

Topologie I

Vorlesung von Marc Kegel
an der Humboldt-Universität zu Berlin (SoSe19)
Mitschrift von Carolin Wengler

10. Oktober 2019

Inhalt:

Ein topologischer Raum ist eine Verallgemeinerung eines metrischen Raumes, indem man immer noch in größtmöglicher Allgemeinheit von stetigen Abbildungen sprechen kann. Wir werden uns zuerst kurz mit mengentheoretischer Topologie beschäftigen. Dabei werden Konstruktionsmethoden von topologischen Räumen eingeführt und Eigenschaften von diesen untersucht, die unter Homöomorphismen (bijektiven beidseitig stetigen Abbildungen) erhalten bleiben.

Der Rest der Vorlesung wird eine elementare Einführung in die Methoden und Ergebnisse der algebraischen Topologie geben. Dabei besteht die grundsätzliche Idee darin, topologische Räume zu unterscheiden, indem man ihnen algebraische Invarianten (Zahlen, Gruppen, ...) zuordnet, die man leichter unterscheiden kann. Wir werden uns dabei häufig auf die etwas einfachere, aber immer noch sehr allgemeine Situation einschränken, in welcher die Räume die kombinatorische Struktur eines Simplicialkomplexes tragen.

Ziel der Vorlesung ist insbesondere die Entwicklung der Fundamentalgruppe und der simplizialen Homologietheorie. Mit diesen Invarianten werden wir zum Beispiel einen vollständigen Beweis des Klassifikationssatzes für Flächen liefern. Wir werden aber von Anfang an auch Anwendungen aus anderen Bereichen in den Vordergrund stellen, zum Beispiel aus der geometrischen Topologie (Heegaard-Zerlegungen von 3-Mannigfaltigkeiten), aus der Differentialtopologie (Satz vom Igel), aus der Algebra (Fundamentalsatz der Algebra, jede Untergruppe einer freien Gruppe ist frei), aus der Analysis (Brouwerscher Fixpunktsatz), aus der Gastronomie (Schinken-Sandwich-Theorem) und der Meteorologie: Auf der Erde gibt es stets zwei antipodale Punkte, an denen die gleiche Temperatur und Luftfeuchtigkeit herrschen.

Voraussetzungen:

Vorausgesetzt werden die Anfängervorlesungen (Analysis I, II und Lineare Algebra I, II), insbesondere erste topologische Grundbegriffe (offene Mengen, Stetigkeit, Kompaktheit) und elementare Algebra (Gruppen, Homomorphismen).

Literatur:

Diese Vorlesung wird sich an der Vorlesung von H. Geiges orientieren, welches am ehesten mit dem Buch von Armstrong übereinstimmt. Für mengentheoretische Topologie (d.h. Kapitel 1-3 und teilweise auch Kapitel 4) empfehle ich Ihnen auch das Buch von K. Jänich. In Kapitel 5 werde ich teilweise dem Artikel von H. Geiges folgen. Ein sehr beliebtes Lehrbuch zur (algebraischen) Topologie ist das Buch von A. Hatcher. Außerdem möchte ich Ihnen noch sehr die Vorlesungsskripte von S. Friedl und C. Wendl empfehlen.

M. Armstrong: Basic Topology, Springer, 1983.

S. Friedl: Skript zur algebraischen Topologie I-IV, erhältlich online auf seiner Homepage.

H. Geiges: Topologie, Vorlesung gehalten im WS 2009/10 an der Universität zu Köln.

H. Geiges: How to depict 5-dimensional manifolds, Jahresbericht der DMV, 2017.

A. Hatcher: Algebraic topology, erhältlich online auf seiner Homepage.

K. Jänich: Topologie, Springer, 1996.

C. Wendl: Skript zu Topologie I, erhältlich online auf seiner Homepage.

Inhaltsverzeichnis

1 Überblick	4
2 Zusammenhang	5
2.1 Definition des Zusammenhangs	5
2.2 Anwendungen	5
3 Konstruktion von topologischen Räumen	6
3.1 Die Quotiententopologie	6
3.2 Kompaktheit und die Hausdorff-Eigenschaft	7
3.3 Zusammenschlagen eines Teilraumes	9
3.4 Zusammenkleben von Räumen	9
3.5 Topologische Gruppen und homogene Räume	11
3.6 Orbiträume	11
4 Homotopie und Fundamentalgruppe	13
4.1 Homotope Abbildungen	13
4.2 Konstruktion der Fundamentalgruppe	14
4.3 Überlagerungen und Fundamentalgruppen	19
4.4 Homotopietyp	22
4.5 Endlich präsentierte Gruppen	24
4.6 Der Satz von Seifert & van Kampen	25
4.7 Anwendungen	28
5 Mannigfaltigkeiten	31
5.1 Definitionen und erste Eigenschaften	31
5.2 Die verbundene Summe	34

5.3	Henkelzerlegungen	35
5.4	Die Klassifikation von Flächen	37
5.5	Heegaard-Zerlegungen	42
6	Simplizialkomplexe	43
6.1	Triangulierungen	43
6.2	Die Baryzentrische Unterteilung	45
6.3	Die Euler-Charakteristik und die Hauptvermutung	48
6.4	Simpliziale Approximation	50
6.5	Der Brouwersche Fixpunktsatz	53
7	Simpliziale Homologie	54
7.1	Definition der Homologiegruppen	54
7.2	Erste Berechnungen	57
7.3	Kettenabbildungen	60
7.4	Topologische Invarianz der Homologie	62
7.5	Die Mayer-Vietoris-Sequenz	67
8	Anwendungen	72
8.1	Der Abbildungsgrad	72
8.2	Homologie mit Koeffizienten	74
8.3	Die Euler-Poincaré-Formel	74
8.4	Der Satz von Borsuk-Ulam	76
8.5	Der Fixpunktsatz von Lefschetz	78

1 Überblick

- Ziel: Klassifikation von topologischen Räumen.

Definition

Ein **topologischer Raum** ist ein Paar (X, \mathcal{O}) , wobei X eine Menge ist und $\mathcal{O} \subseteq \mathcal{P}(X)$ (Potenzmenge von X), sodass

- (i) $\emptyset, X \in \mathcal{O}$
- (ii) $U_1 \cap U_2 \in \mathcal{O}$ für alle $U_1, U_2 \in \mathcal{O}$
- (iii) $U_i \in \mathcal{O}$ für alle $i \in I \Rightarrow \bigcup_{i \in I} U_i \in \mathcal{O}$

Eine Menge $U \in \mathcal{O}$ nennen wir **offen**. Eine Menge $A \subset X$ heißt **abgeschlossen**, falls $X \setminus A$ offen ist.

Notation: $(X, \mathcal{O}) = X$. Wir unterdrücken also im Folgenden immer die Topologie.

- Beispiele: \mathbb{R}^n ; metrische Räume (X, d) ; Flächen wie S^2 (Oberfläche der Einheitskugel), Torus, ...

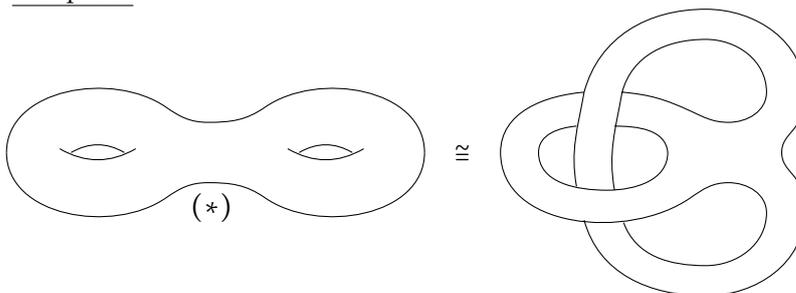
Definition

$f : X \rightarrow Y$ heißt **stetig** $\Leftrightarrow \forall U \subseteq Y$ offen gilt $f^{-1}(U)$ ist offen.

$f : X \rightarrow Y$ heißt **Homöomorphismus** $\Leftrightarrow f$ ist bijektiv und f und f^{-1} sind stetig.

Notation: $X \stackrel{f}{\cong} Y$

- Beispiele:



Satz 1.1 (Flächen-Klassifikationssatz)

Jede Fläche (wobei dieser Begriff später präzisiert werden muss) ist homöomorph zu genau einer der Folgenden: $S^2, \text{Torus}, (*), \dots$ mit Geschlecht $0, 1, 2, \dots$ (Anzahl der 'Löcher')

Topologische Invarianten:

$$\begin{aligned} & \{ \text{topologische Räume} \} \rightarrow \{ \text{algebraische Objekte} \} \\ & \text{homöomorphe Räume} \mapsto \text{gleiche (isomorphe) Objekte} \\ & \left(\begin{array}{l} \text{z.B. Flächen, Mannigfaltigkeiten} \\ \text{simpliciale Komplexe} \end{array} \right) \left(\begin{array}{l} \text{z.B. Zahlen, Gruppen} \\ \text{Vektorräume, Algebren} \end{array} \right) \end{aligned}$$

Topologische Eigenschaften sind Eigenschaften, die unter Homöomorphismen erhalten bleiben.

2 Zusammenhang

2.1 Definition des Zusammenhangs

Definition

X heißt **zusammenhängend** (zshgd) \Leftrightarrow es gibt keine offenen Mengen $U, V \subset X$ mit
(i) $U, V \neq \emptyset$ (ii) $U \cup V = X$ (iii) $U \cap V = \emptyset$.

Falls U, V mit (i)-(iii) existieren, so wird X von U, V getrennt. Ein maximal zshgd Teilraum heißt **Zusammenhangskomponente**.

• Beispiele:

- (1) $Y := [1, 2] \cup [3, 4]$ ist nicht zshgd.
- (2) $X := [1, 2] \subset \mathbb{R}$ ist zshgd. (Was per Widerspruchsbeweis unter Ausnutzung der Eigenschaften des Supremums in \mathbb{R} zu sehen ist.)

