Ungleichung $2^{n+1}(n+1)! < 2(n+1)n^n$.

Wir zeigen anschließend
$(*)$ Für $n \geq 2$ gilt $2n^n < (n+1)^n$.

Daraus folgt, dass die rechte Seite durch $(n+1)^n$ beschränkt ist und damit $2^{n+1}(n+1)! < 2(n+1)n^n < (n+1)^{n+1}$, was wir zu zeigen hatten.

Es bleibt der Beweis für $(*)$: Er ergibt sich leicht nach der binomischen Formel durch

$$(n+1)^n = n^n + \binom{n}{1} n^{n-1} + \ldots + 1 = n^n + n \cdot n^{n-1} + \ldots + 1 > 2n^n,$$

falls $n \geq 2$.

Aufgabe 7/1/070
Transzendenz der Zahl e
Index: transzendente Zahl

Beweisen Sie: Für jede Zahl $x \in \mathbb{R}$ mit $x > 0$ existieren eindeutig bestimmte Zahlen $x_\nu \in \mathbb{N}$, mit $x_\nu \leq \nu - 1$ für $\nu > 1$, die nicht fast alle gleich $\nu - 1$ sind, so dass

$$x = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{x_\nu}{\nu!}$$

ist. Zeigen Sie weiter:

> Die oben angegebene Reihe für x ist genau dann endlich (d.h. $x_\nu = 0$ für fast alle ν), wenn $x \in \mathbb{Q}$.

Folgern Sie, dass die Zahl e irrational ist.

Lösung. Wir zeigen zunächst die Konvergenz einer Reihe mit der angegebenen Eigenschaft. Die Reihe $\sum \dfrac{\nu-1}{\nu!}$ konvergiert, da

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\nu-1}{\nu!} = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\nu}{\nu!} - \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu!}$$

(beide Reihen auf der rechten Seite konvergieren).
Wir erhalten damit eine konvergente Majorante für $\sum \dfrac{x_\nu}{\nu!}$. Die Rechnung ergibt weiter (wir beginnen die Summation auf beiden Seiten mit $\nu = k+1$ und verwenden $\dfrac{\nu}{\nu!} = \dfrac{1}{(\nu-1)!}$)

$$(*) \quad \sum_{\nu=k+1}^{\infty} \frac{x_\nu}{\nu!} < \sum_{\nu=k+1}^{\infty} \frac{\nu-1}{\nu!} = \frac{1}{k!}$$

(Gleichheit ist unmöglich, da sonst $x_\nu = 1$ für fast alle ν)

Nun wird die Eindeutigkeit der Reihendarstellung gezeigt: Mit $\lfloor y \rfloor$ bezeichnen wir den ganzen Teil einer Zahl y. Notwendig ist $x_1 = \lfloor x \rfloor$, denn nach $(*)$ ist für jede beliebige Darstellung mit den geforderten Eigenschaften $\sum\limits_{\nu=2}^{\infty} \dfrac{x_\nu}{\nu!} < 1$. Wir bestimmen x_n für $n > 1$. Dazu sei y definiert durch

$$\frac{y}{n!} = x - \sum_{\nu=1}^{n-1} \frac{x_\nu}{\nu!}.$$

Wir zeigen $x_n = \lfloor y \rfloor$. Dies sei falsch, so erhalten wir folgende Fälle:

a) $x_n < \lfloor y \rfloor$.

$$x = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{x_\nu}{\nu!} = \sum_{\nu=1}^{n} \frac{x_\nu}{\nu!} + \sum_{\nu=n+1}^{\infty} \frac{x_\nu}{\nu!} < \sum_{\nu=1}^{n} \frac{x_\nu}{\nu!} + \frac{1}{n!} \leq x, \ \lightning.$$

b) $x_n > \lfloor y \rfloor$.
Dann ist $x_n \geq \lfloor y \rfloor + 1$,

$$x = \sum_{\nu=1}^{n-1} \frac{x_\nu}{\nu!} + \frac{y}{n!} < \sum_{\nu=1}^{n-1} \frac{x_\nu}{\nu!} + \frac{x_n}{n!} \leq \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{x_\nu}{\nu!} = x, \ \lightning.$$

Damit folgt Eindeutigkeit. Das Verfahren führt tatsächlich auf eine Reihe mit der Summe x, denn es ist

$$x - \sum_{\nu=1}^{n} \frac{x_\nu}{\nu!} = \sum_{\nu=n+1}^{\infty} \frac{x_\nu}{\nu!} < \frac{1}{n!}$$

(vgl. $(*)$). Wäre für fast alle Indizes $x_\nu = \nu - 1$, so folgt, dass von einer gewissen Position n an die Summe der übrigen Glieder gleich $\dfrac{1}{n!}$ ist (im Gegensatz zum obigen, eindeutigen Verfahren zur Bestimmung der x_n).

