M. Roczen und H. Wolter,
W. Pohl, D.Popescu, R. Laza

Kapitel 1

Erste algebraische Strukturen

Hier werden die grundlegenden Begriffe eingeführt; sie abstrahieren vom historisch entstandenen Zahlbegriff und erlauben uns, mit nicht allzu großem technischem Aufwand eine Reihe von Resultaten gleichzeitig zu gewinnen, die wir sonst Fall für Fall beweisen müssten. Andererseits ergibt sich ein Ansatz für nicht triviale Erweiterungen vertrauter Sätze über das Rechnen mit Zahlen.

1.2 Ringe und Körper

Komplexe Zahlen 1/2/7

Wir betrachten einen (zunächst beliebigen) Körper K. Auf der Menge $\mathrm{C}(K) := K \times K$ wird durch

$$(a_1, a_2) + (b_1, b_2) := (a_1 + b_1, a_2 + b_2)$$

eine Operation erklärt, die $(\mathrm{C}(K), +)$ zur abelschen Gruppe macht; neutrales Element ist $(0, 0)$ (vgl. 1/1/4 (2)).

Satz.

(1) *Durch* $(a_1, b_1) \cdot (a_2, b_2) := (a_1a_2 - b_1b_2, a_1b_2 + a_2b_1)$ *erhält* $\mathrm{C}(K)$ *die Struktur eines kommutativen Ringes* $(\mathrm{C}(K), +, \cdot)$, *sein Einselement ist das Paar* $(1, 0)$.

(2) *Der Ring* $\mathrm{C}(K)$ *ist genau dann ein Körper, wenn* -1 *kein Quadrat in* K *ist.*

In unseren Anwendungen genügt die Implikation „ $\Leftarrow$ “.

Beweis. Die Verifikation der Ringeigenschaften bereitet keinerlei Schwierigkeiten, auch wenn die Definition der Multiplikation zunächst überraschend aussieht.
Zum Beweis für (2) nehmen wir an, -1 sei nicht das Quadrat eines Elements aus K. Dann besitzt $(a, b) \in \mathrm{C}(K)$ mit $(a, b) \neq (0, 0)$ ein multiplikatives Inverses: Zunächst gilt $a^2 + b^2 \neq 0$ (anderenfalls wäre $a^2 = -b^2$ und somit $-1 = a^2b^{-2}$ oder $-1 = b^2a^{-2}$, $\lightning$). Nun ist

$$\big((a^2 + b^2)^{-1}a, -(a^2 + b^2)^{-1}b\big) \cdot (a, b) = 1,$$

womit ein inverses Element gefunden ist.
Umgekehrt sei $-1 = c^2$ mit $c \in K$. Dann ist $(c, 1) \cdot (c, -1) = (0, 0)$, daher $\mathrm{C}(K)$ kein Integritätsbereich und erst recht kein Körper (vgl. 1/2/5). ❑

Bemerkung. Mit den obigen Bezeichnungen ist die Abbildung $K \to \mathrm{C}(K)$, die a auf $(a, 0)$ abbildet, ein injektiver Ringhomomorphismus. Wir identifizieren die Elemente von K mit ihren Bildern in $\mathrm{C}(K)$ und interpretieren diese Abbildung als Inklusion von Mengen, ähnlich wie wir das zuvor unter

1/2/6 (3) für die Abbildung $\mathbb{Z} \to \mathbb{Q}$ getan haben. Insbesondere werden so $0 \in K$ und $(0,0) \in \mathrm{C}(K)$ bzw. $1 \in K$ und $(1,0) \in \mathrm{C}(K)$ identifiziert. Für $x = (a,b) \in \mathrm{C}(K)$ ergibt sich dann $x = a + b \cdot (0,1)$ mit eindeutig bestimmten Zahlen $a, b \in K$.

Wir beschränken uns von nun an auf den Spezialfall, dass $K = \mathbb{R}$ der Körper der reellen Zahlen ist.