Immer unter der induzierten Teilraumtopologie:

Definition

Sei $Y \subset X$. Die **Teilraumtopologie** ist definiert durch:
 $U \subset Y$ ist offen $\Leftrightarrow \exists \tilde{U} \subset X$ offen mit $\tilde{U} \cap Y = U$.

Lemma 2.1

Sei $f : X \rightarrow Y$ stetig und X zshgd $\Rightarrow f(X)$ ist zshgd. Insbesondere ist Zusammenhängend eine topologische Eigenschaft.

Beweis:

Angenommen $f(X)$ ist nicht zshgd. Dann existieren $U, V \subset Y$ offen (nach Def. der Teilraumtopologie), sodass $U \cup V = f(X)$ und $U \cap V = \emptyset$. Mit der Stetigkeit von f würden $f^{-1}(U), f^{-1}(V)$ auch offen in X sein und somit X trennen. \square

2.2 Anwendungen

Satz 2.2 (Brouwerscher Fixpunktsatz)

Ist $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ stetig, so besitzt f einen Fixpunkt.

Beweis:

Angenommen f hat keinen Fixpunkt. Betrachte dann $g(t) := \frac{f(t)-t}{|f(t)-t|}$. g ist stetig mit $g([0, 1]) = \{-1, 1\}$. \nexists zu Lemma 1, da $\{1\} \cup \{-1\}$ nicht zshgd ist. \square

Satz 2.3 (Borsuk-Ulam)

Ist $f : S^1 \rightarrow \mathbb{R}$ stetig, wobei $S^1 := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$. Dann existiert ein **Antipodenpaar** $x, -x \in S^1$ mit $f(x) = f(-x)$.

Beweis:

Angenommen für alle $x \in S^1$ gilt $f(x) \neq f(-x)$. Dann betrachte $g : S^1 \rightarrow \{-1, 1\}$, $g(t) := \frac{f(x)-f(-x)}{|f(x)-f(-x)|}$. Falls $g(x) = \pm 1$, so $g(-x) = \mp 1$, also ist g surjektiv. \nexists zu Lemma 1. \square

Satz 2.4 (Schinken-Sandwich)

Seien $A, B \subset \mathbb{R}^2$ beschränkt und Lebesgue-messbar. Dann existiert eine Gerade, die sowohl A als auch B in zwei Mengen gleichen Maßes teilt.

Beweis:

Zu jeder Richtung $x \in S^1$ wähle eine gerichtete Gerade $l_x \in \mathbb{R}^2$, die A in zwei Teile gleichen Maßes zerlegt. (Diese Gerade ist natürlich nicht eindeutig.) Setze dazu $V_x :=$ (Halbebene links von l_x) und betrachte $f(x) := \frac{\text{Maß}(B \cap V_x)}{\text{Maß}(B)}$.

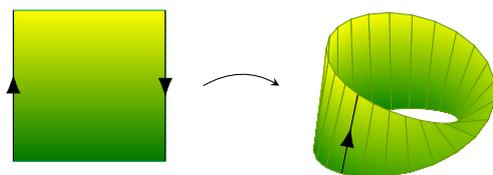
Wir können die l_x so wählen, dass $x \mapsto l_x$ stetig ist und $l_x = -l_{-x}$ und somit ist nach dem Satz über Parameterintegrale $f : S^1 \rightarrow [0, 1]$ stetig. (Der Beweis dieser Aussagen ist eine Übungsaufgabe.)

$\stackrel{2.3}{\implies} \exists x \in S^1$ mit $f(x) = f(-x) = 1 - f(x)$
 $\implies f(x) = \frac{1}{2} = f(-x)$, also halbiert l_x A und B . \square

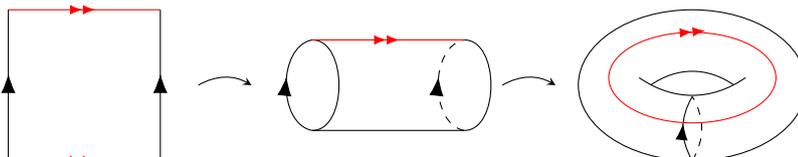
3 Konstruktion von topologischen Räumen

3.1 Die Quotiententopologie

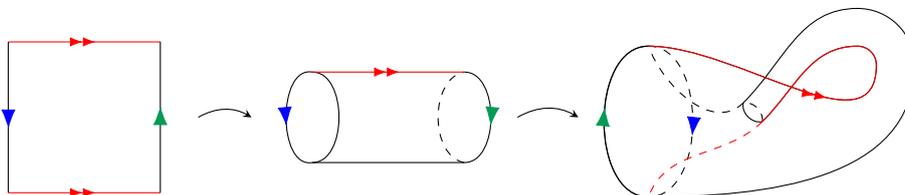
- Beispiele: Quotientenräume von $[0, 1] \times [0, 1]$
 - (1) Möbiusband



(2) Torus



(3) Kleinsche Flasche



Definition

Sei X eine Menge, \sim eine Äquivalenzrelation. Dann bezeichnet $[x] := \text{Äquivalenzklasse}$ von $x \in X$ in der Menge \mathbf{X}/\sim der **Äquivalenzklassen**.
Es ist $\pi : \mathbf{X} \rightarrow \mathbf{X}/\sim, x \mapsto [x]$ die **kanonische Projektion**.

Definition

Sei X ein topologischer Raum. X/\sim heißt **Quotientenraum**. In der **Quotiententopologie** ist $U \subset X/\sim$ offen $\Leftrightarrow \pi^{-1}(U) \in X$ ist offen.

• Bemerkung:

Statt \sim kann man auch die ÄK angeben. Betrachte z. B. $X = [0, 1] \times [0, 1]$ mit $X/\sim = T^2$. Die Äquivalenzklassen sind dann

$$\{(0, 0), (0, 1), (1, 0), (1, 1)\}$$

$$\{(x, 0), (x, 1) \mid 0 < x < 1\}$$

$$\{(0, y), (1, y) \mid 0 < y < 1\}$$

$$\{(x, y) \mid \forall 0 < x, y < 1\}$$

3.2 Kompaktheit und die Hausdorff-Eigenschaft

Definition

X heißt **kompakt** \Leftrightarrow für jede Familie $\{U_i\}_{i \in I}$ mit offenen $U_i \subset X$ und $\bigcup_{i \in I} U_i = X$ existiert ein $s \in \mathbb{N}$, sodass $\bigcup_{j=1}^s U_{i_j} = X$ ($i_j \in I$).

[M.a.W: Zu jeder offenen Überdeckung von X findet man eine endliche Teilüberdeckung.]

Satz 3.1

$X \subset \mathbb{R}^n$ ist kompakt $\Leftrightarrow X$ ist beschränkt und abgeschlossen.

Beweis:

" \Leftarrow ": Heine-Borel

" \Rightarrow ": Sei $B_r^n(0) := \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x| < r\}$, dann gilt $X \subset \mathbb{R}^n = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} B_k^n(0)$.

Da X kompakt ist, existiert $k_0 \in \mathbb{N}$, sodass $X \subset \bigcup_{k=1}^{k_0} B_k^n(0) = B_{k_0}^n(0)$, also ist X beschränkt.

Sei $y \in \mathbb{R}^n \setminus X$. Setze $U_k := \mathbb{R}^n \setminus B_{1/k}^n(y)$. Dann gilt $X \subset \mathbb{R}^n \setminus \{y\} = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} U_k$. Da X kompakt

existiert ein $k_0 \in \mathbb{N}$, sodass $X \subset \bigcup_{k=1}^{k_0} U_k = \mathbb{R}^n \setminus B_{1/k_0}^n(y)$. Somit ist die offene Menge $B_{1/k_0}^n(y) \subset \mathbb{R}^n \setminus X$, also ist X abgeschlossen. \square

Lemma 3.2

Sei $f : X \rightarrow Y$ stetig, X kompakt. Dann ist $f(X) \subset Y$ kompakt.

Beweis:

Sei $\{U_i\}_{i \in I}, U_i \in Y$ offen eine Überdeckung von $f(X)$. Da f stetig ist, ist $\{f^{-1}(U_i)\}_{i \in I}$ eine offene Überdeckung von X . Wegen der Kompaktheit von X existieren $i_1, \dots, i_k \in I$, sodass

$$X \subset \bigcup_{j=1}^k f^{-1}(U_{i_j}) \Rightarrow f(X) \subset \bigcup_{j=1}^k U_{i_j}. \quad \square$$

Korollar 3.3

Ist X zshgd bzw. kompakt, so ist auch X/\sim zshgd bzw. kompakt.

Beweis:

$X/\sim = \pi(X)$ und π ist stetig. (Verwende Lemma 2.1 und 3.2.) \square

Definition

X heißt **Hausdorff-Raum** $\Leftrightarrow \forall x, y \in X$ mit $x \neq y$ existieren Umgebungen U_x, U_y , sodass $U_x \cap U_y = \emptyset$.

$U_x \subset X$ heißt **Umgebung** von x , wenn eine offene Menge $V \subset X$ existiert, sodass $x \in V \subset U_x$.

Beispiel: Alle metrischen Räume sind Hausdorffsch.

Lemma 3.4

Sei X Hausdorffsch und $p \in X$. Dann ist $\{p\} \subset X$ abgeschlossen.

Beweis:

Sei $q \in X \setminus \{p\}$ beliebig. Da X Hausdorffsch, existieren U_p, U_q offen in X mit $U_p \cap U_q = \emptyset$. Damit gilt $p \notin U_q \Rightarrow U_q \subset X \setminus \{p\}$ für alle $q \in X \setminus \{p\}$, also ist $\{p\}$ abgeschlossen. \square

Korollar 3.5

Ist X/\sim Hausdorffsch $\Rightarrow \forall x \in X$ ist $\{y \in X \mid x \sim y\} \subset X$ abgeschlossen.

- Bemerkung: Dies ist i.A. nicht hinreichend. (Ein einfaches Beispiel wurde in der VL diskutiert.)