Wir zeigen nun, dass die Reihe genau dann endlich ist, wenn ihre Summe rational ist.

Bricht die Reihe ab, so ist offensichtlich x rational. Es bleibt zu zeigen, dass umgekehrt x irrational ist, falls die Reihe nicht abbricht. Angenommen $x = \dfrac{p}{q} \in \mathbb{Q}$, $p, q \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$,

$$x = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{x_\nu}{\nu!}.$$

Dann ist $x - \sum\limits_{\nu=1}^{q} \dfrac{x_\nu}{\nu!} > 0$ und sogar $> \dfrac{1}{q!}$ (denn der Hauptnenner der Summe ist $q!$).

Nun gilt aber wegen $(*)$

$$x - \sum_{\nu=1}^{q} \frac{x_\nu}{\nu!} = \sum_{\nu=q+1}^{q} \frac{x_\nu}{\nu!} < \frac{1}{q!}, \ \lightning.$$

Es ergibt sich insbesondere, dass $e - 1 = \sum\limits_{\nu=1}^{\infty} \dfrac{1}{\nu!}$ und damit e irrational ist.

Aufgabe 7/1/080

Wertebereiche von Funktionen

Index: Wertebereich, Bestimmung des Wertebereichs einer Funktion durch Kurvendiskussion

Bestimmen Sie die Bilder (d.h. die „genauen Wertebereiche“) der folgenden Abbildungen:

(1) $f_1 :]-1,1[\to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$

(2) $f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \sqrt{\dfrac{x^2+x+1}{x^2-x+1}}$

Hinweis: Die Lösung erfordert nicht mehr als Kenntnis des Zwischenwertsatzes sowie einfacher Eigenschaften stetiger Funktionen und Grenzwerte.

Lösung. (1) Die Funktionen $x \mapsto 1-x^2$ und $x \mapsto \sqrt{x}$ sind stetig; dies gilt dann auch für die Hintereinanderausführung $x \mapsto \sqrt{1-x^2}$. Leicht folgt nun, dass f_1 auf dem offenen Intervall $]-1,1[$ stetig ist, denn der Nenner ist dort > 0. Weiter ergibt sich nach Multiplikation von Zähler und Nenner mit $\dfrac{1}{x}$ bzw. $-\dfrac{1}{x}$

$$\lim_{x\to 1} f_1(x) = \lim_{x\to 1} \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{x^2}-1}} = +\infty,$$

$$\lim_{x\to -1} f_1(x) = \lim_{x\to -1} -\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{x^2}-1}} = -\infty.$$

Zu jeder Zahl $u \in \mathbb{R}$ existieren daher $a, b \in \mathbb{R}$ mit $f_1(a) < u, \ \ f_1(b) < u$. Wir wenden den Zwischenwertsatz auf die Einschränkung $]a,b[\to \mathbb{R}$ von f_1 an und erhalten, dass eine Zahl $c \in \mathbb{R}$ existieren muss, für die $f_1(c) = u$.

Wir erhalten $\operatorname{im}(f_1) = \mathbb{R}$

(2) Hier geben wir nur das Resultat an, es beruht ebenfalls auf dem Zwischenwertsatz: $\operatorname{im}(f_2) = [\frac{1}{3}\sqrt{3}, \sqrt{3}]$.

Aufgabe 7/1/090

Ein globales Extremum

Index: Extrema einer Funktion, Kurvendiskussion, Ableitung, Grenzwert

In einem hohen Turm mit quadratischer Grundfläche (Seitenlänge a) befindet sich in einer Wand eine Tür mit der Höhe b. Parallel zu den angrenzenden Wänden soll ein Balken in den Turm geschoben werden. Berechnen Sie (unter Vernachlässigung der Balken- und Wanddicke) die größtmögliche Länge des Balkens im Fall $a = 6.4\,\mathrm{m}, \ b = 2.7\,\mathrm{m}$.