Definition. (*komplexe Zahlen*)

Es sei $K = \mathbb{R}$. Dann ist der oben konstruierte Ring $\mathrm{C}(\mathbb{R})$ ein Körper; er heißt *Körper der komplexen Zahlen* und wird von nun an mit $\mathbb{C}$ bezeichnet. Für $(0,1) \in \mathbb{C}$ verwenden wir das Symbol i.

Sie sollten das Rechnen mit komplexen Zahlen anhand von Beispielen üben; die Aufgabensammlung gibt hierzu Gelegenheit.

Im Körper $\mathbb{C}$ gilt die (zunächst abenteuerlich anmutende) Beziehung $i^2 = -1$, was natürlich nur deshalb denkbar sein kann, weil wir $\mathbb{R}$ als Teilmenge von $\mathbb{C}$ auffassen, aber $i \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ ist.

Bemerkung – Bezeichnung. (*komplexe Konjugation, Betrag*)

1. Jede komplexe Zahl α ist Summe $\alpha = a + bi$ mit eindeutig bestimmten reellen Zahlen a und b. $\mathrm{Re}(\alpha) := a$ heißt *Realteil* und $\mathrm{Im}(\alpha) := b$ *Imaginärteil* von α. Dadurch und durch die Bedingung $i^2 = -1$ lässt sich der Körper $\mathbb{C}$ „im Wesentlichen“ eindeutig charakterisieren; wir hätten uns also die mühsame elementweise Konstruktion ersparen können, wäre nur von vornherein klar gewesen, dass überhaupt ein Körper mit den eben angegebenen Eigenschaften existiert.

2. Die durch $\alpha \mapsto \overline{\alpha}$ gegebene Abbildung $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$, die α auf die komplexe Zahl $\overline{\alpha} := \mathrm{Re}(\alpha) - \mathrm{Im}(\alpha) \cdot i$ abbildet, heißt *komplexe Konjugation*. Sie ist ein Ringhomomorphismus von $\mathbb{C}$ in sich, dessen Quadrat die Identität ergibt. Für eine beliebige komplexe Zahl α gilt
$$\alpha + \overline{\alpha} = 2 \cdot \mathrm{Re}(\alpha), \quad \alpha - \overline{\alpha} = 2i \cdot \mathrm{Im}(\alpha),$$
und die Bedingung $\alpha = \overline{\alpha}$ ist äquivalent zu $\alpha \in \mathbb{R}$.

Den Beweis dieser trivialen Eigenschaften schreiben wir nicht auf.

3. Die reelle Zahl $|\alpha| := \sqrt{\alpha \cdot \overline{\alpha}} = \sqrt{\mathrm{Re}(\alpha)^2 + \mathrm{Im}(\alpha)^2} \geq 0$ heißt *Betrag* von α. Die Bedingung $|\alpha| = 0$ ist äquivalent zu $\alpha = 0$, und nach 2. gilt allgemein $|\alpha \cdot \beta| = |\alpha| \cdot |\beta|$ für $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$.

Satz. (*Fundamentalsatz der Algebra*) 1/2/8

Sind $\alpha_0, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{C}$ komplexe Zahlen, $n > 0$ und $\alpha_n \neq 0$, so existiert eine Zahl $x \in \mathbb{C}$ mit $\alpha_0 + \alpha_1 x + \ldots + \alpha_n x^n = 0$.

Dieser erstaunliche Satz wird (trotz seines Namens) hier nur zitiert; seine Beweise benutzen nichttriviale Eigenschaften der reellen Zahlen und sind auch in der Analysis gut aufgehoben.

Für den Körper der reellen Zahlen gilt die entsprechende Aussage nicht, da in $\mathbb{R}$ z.B. keine Zahl x mit $1 + x^2 = 0$ existiert.

In der Algebra werden dennoch interessante Erweiterungen des Körpers $\mathbb{C}$ untersucht, die z.B. nicht mehr kommutativ sind.