Lemma 3.6

Sei $f : X \rightarrow Y$ stetig und bijektiv, X kompakt, Y Hausdorffsch. Dann ist f^{-1} stetig, also f ist Homöomorphismus.

Beweis:

Blatt 2 Aufgabe 2c) \square

3.3 Zusammenschlagen eines Teilraumes

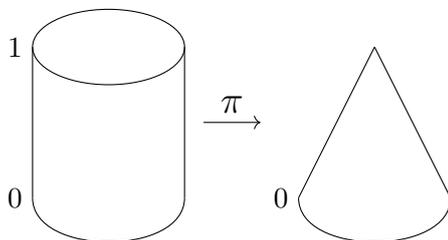
Definition

Sei $\emptyset \neq A \subset X$. Setze $\mathbf{X}/\mathbf{A} := \mathbf{X}/\sim_{\mathbf{A}}$, wobei $\mathbf{x} \sim_{\mathbf{A}} \mathbf{y} \Leftrightarrow (\mathbf{x} = \mathbf{y}) \vee (\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{A})$.

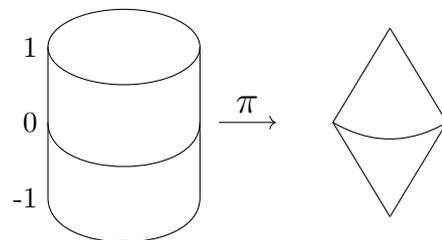
" \mathbf{X}/\mathbf{A} entsteht aus X durch **Zusammenschlagen** von A ".

- Beispiele:

$CX := X \times [0, 1] /_{X \times \{1\}}$
(Kegel über X)



$\Sigma X := X \times [-1, 1] /_{X \times \{1\}, X \times \{-1\}}$
(Einhängung von X)

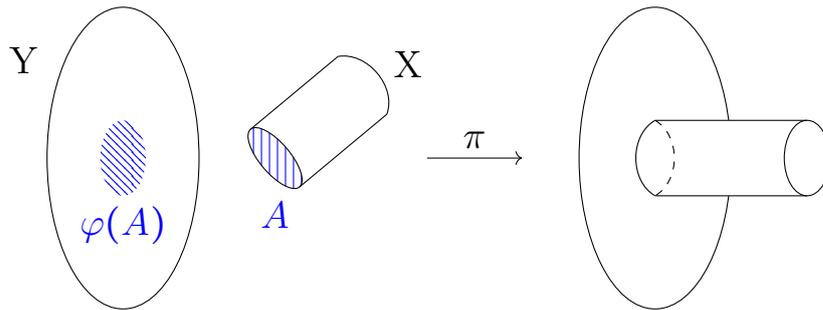


3.4 Zusammenkleben von Räumen

Definition

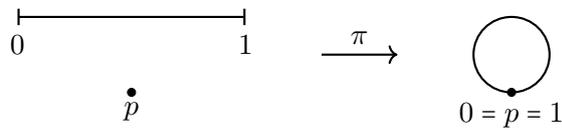
Seien X, Y topologische Räume, $\emptyset \neq A \subset X$ und $\varphi : A \rightarrow Y$ stetig. Es ist $\mathbf{Y \cup_{\varphi} X} := (X + Y) / \sim$, wobei $X + Y$ die **topologische Summe** ist [anschaulich: Nebeneinanderstellen der Räume] und $\mathbf{x \sim \varphi(x)}$ $:\Leftrightarrow \mathbf{x \in A}$.

" $\mathbf{Y \cup_{\varphi} X}$ entsteht durch **Anheften** von X an Y mittels φ ".

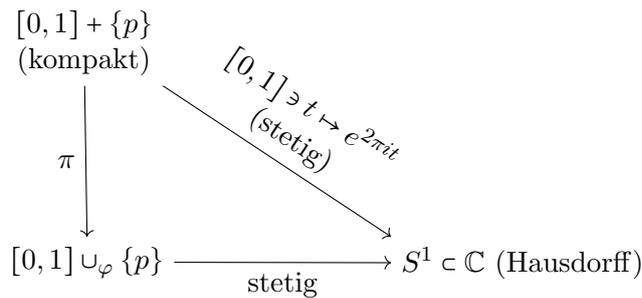


• Beispiele:

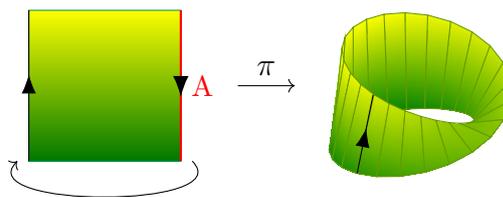
- (1) $X = [0, 1], Y = \{p\}, A = \{0, 1\} \subset X$ und $\varphi : A \rightarrow Y, 0 \mapsto p, 1 \mapsto p$.
 Anschaulich:



Kommutatives Diagramm hierzu:



- (2) Möbiusband
 Setze $X = [0, 1] \times [0, 1], A = \{1\} \times [0, 1]$ und $\varphi : A \rightarrow X, (1, y) \mapsto (0, 1 - y)$.
 Anschaulich:



3.5 Topologische Gruppen und homogene Räume

Definition

Eine Gruppe G heißt **topologische Gruppe**, wenn

1. G ist topologischer Raum
2. $G \rightarrow G, g \mapsto g^{-1}$ ist stetig
3. $G \times G \rightarrow G, (g, h) \mapsto gh$ ist stetig

- Beispiele: $(\mathbb{R}, +)$, $(S^1, \cdot_{\mathbb{C}})$, beliebiges G mit diskreter Topologie, $(GL_n(\mathbb{R}), \cdot)$, ...

⌈ Aus Algebra: Ist $H \subset G$ eine Untergruppe, so bezeichnet $G/H := \{g \cdot H \mid g \in G\}$ die **Linksnebenklassen**. G/H ist die Menge der ÄK unter $a \sim b \Leftrightarrow b^{-1}a \in H$.

Definition

Ist G eine topologische Gruppe, $H \subset G$ eine Untergruppe. G/H heißt **homogener Raum**.

- Beispiele:
Sei $G = (\mathbb{R}^2, +)$, $H = \mathbb{Z}^2 \subset \mathbb{R}^2$ und $a \sim b \Leftrightarrow a - b \in \mathbb{Z}^2$. Dann $G/H = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2 \cong T^2$.

3.6 Orbiträume

Definition

Sei G eine topologische Gruppe, X ein topologischer Raum. Eine **Operation** von G auf X ist eine stetige Abbildung $G \times X \rightarrow X, (g, x) \mapsto gx$, sodass

- (i) $ex = x, \forall x \in X$
- (ii) $g_1(g_2x) = (g_1g_2)x, \forall g_1, g_2 \in G, x \in X$

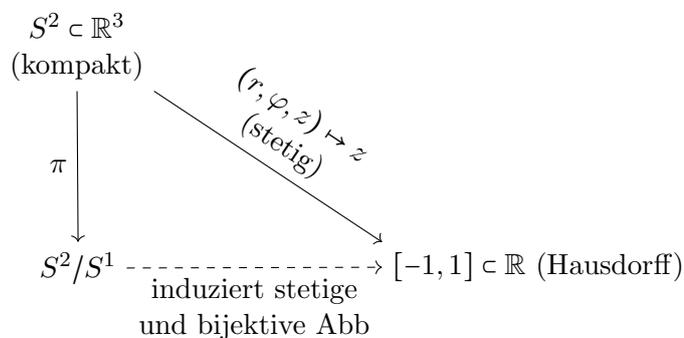
Anders formuliert: $G \rightarrow \text{Homöo}(X), g \mapsto (x \mapsto gx)$ ist ein Gruppenhomomorphismus.

X ist ein **G-Raum** und $Gx := \{gx \mid g \in G\} \subset X$ heißt **Bahn** oder **Orbit** von $x \in X$.
 $X/G := X/\sim_G$ unter $x \sim_G y \Leftrightarrow y \in Gx \Leftrightarrow \exists g \in G$ mit $gx = y$ heißt **Orbitraum**.

• Beispiele:

S^1 operiert auf $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ durch Drehung um die z-Achse mittels der Abb. $S^1 \times S^2 \rightarrow S^2$, $(e^{i\Theta}, (r, \varphi, z)) \mapsto (r, \varphi + \Theta, z)$. Die Orbits entsprechen den Breitenkreisen und der Orbitraum ist homöomorph zu $[-1, 1]$.

Kommutatives Diagramm hierzu:



Definition

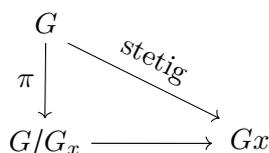
$G_x := \{g \in G \mid gx = x\}$ heißt **Stabilisator** oder **Isotropiegruppe** von $x \in X$.

Lemma 3.7

Die Abbildung $G/G_x \rightarrow Gx$, $gG_x \mapsto gx$ ist stetig und bijektiv.

Beweis:

- Wohldefiniertheit:
Seien $g, h \in G$, sodass $gG_x = hG_x \Leftrightarrow h = ga$ für ein $a \in G_x \Rightarrow hx = (ga)x = g(ax) = gx$.
- Injektivität:
Seien $g, h \in G$ mit $gx = hx$. Dann $h^{-1}gx = x \Rightarrow h^{-1}g \in G_x \Rightarrow hG_x = gG_x$.
- Surjektivität: (ist klar)
- Stetigkeit:

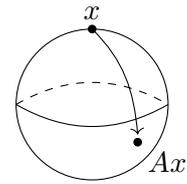


Folgt also mit Blatt 2 Aufgabe 1c.

□

• Beispiele:

$SO(n+1)$ operiert auf S^n .
 Insbesondere gilt $SO(n+1)x = S^n$ und
 $SO(n+1)_x = SO(n) \Rightarrow SO(n+1)/SO(n) \cong S^n$.