Lösung. Wir bezeichnen mit l_1 die Länge des Balkenstücks, das außerhalb des Turms liegt, mit l_2 die Länge des innerhalb des Turms gelegenen Balkenstücks und erhalten für die Länge l des Balkens $l = l_1 + l_2$. Weiter sei φ der Winkel, den der Balken mit dem Boden bildet. In dieser Position wird l maximal gewählt, d.h. vom Schnitt des Balkens mit dem Boden bis zum Durchstoßpunkt durch die der Tür gegenüberliegende

Wand des Turms und so, daß die Oberkante der Tür berührt wird; diese Zahl nennen wir $l(\varphi) = l_1(\varphi) + l_2(\varphi)$.
Damit der Balken in den Turm paßt, muß der minimale Wert $l(\varphi)$ ermittelt werden für $\varphi \in]0, \frac{\pi}{2}[$. Dies ist die gesuchte größte zulässige Länge des Balkens.
Mit den Bezeichnungen aus der Aufgabe gilt

$$l_1(\varphi)\sin(\varphi) = b, \quad l_2(\varphi)\cos(\varphi) = a, \quad \text{d.h.}$$
$$l(\varphi) = \frac{b}{\sin(\varphi)} + \frac{a}{\cos(\varphi)}, \quad \varphi \in]0, \frac{\pi}{2}[\,.$$

Wir diskutieren den Verlauf der Kurve $l(\varphi)$ im angegebenen Intervall. Zunächst gilt (wegen der stillschweigend gemachten Annahme $a, b > 0$)

$$\lim_{\varphi \to 0} l(\varphi) = +\infty, \qquad \lim_{\varphi \to \frac{\pi}{2}} l(\varphi) = +\infty,$$

folglich besitzt die in $]0, \frac{\pi}{2}[$ differenzierbare (und daher insbesondere stetige) Funktion $l(\varphi)$ dort ein globales Minimum; an der Stelle verschwindet ihre Ableitung $l'(\varphi)$. Auswertung dieser Bedingung ergibt

$$l'(\varphi) = -\frac{b\cdot\cos(\varphi)}{\sin^2(\varphi)} + \frac{a\cdot\sin(\varphi)}{\cos^2(\varphi)} = 0, \text{ daher}$$
$$b\cdot\cos^3(\varphi) = a\cdot\sin^3(\varphi).$$

Daraus ergibt sich das gesuchte Minimum an der Stelle $\varphi_{\min}$ mit

$$\tan(\varphi_{\min}) = \sqrt[3]{\frac{b}{a}}$$

(denn $l'(\varphi)$ besitzt nur eine einzige Nullstelle, was nach obigen Überlegungen hier bereits hinreichend ist für das Vorliegen eines Minimums).
Werden noch die Beziehungen

$$\sin^2(\varphi) = \frac{\tan^2(\varphi)}{1 + \tan^2(\varphi)} \quad \text{und} \quad \cos^2(\varphi) = \frac{1}{1 + \tan^2(\varphi)}$$

berücksichtigt, so ergibt sich durch Einsetzen von $\varphi = \varphi_{\min}$

$$l(\varphi_{\min}) = b\cdot\sqrt[3]{\frac{a}{b}}\cdot\sqrt{1 + \sqrt[3]{\left(\frac{b}{a}\right)^2}} + a\cdot\sqrt{1 + \sqrt[3]{\left(\frac{b}{a}\right)^2}},$$

woraus wir durch Einsetzen von $a = 6,4\,\mathrm{m}$ und $b = 2,7\,\mathrm{m}$ eine maximale Länge von $12,5\,\mathrm{m}$ für den Balken erhalten.

Aufgabe 7/1/100
Einseitige Differenzierbarkeit einer Funktion

Index: Ableitung, einseitige Ableitung, rechtsseitige Ableitung, einseitige Differenzierbarkeit

$f : [a, b[\to \mathbb{R}$ sei eine stetige Abbildung, die im Intervall $]a, b[$ differenzierbar ist. Falls f in a differenzierbar ist (d.h. der Grenzwert des Differenzenquotienten für $x \to a + 0$

existiert), so bezeichnen wir diese Ableitung mit $f'_+(a)$ (*rechtsseitige Ableitung in* $a+0$) und nennen f in a *rechtsseitig differenzierbar*.

Beweisen Sie: Falls $\lim_{x\to a+0} f'(x)$ existiert, so ist f in a rechtsseitig differenzierbar sowie

$$f'_+(a) = \lim_{x\to a+0} f'(x).$$

Lösung. Es sei $L := \lim_{x\to a+0} f'(x)$. Wir haben zu beweisen, dass

$$L = \lim_{h\to h+0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}.$$

Nach dem 1. Mittelwertsatz existiert zu jeder (hier positiven) Zahl h eine Zahl $\theta_h \in]0,1[$ mit

$$f(a+h) - f(a) = h \cdot f'(a+\theta_h).$$

Wir erhalten

$$L = \lim_{x\to a+0} f'(x) = \lim_{h\to a+0} f'(a+\theta_h) = \lim_{h\to a+0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

und damit $L = f'_+(a)$.

Sachverzeichnis