Wir entnehmen aus dem Satz 1/2/7, dass sich der Körper $\mathbb{C}$ nicht durch eine analoge Konstruktion zu einem neuen Körper erweitern lässt (denn -1 ist ein Quadrat in $\mathbb{C}$).

Aufgaben zum Kapitel 1

Aufgabe 1/2/040 (S: Varianten)
Rechnen mit komplexen Zahlen (1)

Index: komplexe Zahlen, Körper

Stoffeinheiten: 1/2/7 - 1/2/8 Der Körper der komplexen Zahlen

Rechnen mit komplexen Zahlen:

(1) $a,\ b$ bezeichnen $a = -i + 3,\ b = 3i - 1 \in \mathbb{C}$. Geben Sie $a + b,\ a - b,\ ab$ und $\frac{a}{b}$ an.

(2) Bestimmen Sie alle komplexen Zahlen x mit der Eigenschaft
$$x^2 + ix + (5i + 5) = 0.$$

(3) Lösen Sie die Gleichung $x^3 = 56i$ mit $x \in \mathbb{C}$.

Lösung.

(1) Es ist $a + b = 2i + 2,\ a - b = -4i + 4$ und $ab = 10i$.
Den Quotienten $\dfrac{a}{b}$ erhalten wir als
$$\frac{a}{b} = \frac{a\cdot\overline{b}}{b\cdot\overline{b}} = \frac{(-i+3)\cdot(-3i-1)}{(3i-1)\cdot(-3i-1)} = \frac{-8i-6}{10} = -(\frac{4}{5}i + \frac{3}{5}).$$

(2) Mit quadratischer Ergänzung lässt sich die gegebene Gleichung auch durch
$$(x + \frac{1}{2}i)^2 = -(5i + \frac{21}{4})$$
ausdrücken, gleichbedeutend als
$$(*) \qquad 4\cdot(x + \frac{1}{2}i)^2 = -20i - 21.$$
Dies ist genau dann erfüllt, wenn $-20i - 21$ das Quadrat einer komplexen Zahl $z = u + vi$ ist ($u, v \in \mathbb{R}$). Nun ist $(u + vi)^2 = u^2 - v^2 + 2uvi$, daher
$$(u + vi)^2 = -20i - 21$$
äquivalent zum System
$$\binom{*}{*} \qquad \begin{cases} u^2 - v^2 = -21 \\ \quad 2uv = -20. \end{cases}$$
Multiplizieren wir die erste Gleichung mit $4u^2$ und quadrieren wir die zweite, so entsteht nach Addition eine leicht zu lösende biquadratische Gleichung für die reelle Zahl u; nun finden wir auch v und prüfen durch Einsetzen, ob tatsächlich Lösungspaare (u, v) des Systems vorliegen. Es ergibt sich
$$z = u + vi = \pm(5i - 2).$$
Gleichheit der Quadrate zweier Zahlen bedeutet, dass diese bis auf den Faktor -1 übereinstimmen. Aus $(*)$ erhalten wir daher
$$2\cdot(x + \frac{1}{2}i) = \pm z.$$
Durch Einsetzen von z ergeben sich $x_1 = -3i + 1$ und $x_2 = 2i - 1$ als diejenigen komplexen Zahlen, für die die Gleichung (2) erfüllt ist.

(3) Wir setzen $x = u + iv$ mit reellen Zahlen $u,\ v$. Die Gleichung $x^3 = 56i$ ist nun äquivalent zu
$$u^3 + 3u^2vi - 3uv^2 - v^3i = 56i,$$

daher zu

$$\begin{cases} u^3 - 3uv^2 = 0 \\ 3uv^2 - v^3 = 56. \end{cases}$$

Im Fall $u = 0$ ergibt die zweite dieser Bedingungen $v = -2\cdot\sqrt[3]{7}$, wobei die erste trivialerweise erfüllt ist.