4 Homotopie und Fundamentalgruppe

Notation:

X, Y, Z, \dots topo. Räume
 f, g, h, \dots stetige Abbildungen
 $I := [0, 1]$

4.1 Homotope Abbildungen

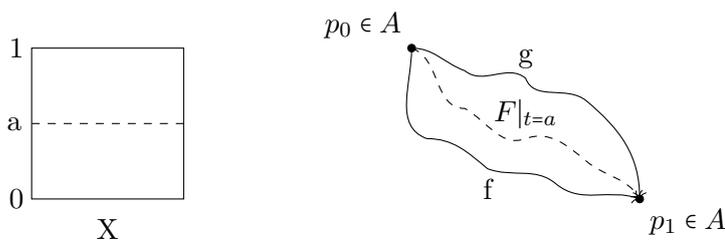
Definition

Abbildungen $f, g : X \rightarrow Y$ heißen **homotop** relativ zu $A \subset X \Leftrightarrow$ es existiert eine stetige Abb. $F : X \times I \rightarrow Y$ mit

$$\left. \begin{aligned} F(x, 0) &= f(x) \\ F(x, 1) &= g(x) \end{aligned} \right\} \forall x \in X$$

$$F(a, t) = f(a) = g(a) \quad \forall a \in A, t \in I$$

Notation: $f \cong_F g \text{ rel}(A)$. F heißt **Homotopie** zwischen f und g .



• Beispiele:

- (1) Sind $f, g : X \rightarrow Y$ konvex, so ist $F(x, t) = (1-t) \cdot f(x) + t \cdot g(x)$ eine Homotopie.
- (2) Seien $f, g : X \rightarrow S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ mit $f(x) \neq -g(x)$ für alle $x \in X$. Dann gilt $f \cong_F g$ vermöge

$$F(x, t) := \frac{(1-t) \cdot f(x) + t \cdot g(x)}{|(1-t) \cdot f(x) + t \cdot g(x)|}$$

Lemma 4.1

Homotop $\text{rel}(A)$ zu sein, ist eine Äquivalenzrelation.

Beweis:

(i) Reflexivität:

Es gilt $f \cong_F f$ mit $F(x, t) = f(x)$.

(ii) Symmetrie:

Ist $f \cong_F g$, so $g \cong_G f$ mit $G(x, t) = F(x, 1 - t)$.

(iii) Transitivität:

Ist $f \cong_F g$ und $g \cong_G h$, so auch $f \cong_H h$ vermöge $H(x, t) = \begin{cases} F(x, 2t) & , 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ G(x, 2t - 1) & , \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$.

□

Lemma 4.2

Seien $X \xrightarrow[f_1]{f_0} Y \xrightarrow[g_1]{g_0} Z$ stetig mit $f_0 \cong_F f_1 \text{ rel}(A)$, $g_0 \cong_G g_1 \text{ rel}(f_0(A))$.

Dann gilt $g_0 \circ f_0 \cong g_1 \circ f_1$.

Beweis:

$$g_0 \circ f_0 \underset{g_0 \circ F}{\cong} g_0 \circ f_1 \underset{G \circ (f_1 \times id)}{\cong} g_1 \circ f_1$$

□

4.2 Konstruktion der Fundamentalgruppe

Definition

Eine **Schleife** in X an x_0 ist $u: I \rightarrow X$ mit $u(0) = x_0 = u(1)$.

Die **inverse Schleife** u^{-1} ist gegeben durch $u^{-1}(s) := u(1 - s)$.

Das **Produkt von Schleifen** u_1, \dots, u_n ist gegeben durch $u_1 \cdots u_n(s) := u_i(n \cdot s - (i - 1))$ für $\frac{i-1}{n} \leq s \leq \frac{i}{n}$, $1 \leq i \leq n$.

Notation: u ist Schleife von $x_0 \in X$ und $[u] :=$ Homotopieklasse von $u \text{ rel}\{0, 1\}$.

Satz 4.3

$\pi_1(X, x_0) := \{[u] \mid u \text{ ist Schleife an } x_0\}$ bildet eine Gruppe, die **Fundamentalgruppe** mit Basispunkt x_0 . Es gilt

(i) $[u][v] = [uv]$

(ii) $[u]^{-1} = [u^{-1}]$

(iii) $e = [e_{x_0}]$, wobei e_{x_0} die konstante Schleife ist.

Beweis:

(i) Wohldefiniertheit:

Seien $u \cong_F u'$, $v \cong_G v' \text{ rel}\{0, 1\}$. Dann gilt $uv \cong_H u'v' \text{ rel}\{0, 1\}$, wobei $H(s, t) :=$

$$\begin{cases} F(2s, t) & , \text{ für } 0 \leq \frac{1}{2} \\ G(2s - 1, t) & , \text{ für } \frac{1}{2} \leq s \leq 1 \end{cases}$$

 Sei $u \cong_F v \text{ rel}\{0, 1\}$. Dann $u^{-1} \cong_G v^{-1}$ mit $G(s, t) := F(1 - s, t)$.

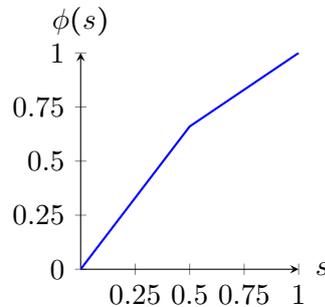
(ii) Assoziativität:

Vorbemerkung: Sind $\phi_1, \phi_2 : I \rightarrow I$ mit $\phi_1|_{\{0,1\}} = \phi_2|_{\{0,1\}}$, dann $\phi_1 \cong \phi_2 \text{ rel}\{0, 1\}$ auf Grund der Konvexität von I .

Es ist $((uv)w)(s) = (uvw)(\phi(s))$ mit der Umparametrisierung $\phi \cong id \text{ rel}\{0, 1\}$ von I .

$$\stackrel{4.2}{\implies} (uv)w \cong uvw \text{ rel}\{0, 1\}.$$

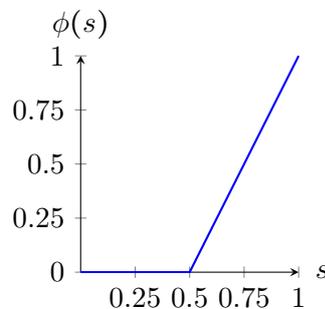
Analog $u(vw) \cong uvw \text{ rel}\{0, 1\}$.



(iii) Neutrales Element:

Es ist $(e_{x_0}u)(s) = u(\phi(s))$ mit $\phi \cong id \text{ rel}\{0, 1\}$
 $\implies e_{x_0}u \cong u \text{ rel}\{0, 1\}$.

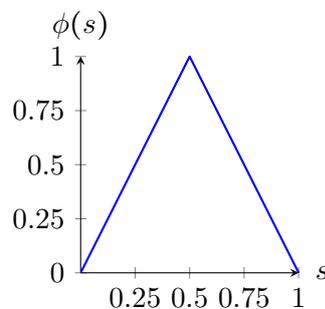
Analog $ue_{x_0} \cong u \text{ rel}\{0, 1\}$.



(iv) Inverses Element:

Es ist $(uu^{-1})(s) = u(\phi(s))$ mit $\phi \cong 0 \text{ rel}\{0, 1\}$
 $\implies uu^{-1} \cong e_{x_0} \text{ rel}\{0, 1\}$.

Analog $u^{-1}u \cong e_{x_0} \text{ rel}\{0, 1\}$.



□

Definition

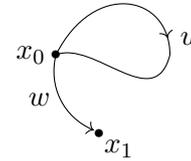
Ein **Weg** von $x_0 \in X$ nach $x_1 \in X$ ist $w : I \rightarrow X$ mit $w(0) = x_0, w(1) = x_1$.

Sind w_1, \dots, w_n Wege mit $w_{i-1}(1) = w_i(0)$, dann definiere das Produkt dieser analog wie für Schleifen.

Satz 4.4 („Hashtag-Abbildung“)

Ein Weg w von x_0 nach x_1 in X induziert einen *Gruppenisomorphismus* $w_{\#} : \pi_1(X, x_0) \xrightarrow{\cong} \pi_1(X, x_1)$, $[u] \mapsto [w^{-1}uw]$ mit

- (i) $w \cong \tilde{w} \text{ rel}\{0, 1\} \Rightarrow w_{\#} = \tilde{w}_{\#}$
- (ii) $(e_{x_0})_{\#} = id_{\pi_1(X, x_0)}$
- (iii) Sei v ein Weg von x_1 nach $x_2 \Rightarrow (wv)_{\#} = v_{\#} \circ w_{\#}$



Beweis:

- Wohldefiniertheit, (i) und (ii): wie im Beweis zu Satz 4.3.

- (iii):

$$(wv)_{\#}[u] = [(wv)^{-1}u(wv)] = [v^{-1}w^{-1}uww] = v_{\#} \circ w_{\#}[u]$$

- $w_{\#}$ ist Homomorphismus:

$$w_{\#}([u_1][u_2]) = w_{\#}[u_1u_2] = [w^{-1}u_1u_2w] = [w^{-1}u_1ww^{-1}u_2w] = w_{\#}[u_1]w_{\#}[u_2]$$

- $w_{\#}$ ist Isomorphismus:

$$w_{\#}(w^{-1})_{\#} = (w^{-1}w)_{\#} = (e_{x_1})_{\#} = id_{\pi_1(X, x_1)}$$

$$(w^{-1})_{\#}w_{\#} = (ww^{-1})_{\#} = (e_{x_0})_{\#} = id_{\pi_1(X, x_0)}$$

$$\Rightarrow (w_{\#})^{-1} = (w^{-1})_{\#}$$

□

Definition

X heißt **wegzusammenhängend**, wenn für alle $x_0, x_1 \in X$ ein stetiger Weg von x_0 nach x_1 existiert.

Korollar 4.5

Ist X wegzshgd und $x_0, x_1 \in X$, so $\pi_1(X, x_0) \cong \pi_1(X, x_1)$.

Notation: : Für X wegzshgd schreiben wir $\pi_1(X, x_0) =: \pi_1(X)$.

Definition

X heißt **einfach zusammenhängend**, wenn X wegzshgd ist und $\pi_1(X) = 1$.

- Beispiele: : Konvexe Teilmengen vom \mathbb{R}^n sind einfach zshgd.

Satz 4.6 („Stern-Abbildung“)

Jedes $f : (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$ stetig ($f(x_0) = y_0$) induziert einen Gruppenhomomorphismus $f_* : \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(Y, y_0)$, $[u] \mapsto [f \circ u]$ mit

- (i) $f \cong \tilde{f} \text{ rel}\{x_0\} \Rightarrow f_* \cong \tilde{f}_*$
- (ii) $(id_X)_* = id_{\pi_1(X, x_0)}$
- (iii) $g : (Y, y_0) \rightarrow (Z, z_0) \Rightarrow (gf)_* = g_* f_*$

Beweis:

- Wohldefiniertheit: Folgt aus Lemma 2.
- f_* ist Homomorphismus:
$$f_*([u][v]) = f_*[uv] = [f \circ (uv)] = [(f \circ u)(f \circ v)] = f_*[u]f_*[v]$$
- (i)–(iii) leichte Übung

□

Satz 4.7

Sind $X \cong Y$ wegzshgd, dann $\pi_1(X) \cong \pi_1(Y)$.

Beweis:

Sei $f : X \xrightarrow{\cong} Y$ ein Homöomorphismus. Dann gilt

$$\begin{aligned} \pi_1(X, x_0) &\xrightarrow{f_*} \pi_1(Y, f(x_0)) \xrightarrow{(f^{-1})_*} \pi_1(X, x_0) \\ &\Rightarrow (f^{-1})_* \circ f_* = (f^{-1} \circ f)_* = (id_X)_* = id_{\pi_1(X, x_0)} \end{aligned}$$

Analog: $f_* \circ (f^{-1})_* = id_{\pi_1(Y, y_0)}$

□

Satz 4.8

Sei $X = U \cup V$, wobei U, V offen und einfach zshgd sind und $U \cap V$ wegzshgd ist. Dann ist X einfach zshgd.

Korollar 4.9

Für $n \geq 2$ gilt $\pi_1(S^n) = 1$.

Beweis:

Wir können schreiben $S^n = S^n \setminus \{N\} \cup S^n \setminus \{S\}$. Wende nun Satz 4.8 an.

□

Lemma 4.10 (Lebesgue Überdeckungssatz)

Sei (X, d) ein kompakter metrischer Raum und $\{U_i\}_{i \in I}$ eine offene Überdeckung von X . Dann $\exists \delta > 0$ derart, dass für alle $A \subset X$ mit (Durchmesser von A) $< \delta$ ein $i_0 \in I$ existiert, sodass $A \subset U_{i_0}$.

Beweis:

Für alle $x \in X$ existiert $r_x > 0$, sodass $B_{r_x}(x) \subset U_{i_x}$ für ein $i_x \in I \Rightarrow \{B_{r_x/2}(x) \mid x \in X\}$ ist eine offene Überdeckung von X . Da X kompakt ist, finden wir $x_1, \dots, x_n \in X$ mit

$$X = B_{r_{x_1}/2}(x_1) \cup \dots \cup B_{r_{x_n}/2}(x_n).$$

Definiere

$$\delta := \min_{j=1, \dots, n} \{r_{x_j}/2\} > 0.$$

Ist nun $A \subset X$ mit Durchmesser $< \delta$, so finden wir ein $j \in \{1, \dots, n\}$, sodass für alle $x \in A$ gilt $x \in B_{r_{x_j}/2}(x_j) \Rightarrow A \subset B_{r_{x_j}/2}(x_j) \subset U_{i_{x_j}}$. \square

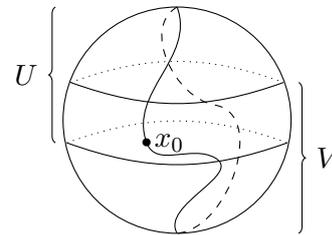
Beweis zu Satz 4.8:

Wähle einen Basispunkt $x_0 \in U \cap V$. Sei $u : I \rightarrow X$ eine Schleife von x_0 .

Nach Lemma 4.10 existieren $0 = s_0 < s_1 < \dots < s_m = 1$, so dass $u([s_{i-1}, s_i])$ ganz in U oder ganz in V liegt.

Wähle einen Weg v_i für $i = 1, \dots, m-1$ von x_0 nach $u(s_i)$, der ganz in U liegt, falls $u(s_i) \in U$ und ganz in V , falls $u(s_i) \in V$.

Setze $u_i(s) := u(s(s_i - s_{i-1}) + s_{i-1})$. Es gilt dann $u \cong (u_1 v_1^{-1})(v_1 u_2 v_2^{-1}) \dots (v_{m-1} u_m) \text{ rel}\{0, 1\} \Rightarrow u \cong e_{x_0}$, da die einzelnen Wegkombinationen in U oder V liegen und jene einfach zshgd sind. \square



Satz 4.11

Seien X, Y wegzshgd $\Rightarrow \pi_1(X \times Y) \cong \pi_1(X) \times \pi_1(Y)$.

- Beispiele: Für $n, m \geq 2$, dann $\pi_1(S^n \times S^m) = 1$.

Beweis:

Wähle Basispunkte x_0, y_0 . Es seien $P_x : X \times Y \rightarrow X$ und $P_y : X \times Y \rightarrow Y$ Projektionen.

Setze nun $\Phi : \pi_1(X \times Y) \rightarrow \pi_1(X) \times \pi_1(Y)$
 $[u] \mapsto ([P_x \circ u], [P_y \circ u])$

- Wohldefiniertheit: Lemma 4.2
- Homomorphismus: (leichte Übung)
- Injektivität:
 Sei $P_x \circ u \cong_F e_{x_0}$ und $P_y \circ u \cong_F e_{y_0}$
 $\Rightarrow u \cong e_{(x_0, y_0)}$ vermöge $(x, y, t) \mapsto (F(x, t), G(y, t))$.
- Surjektivität:
 Seien u_x, u_y Schleifen in X bzw. Y . Dann $\Phi((u_x, u_y)) = (u_x, u_y)$.

\square

4.3 Überlagerungen und Fundamentalgruppen

Ziel: $\pi_1(S^1) \cong \mathbb{Z}$

Idee:

$$p: \mathbb{R} \rightarrow S^1 \in \mathbb{C}, s \mapsto e^{2\pi i s}$$

$$\pi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}/\mathbb{Z} = S^1$$

$$[u] \mapsto \text{Weg } \tilde{u} \text{ von } 0 \text{ nach } n \in \mathbb{Z} \mapsto n \in \mathbb{Z}$$

Definition

$p: Y \rightarrow X$ heißt **Überlagerung**, wenn

- (i) p ist stetig und surjektiv
- (ii) Für alle $x \in X$ existiert eine Umgebung $U_x \subset X$ und diskrete Menge F , sodass folgendes Diagramm kommutiert:

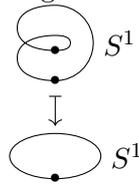
$$\begin{array}{ccc} Y \supset p^{-1}(U_x) & \xrightarrow{\cong} & U_x \times F \\ & \searrow p & \swarrow pr \\ & & U_x \end{array}$$

$Y_x := p^{-1}(U_x)$ heißt **Faser** für ein $x \in X$ und $|F|$ die **Blätterzahl**.

• Beispiele:

- (1) $\mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}, z \mapsto z^n$ ist n -blättrige Überlagerung.
- (2) $\pi: S^n \rightarrow \mathbb{R}P^n = S^n/\mathbb{Z}_2$ (doppelte Überlagerung)

Veranschaulicht für $n = 2$ sieht dies wie folgt aus:



Lemma 4.12 (Hochheben von Wegen)

Sei $p: Y \rightarrow X$ eine Überlagerung, $u: I \rightarrow X$ ein Weg mit $u(0) = x_0 \in X$ und $y_0 \in p^{-1}(x_0) \subset Y$.

Dann existiert genau ein Weg $\tilde{u}: I \rightarrow Y$ mit $\tilde{u}(0) = y_0$ und $p \circ \tilde{u} = u$.

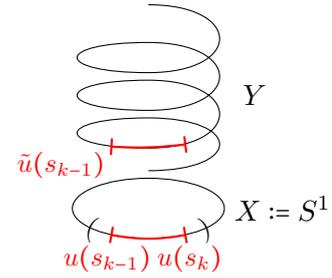
$$\begin{array}{ccc} \{0\} & \xrightarrow{\quad} & Y \\ & \searrow \cap & \uparrow \exists! \tilde{u} \\ I & \xrightarrow{u} & X \end{array}$$

Beweis:

Sei $\{U_j\}_{j \in J}$ eine offene Überdeckung von X , sodass $p^{-1}(U_j) \cong U_j \times F$ mit diskreter Menge F .

Dann ist $\{u^{-1}(U_j)\}_{j \in J}$ eine offene Überdeckung von $I \Rightarrow \exists 0 = s_0 < \dots < s_n = 1$ mit $s_k - s_{k-1} < \delta$, sodass $[s_{k-1}, s_k] \subset u^{-1}(U_j)$ für ein $j \in J \Rightarrow u([s_{k-1}, s_k]) \subset U_j$.

Für ein gegebenes $\tilde{u}(s_{k-1}) \in Y$ mit $p(\tilde{u}(s_{k-1})) = u(s_{k-1})$ existiert genau eine stetige Fortsetzung $\tilde{u} : ([s_{k-1}, s_k]) \rightarrow Y$ mit $p \circ \tilde{u} = u$.