Ist $u \neq 0$, so erhalten wir aus der ersten Gleichung

$$u^2 - 3v^2 = 0, \text{ d.h. } (u + \sqrt{3}v)(u - \sqrt{3}v) = 0, \text{ also}$$
$$u = \pm\sqrt{3}v$$

und nach Einsetzen in die zweite

$$8v^3 = 56, \text{ daher } v = \sqrt[3]{7}.$$

$x^3 = 56i$ ist daher genau dann erfüllt, wenn x eine der drei Zahlen $x = -2\cdot\sqrt[3]{7}\,i$, $x = \pm\sqrt{3}\cdot\sqrt[3]{7} + \sqrt[3]{7}\,i$ ist.

Aufgabe 1/2/050 (S: Varianten)

Rechnen mit komplexen Zahlen (2)

Index: komplexe Zahlen, Körper

Stoffeinheiten: 1/2/7 - 1/2/8 Der Körper der komplexen Zahlen

Rechnen mit komplexen Zahlen:

(1) a, b bezeichnen $a = 2i + 2$, $b = -i - 3 \in \mathbb{C}$. Geben Sie $a + b$, $a - b$, ab und $\frac{a}{b}$ an.

(2) Bestimmen Sie alle komplexen Zahlen x mit der Eigenschaft

$$x^2 - (i + 1)x + (8i - 4) = 0.$$

Lösung.

(1) Es ist $a + b = i - 1$, $a - b = 3i + 5$ und $ab = -8i - 4$.
Den Quotienten $\dfrac{a}{b}$ erhalten wir als

$$\frac{a}{b} = \frac{a\cdot\overline{b}}{b\cdot\overline{b}} = \frac{(2i + 2)\cdot(i - 3)}{(-i - 3)\cdot(i - 3)} = \frac{-4i - 8}{10} = -(\frac{2}{5}i + \frac{4}{5}).$$

(2) Mit quadratischer Ergänzung lässt sich die gegebene Gleichung auch durch

$$(x - (\frac{1}{2}i + \frac{1}{2}))^2 = -(\frac{15}{2}i - 4)$$

ausdrücken, gleichbedeutend als

$$(*) \qquad 4\cdot(x - (\frac{1}{2}i + \frac{1}{2}))^2 = -30i + 16.$$

Dies ist genau dann erfüllt, wenn $-30i + 16$ das Quadrat einer komplexen Zahl $z = u + vi$ ist ($u, v \in \mathbb{R}$). Nun ist $(u + vi)^2 = u^2 - v^2 + 2uvi$, daher

$$(u + vi)^2 = -30i + 16$$

äquivalent zum System

$$\binom{*}{*} \qquad \begin{cases} u^2 - v^2 = 16 \\ \quad 2uv = -30. \end{cases}$$

Multiplizieren wir die erste Gleichung mit $4u^2$ und quadrieren wir die zweite, so entsteht nach Addition eine leicht zu lösende biquadratische Gleichung für die reelle Zahl u; nun finden wir auch v und prüfen dann durch Einsetzen, ob tatsächlich Lösungspaare (u, v) des Systems vorliegen. Es ergibt sich

$$z = u + vi = \pm(3i - 5).$$

Gleichheit der Quadrate zweier Zahlen bedeutet, dass diese bis auf den Faktor -1 übereinstimmen. Aus $(*)$ erhalten wir daher

$$2\cdot(x - (\frac{1}{2}i + \frac{1}{2})) = \pm z.$$

Durch Einsetzen von z ergeben sich $x_1 = -i + 3$ und $x_2 = 2i - 2$ als diejenigen komplexen Zahlen, für die die Gleichung (2) erfüllt ist.

Schwerpunkte zum gewählten Stoff

- Komplexe Zahlen (Realteil, Imaginärteil, Konjugation) [1/2/7]
- Rechnen mit komplexen Zahlen [1/2/7]
- Fundamentalsatz der Algebra (ohne Beweis) [1/2/8]

Sachverzeichnis