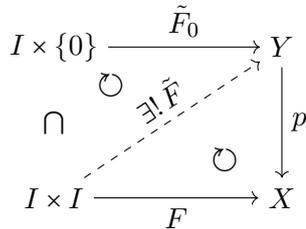


□

Lemma 4.13 (Hochheben von Homotopien)

Sei $p : Y \rightarrow X$ eine Überlagerung, F eine Homotopie von Wegen in X und \tilde{F}_0 Hochhebung des Weges $F(\cdot, 0)$.

Dann existiert genau eine $\tilde{F} : I \times I \rightarrow Y$, sodass das folgende Diagramm kommutiert:



Beweis:

Analog zu Vorigem (siehe Übung).

□

Satz 4.14

$\phi : \begin{matrix} \mathbb{Z} & \rightarrow & \pi_1(S^1, 1) \\ n & \mapsto & [p \circ \tilde{u}_n] \end{matrix}$ ist ein Homöo. mit $\tilde{u}_n : \begin{matrix} I & \rightarrow & \mathbb{R} \\ s & \mapsto & n \cdot s \end{matrix}$ und $p : \begin{matrix} \mathbb{R} & \rightarrow & S^1 \\ s & \mapsto & e^{2\pi i s} \end{matrix}$

Beweis:

- Homomorphismus:

$$\begin{aligned} \phi(m+n) &= [p \circ \tilde{u}_{m+n}] & | \tilde{u}_{m+n} &\cong \tilde{u}_m \cdot (\tilde{u}_n + m) \\ &= [p \circ (\tilde{u}_m \cdot (\tilde{u}_n + m))] \\ &= [(p \circ \tilde{u}_m) \cdot (p \circ (\tilde{u}_n + m))] & | e^{2\pi i m} = 1 \text{ für } m \in \mathbb{Z} \\ &= [p \circ \tilde{u}_m][p \circ \tilde{u}_n] \\ &= \phi(m)\phi(n) \end{aligned}$$

- Surjektivität:

Sei $[u] \in \pi_1(S^1, 1)$ beliebig und bemerke, dass p eine Überlagerung ist.

Es gilt $u(0) = 1$ und $e^{2\pi i s} = 1 \Leftrightarrow s \in \mathbb{Z}$. Nach Lemma 4.12 existiert dann ein Weg $\tilde{u} : I \rightarrow \mathbb{R}$ mit $\tilde{u}(0) = 0$ und $p \circ \tilde{u} = u \Rightarrow (p \circ \tilde{u})(1) = u(1) = 1 \Leftrightarrow n = \tilde{u}(1) \in \mathbb{Z}$. Da \mathbb{R} konvex ist, erhalten wir $\tilde{u} \cong \tilde{u}_n \text{ rel}\{0, 1\}$. Damit gilt dann $\phi(n) = [p \circ \tilde{u}_n] = [p \circ \tilde{u}] = [u]$.

- Injektivität:

Sei $\phi(n) = e_1 \in \pi_1(S^1, 1)$, dann ist also $p \circ \tilde{u}_n \cong_F e_1 \text{ rel}\{0, 1\}$ (d.h. $F(s, 0) = (p \circ \tilde{u}_n)(s)$, $F(s, 1) = 1$, $F(0, t) = 1 = F(1, t)$).

Nach Lemma 4.13 existiert genau eine Homotopie \tilde{F} , sodass

$$\begin{array}{ccc}
 I \times \{0\} & \xrightarrow{\tilde{F}_0 = \tilde{u}_n} & \mathbb{R} \\
 \cap & \searrow \exists! \tilde{F} & \downarrow p \\
 I \times I & \xrightarrow{F} & S^1
 \end{array}$$

kommutiert und $\tilde{F}(s, 1), \tilde{F}(0, t), \tilde{F}(1, t) \in \mathbb{Z}$. Da \tilde{F} stetig ist, erhalten wir $n = \tilde{u}_n(1) = \tilde{F}_0(1, 0) = \tilde{F}(1, 0) = \tilde{F}(0, 0) = \tilde{F}_0(0, 0) = \tilde{u}_n(0) = 0$.

□

Satz 4.15

Sei X einfach zshgd und G eine topologische Gruppe, die diskret auf X wirkt.

• G **wirkt diskret** auf X , wenn für alle $x \in X$ eine offene Umgebung $U \subset X$ existiert, sodass $U \cap g(U) = \emptyset$ für alle $g \in G \setminus \{e\}$ gilt.

Dann ist $\pi : X \rightarrow X/G$ eine Überlagerung und $\pi_1(X/G) \cong G$.

Beweis:

Ähnlich wie Satz 4.14 (Übung)

□

• Beispiele:

- (1) $\pi_1(T^2) \cong \pi_1(\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2) \cong \mathbb{Z}^2$
- (2) $\pi_1(T^2) \cong \pi_1(S^1 \times S^1) \cong \pi_1(S^1) \times \pi_1(S^1) \stackrel{4.14}{\cong} \mathbb{Z}^2$
- (3) $\pi_1(\mathbb{R}P^n) \cong \pi_1(S^n/\mathbb{Z}_2) \cong \mathbb{Z}_2$
- (4) $\pi_1(\text{Möbiusband}) \cong \pi_1(\mathbb{R} \times I/\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$

Satz 4.16

Sei X wegzshgd, lokal wegzshgd und semilokal einfach zshgd. Dann gilt

- (1) Es existiert eine (eindeutige) wegzshgd Überlagerung $p: \tilde{X} \rightarrow X$ mit $\pi_1(\tilde{X}) = 1$ (**universelle Überlagerung**).
- (2) Sei $p': X' \rightarrow X$ eine weitere Überlagerung $\Rightarrow \exists! p'': \tilde{X} \rightarrow X'$, sodass

$$\begin{array}{ccc}
 \tilde{X} & \xrightarrow{p''} & X' \\
 & \searrow p & \swarrow p' \\
 & & X
 \end{array}$$

- (3) $\pi_1(X)$ wirkt diskret auf \tilde{X} , sodass $\pi_1(\tilde{X}/\pi_1(X)) \cong \pi_1(X)$.

X heißt **lokal wegzshgd**, wenn für alle $x \in X$ und jeder Umgebung U_x ein offenes und wegzshgdes $V \subset U_x$ existiert, sodass $x \in V$.

X heißt **semilokal einfach zshgd**, wenn für alle $x \in X$ und jede offene Umgebung V von x eine (wegzshgd) Umgebung $U_x \subset V$ existiert, sodass sich jede Schleife u in U in X zusammenziehen lässt.

Beweis:

Idee:

Setze $\Omega(X, x_0, x) := \{\text{Wege von } x_0 \text{ nach } x\}$ und $u_1 \sim u_2 \Leftrightarrow u_1 u_2^{-1} \cong e_{x_0}$.

Definiere dann $\tilde{X} := \bigcup_{x \in X} \Omega(X, x_0, x) / \sim$ und $p: \tilde{X} \rightarrow X, \tilde{x} \mapsto x$.

Ziel: Definiere Topologie auf \tilde{X} , sodass obiger Satz gilt. Die Details sind sehr schön im Buch von Jänich ausgearbeitet. □

4.4 Homotopietyp

Definition

X heißt **homotopieäquivalent** zu Y ($X \simeq Y$) genau dann, wenn $X \xrightleftharpoons[g]{f} Y$ stetig sind

mit $g \circ f \cong id_X, f \circ g \cong id_Y$.

f heißt **Homotopieäquivalenz** und g heißt **Homotopieinverse** zu f .

Lemma 4.17

\simeq ist eine Äquivalenzrelation.

Beweis:

Reflexivität und Symmetrie sind klar. Zur Transitivität betrachte $X \xrightleftharpoons[g]{f} Y \xrightleftharpoons[l]{k} Z$. Es gilt $glhf \cong gf \cong id_X$ genau so $lgfh \cong id_Z$, also ist $X \simeq Z$. □

Definition

Die Äquivalenzklasse von X bzgl \simeq heißt **Homotopietyp**.
 Man nennt X **zusammenziehbar**, wenn $X \simeq \{x_0\}$.

• Beispiele:

(1) $X \cong Y \Rightarrow X \simeq Y$

(2) Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ konvex $\Rightarrow U \simeq \{x_0\}$. Denn:

Wähle $x_0 \in U$ beliebig und $U \xrightarrow[r]{i} \{x_0\}$. Dann ist $r \circ i = id_{\{x_0\}}$, $i \circ r \cong_F id_U$ mittels $F(x, t) = (1-t)x_0 + tx$.

(3) $\mathbb{R}^n \setminus \{0\} \simeq S^{n-1}$

Betrachte die Abb. $\mathbb{R}^n \setminus \{0\} \xrightarrow[r]{i} S^{n-1}$ mit $r(x) = \frac{x}{|x|}$. Dann $r \circ i = id_{S^{n-1}}$ und auch $i \circ r \cong_F id_{\mathbb{R}^n \setminus \{0\}}$ mittels $F(x, t) = (1-t)\frac{x}{|x|} + tx$.

Definition

Sei $A \subset X$ und $r : X \rightarrow A$ mit $r|_A = id_A$. Dann heißt r **Retraktion** und A **Retrakt**.

Sei $i : A \rightarrow X$ die Inklusion. A heißt (starker) **Deformationsretrakt** in X , wenn $i \circ r \cong id_X \text{ rel}(A)$.

• Beispiele:

Kamm mit ∞ -viele Zacken ist zusammenziehbar, aber der Punkt $\{(0, 1)\}$ ist kein starker Deformationsretrakt (Punkt muss bei stetigem "Herunterdrücken" mitbewegt werden).



Satz 4.18 („Sternchen-Abbildung“)

$f : (X, x_0) \xrightarrow{\simeq} (Y, y_0)$ induziert den Isomorphismus $f_* : \pi_1(X, x_0) \xrightarrow{\cong} \pi_1(Y, y_0)$.

Beweis:

Sei $g : (Y, y_0) \rightarrow (X, x_1)$ Homotopieinverses zu f , d.h. $id_X \cong_F gf$. Dann

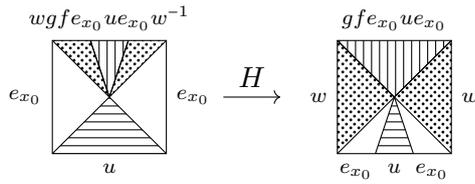
$$\pi_1(X, x_0) \xrightarrow{f_*} \pi_1(Y, y_0) \xrightarrow{g_*} \pi_1(X, x_1) \xrightarrow[w_{\#}^{-1}]{\cong} \pi_1(X, x_0)$$

mit $w_{\#} : I \rightarrow X, w(t) = F(x_0, t)$ ein Weg von x_0 nach x_1 .

Sei $u : I \rightarrow X$ Schleife von x_0 . Zu zeigen: $w_{\#}^{-1} g_* f_* [u] = [u]$.

Betrachte:

$$G: \underbrace{I \times I} \longrightarrow \underbrace{I \times I} \xrightarrow{e_{x_0} u e_{x_0}} X \times I \xrightarrow{F} X$$



$$\Rightarrow u \cong w(gfe_{x_0}ue_{x_0})w^{-1} \text{ rel}\{0, 1\}$$

$$\Rightarrow [u] = [w(gfe_{x_0}ue_{x_0})w^{-1}] = w_{\#}^{-1}[gfe_{x_0}ue_{x_0}] = w_{\#}^{-1}g_*f_*[e_{x_0}ue_{x_0}] = w_{\#}^{-1}g_*f_*[u]$$

Da $w_{\#}^{-1}$ Isomorphismus ist, ist somit auch g_*f_* Isomorphismus, also f_* injektiv, g_* surjektiv.

Analog: g_* injektiv, f_* surjektiv. □

• Beispiele:

- (1) Möbiusband $M_b \simeq S^1 \times I \simeq S^1 \times D^1 \simeq S^1 \simeq \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$
 $\Rightarrow \pi_1(M_b) \cong \pi_1(S^1 \times I) \cong \pi_1(S^1 \times D^1) \cong \pi_1(S^1) \cong \mathbb{Z}$
- (2) $\mathbb{R}^n \setminus \{0\} \simeq S^{n-1} \Rightarrow \pi_1(\mathbb{R}^n \setminus \{0\}) \cong \pi_1(S^{n-1}) \cong 1$

4.5 Endlich präsentierte Gruppen

Sei E eine Menge.

Definition

Ein **Wort** ist ein endlicher Ausdruck der Form $x_1^{n_1} \dots x_k^{n_k}$, wobei $x_i^{n_i} \in E, n_i \in \mathbb{Z}$. Es heißt **reduziert**, wenn $x_i \neq x_{i+1}$ für alle $i \in \{1, \dots, k-1\}$ sowie $n_i \neq 0$ für alle $i \in \{1, \dots, k\}$

• Bemerkung:

Jedes Wort kann mittels $\dots x^m x^n \dots = \dots x^{m+n} \dots$ und $\dots x^m y^0 z^n \dots = \dots x^m z^n \dots$ reduziert werden.

Definition

$F(E) := \{\text{reduzierte Worte in } E\}$ heißt **freie Gruppe** erzeugt von E mit

- Multiplikation: $(x_1^{n_1} \dots x_k^{n_k})(y_1^{m_1} \dots y_l^{m_l}) = x_1^{n_1} \dots x_k^{n_k} y_1^{m_1} \dots y_l^{m_l}$
- Einselement: $\emptyset :=$ leeres Wort
- Inverses: $(x_1^{n_1} \dots x_k^{n_k})^{-1} = x_k^{-n_k} \dots x_1^{-n_1}$

Sei G eine Gruppe und $E \subset G$ erzeugende Teilmenge, d.h. $\phi : F(E) \rightarrow G$ ist surjektiv. Dann ist $N := \ker(\phi)$ Normalteiler von $F(E)$, d.h. für alle $x \in F(E), n \in N$ gilt $x^{-1}nx \in N$. Nach dem Homomorphiesatz gilt dann $G \cong F(E)/N$.

Definition

$R \subset F(E)$ heißt **Menge der Relationen**

$\Leftrightarrow N := \ker(\phi)$ ist kleinster Normalteiler, sodass $R \subset N$

\Leftrightarrow Worte in R und ihre konjugierten erzeugen N

Es heißt dann $\langle E \mid R \rangle$ **Präsentation** von G . Sie ist **endlich**, wenn E und R endlich sind.

• Beispiele:

1. $\langle x \mid \emptyset \rangle \cong \mathbb{Z}$ zu $x^n \mapsto n$
2. $\langle x \mid x^n \rangle \cong \mathbb{Z}_n$ zu $x^k \mapsto [k]$
3. $\langle xy \mid xyx^{-1}y^{-1} \rangle \cong \mathbb{Z}^2$ zu $x^n y^m \mapsto (n, m)$

Definition

$$\langle x_1, \dots, x_m \mid y_1, \dots, y_n \rangle * \langle v_1, \dots, v_k \mid w_1, \dots, w_l \rangle$$

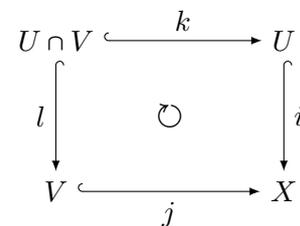
$$:= \langle x_1, \dots, x_m, v_1, \dots, v_k \mid y_1, \dots, y_n, w_1, \dots, w_l \rangle$$

heißt das **Freie Produkt** der Gruppen.

4.6 Der Satz von Seifert & van Kampen

Satz 4.19 (Seifert und van Kampen)

Sei $X = U \cup V$ mit $U, V, U \cap V$ nicht leer, offen und wegzshgd (d.h. das nebenstehende Diagramm kommutiert).



Dann gilt

$$\pi_1(X, x_0) \cong (\pi_1(U, x_0) * \pi_1(V, x_0)) / N$$

mit

$$N := \langle k_*(g)l_*(g)^{-1} \mid g \in \pi_1(U \cap V, x_0) \rangle.$$

Das heißt:

$$\pi_1(U, x_0) = \langle u_i \mid s_j \rangle, \pi_1(V, x_0) = \langle v_i \mid t_j \rangle$$

$$\Rightarrow \pi_1(X, x_0) \cong \langle u_i, v_i \mid s_j, t_j, k_*(g_i) = l_*(g_i) \rangle$$

• Beispiele:

- (1) Zu zeigen: $\pi_1(S^2) = 1$

Setze $U := S^2 \setminus \{N\} \simeq \{pkt\} \Rightarrow \pi_1(U) = 1, V := S^2 \setminus \{S\} \simeq \{pkt\} \Rightarrow \pi_1(V) = 1$. Dazu ist $U \cap V = S^2 \setminus \{N, S\} \simeq S^1$.

Mit Seifert und van Kampen folgt $\pi_1(S^2) = 1$.

- (2) Sind X, Y topologische Räume mit Basispunkten x_0, y_0 , so heißt $X \vee Y := (X+Y)/_{x_0 \sim y_0}$ die **Einpunktvereinigung**.

Zu zeigen: $\pi_1(\underbrace{S^1 \vee \dots \vee S^1}_{n\text{-mal}}) = \langle g_1, \dots, g_n \mid \emptyset \rangle \cong \mathbb{Z}^n$

Fall $n = 2$:

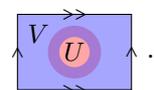
Es ist $S^1 \vee S^1 =$ 

Setze dazu $U :=$  \simeq  $, V :=$  \simeq . Dann $U \cap V = x_0 \simeq \bullet$

Dann wissen wir $\pi_1(U \cap V) = 1, \pi_1(U) \cong \langle g_1 \rangle, \pi_1(V) \cong \langle g_2 \rangle$.

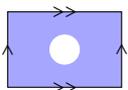
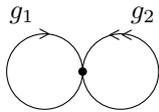
$\xrightarrow{\text{SuK}} \pi_1(S^1 \vee S^1, x_0) = \langle g_1, g_2 \mid \emptyset \rangle \cong \mathbb{Z}^2$.

- (3) Zu zeigen: $\pi_1(T^2) = \mathbb{Z}^2$

Wir betrachten die Darstellung $T^2 =$ .

Damit erhalten wir

$U :=$  $\simeq \{pkt\} \Rightarrow \pi_1(U) = 1$

$V :=$  \simeq  \cong  $\Rightarrow \pi_1(V) = \langle g_1, g_2 \mid \emptyset \rangle$

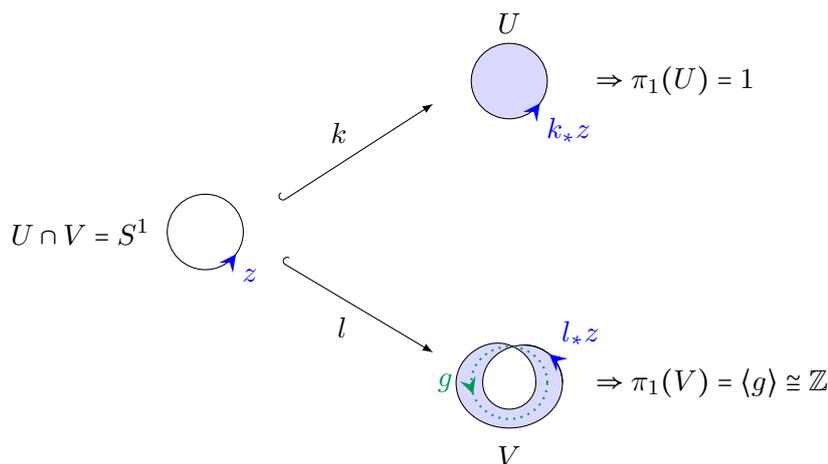
$U \cap V =$  \simeq  $\Rightarrow \pi_1(U \cap V) = \langle g \mid \emptyset \rangle$

$\xrightarrow{\text{SuK}} \pi_1(T^2) = \langle g_1, g_2 \mid k_*(g) = l_*(g) \rangle = \langle g_1, g_2 \mid 1 = g_1^{-1}g_2g_1g_2^{-1} \rangle \cong \mathbb{Z}^2$.

- (4) Zu zeigen: $\pi_1(\mathbb{R}P^2) \cong \mathbb{Z}_2$

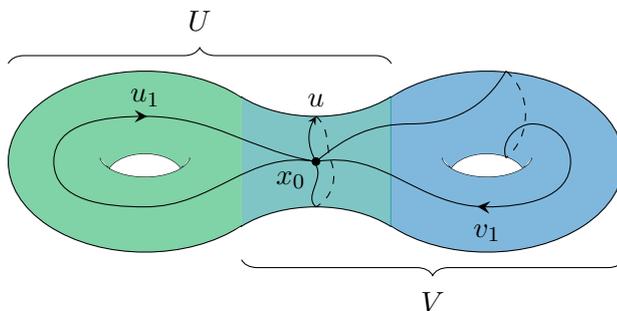
Es ist $\mathbb{R}P^2 \cong \underbrace{\text{Möbiusband}}_{=:V} \cup \underbrace{D^2}_{=:U} \Rightarrow U \cap V = S^1$.

Betrachte dazu



$$\Rightarrow \pi_1(\mathbb{R}P^2) = \langle g \mid 1 = g^2 \rangle \cong \mathbb{Z}_2$$

Beweis zu Satz 4.19:



Wir betrachten den Homomorphismus $\varphi : \pi_1(U, x_0) * \pi_1(V, x_0) \rightarrow \pi_1(X)$, $[u_1][v_1] \cdots [u_n][v_n] \mapsto i_*[u_1]j_*[v_1] \cdots i_*[u_n]j_*[v_n]$ (oder ähnlich: $[u_1][v_1] \mapsto j_*[v_1]i_*[u_1]$).

- φ ist surjektiv: (vgl. Satz 8)
Sei $u : I \rightarrow X$ Schleife von x_0 . Mit Lemma 4.10 finden wir $0 = s_0 < \dots < s_m = 1$, sodass $u([s_{i-1}, s_i])$ ganz in U oder ganz in V für $i = 1, \dots, m$. Dann folgt wie im Beweis von Satz 4.8: $u \cong u_1 v_1 \cdots u_n v_n$ (oder ähnlich) mit u_i ganz in U und v_i ganz in V .
- $N \subset \ker(\varphi)$:
Sei $u : I \rightarrow U \cap V$ Schleife von x_0 in $U \cap V$. Dann gilt $ik(u) = jl(u) \Rightarrow i_*k_*[u] = j_*l_*[u] \Rightarrow k_*[u]l_*[u]^{-1} \in \ker(\varphi)$
- $\ker(\varphi) \subset N$:
Sei $[u] \in \pi_1(X, x_0)$ beliebig. Mit der Surjektivität von φ können wir $[u] = [f_1] \cdots [f_n] =: F_u$ schreiben, wobei die f_i ganz in U oder ganz in V liegen. F_u heißt **Faktorisierung** von u .
Definiere diesbezüglich eine ÄR \sim durch
 - $\cdots [f_i][f_{i+1}] \cdots \sim \cdots [f_i f_{i+1}] \cdots$, falls f_i und f_{i+1} ganz in U oder V
 - $\cdots [f_i] \cdots \underset{cU}{\sim} \cdots [f_i] \cdots \underset{cV}{\sim} \cdots [f_i] \cdots$, falls f_i ganz in $U \cap V$

Damit gilt: Ist $F_u \sim F'_u$, so $F_u = F'_u \in \pi_1(U) * \pi_1(V) / N$.

Zu zeigen: F_u, F'_u sind Faktorisierungen von $u \Rightarrow F_u \sim F'_u$

Seien $f_1 \cdots f_n \simeq_H f'_1 \cdots f'_n$ in X . Wieder mit Lemma 4.10 finden wir $0 = s_0 < \dots < s_p = 1$ und $0 = t_0 < \dots < t_q = 1$, sodass $H([s_{i-1}, s_i] \times [t_{j-1}, t_j])$ ganz in U oder V liegt. O.B.d.A ist $p = q = n$. Die Behauptung folgt nun mit der Definition der ÄR (für die Details siehe VL).

□

4.7 Anwendungen

Satz 4.20 (Brouwerscher Fixpunktsatz)

Ist $f : D^2 \rightarrow D^2$ stetig, dann hat f einen Fixpunkt.

Beweis:

Angenommen: $f(x) \neq x$ für alle $x \in D^2$.

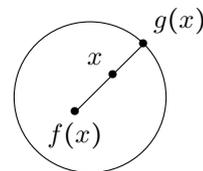
Dann ist $g : D^2 \rightarrow S^1$ (s. Bild) stetig mit $g|_{S^1 = \partial D^2} = id_{S^1}$.

Betrachte $S^1 \xrightarrow{i} D^2 \xrightarrow{g} S^1$. Dann folgt

$$\mathbb{Z} \cong \pi_1(S^1) \xrightarrow{i_*} \pi_1(D^2) \cong 1 \xrightarrow{g_*} \pi_1(S^1) \cong \mathbb{Z}$$

Algebra: $[u] \mapsto 1 \mapsto e$

Topologie: $[u] \mapsto g_* i_* [u] = (g \circ i)_* [u] = id_* [u] = [u] \not\checkmark$



□

Satz 4.21 (Fundamentalsatz der Algebra)

Sei $p : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ein (normiertes) Polynom, dann ex $z_0 \in \mathbb{C}$ mit $p(z_0) = 0$.

Beweis:

Angenommen: $p(z) \neq 0$ für alle $z \in \mathbb{C}$.

Definiere $F : S^1 \times I \rightarrow S^1$, $(z, t) \mapsto \begin{cases} \frac{t^n \cdot p\left(\frac{(1-t)z}{t}\right)}{\left|t^n \cdot p\left(\frac{(1-t)z}{t}\right)\right|} & \text{für } t \neq 0 \\ z^n & \text{für } t = 0 \end{cases}$

$[t^n \cdot p\left(\frac{(1-t)z}{t}\right)] = (1-t)^n z^n + a_{n-1} t (1-t)^{n-1} z^{n-1} + \dots + a_0 t^n \Rightarrow F$ stetig in $t = 0$

Damit ist F eine Homotopie zu $f(z) := F(z, 0) = z^n$ und $g(z) := F(z, 1) = \frac{a_0}{|a_0|}$.

Algebra: $f_* = g_* : \pi_1(S^1) \rightarrow \pi_1(S^1) \cong \mathbb{Z}$

Topologie: $g_* : [u] \mapsto e$
 $f_* : [u] \mapsto [u]^n \not\checkmark$

□

Satz 4.22

Es existiert keine stetige Abbildung $f : S^2 \rightarrow S^1$ mit $f(-x) = -f(x)$ für alle $x \in S^2$.

Beweis:

Angenommen: Es existiert solch ein f . Dann

$$\begin{array}{ccc}
 S^2 & \xrightarrow{f} & S^1 \\
 p_2 \downarrow & \circlearrowleft & \downarrow p_1 \\
 \mathbb{R}P^2 & \xrightarrow{\tilde{f}} & \mathbb{R}P^1
 \end{array}$$

Algebra: $\tilde{f}_* : \mathbb{Z}_2 \cong \pi_1(\mathbb{R}P^2) \rightarrow \pi_1(\mathbb{R}P^1) \cong \pi_1(S^1) \cong \mathbb{Z}$
 $[v] \mapsto e = 0$

Topologie: Sei $u : I \rightarrow S^2$ ein halber Großkreis von N nach S.
 Dann ist $[p_2 \circ u]$ Erzeuger von $\pi_1(\mathbb{R}P^2)$ und $f \circ u$ bildet einen Weg von $y \in S^1$ nach $-y$ (denn: $f(N) = f(-S)$, $f(S) = f(-N) = -f(N) = -f(-S)$).
 Also $[p_1 \circ f \circ u] \neq 0 \in \pi_1(\mathbb{R}P^1)$, sodass $\tilde{f}_*([p_2 \circ u]) = [\tilde{f} \circ p_2 \circ u] = [p_1 \circ f \circ u] \neq 0$
 $\Rightarrow \tilde{f}_* \neq e$. ζ

□

Korollar 4.23 (Borsuk-Ulam)

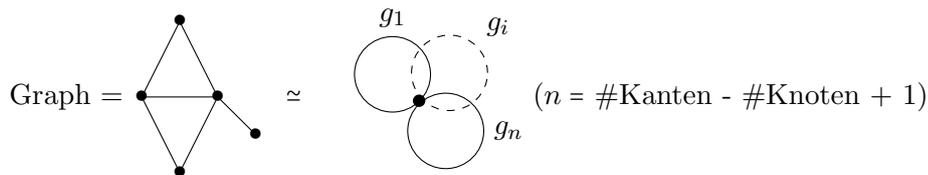
Sei $f : S^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ stetig $\Rightarrow \exists x \in S^2$ mit $f(x) = f(-x)$.

Beweis:

Angenommen: $f(x) \neq f(-x)$ für alle $x \in S^2$.

Definiere $g : S^2 \rightarrow S^1$, $x \mapsto \frac{f(x) - f(-x)}{|f(x) - f(-x)|}$. Insbesondere ist g stetig und es ist $-g(x) = g(-x)$ für alle $x \in S^2$ ζ (4.21) □

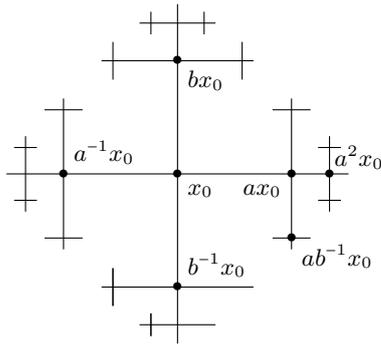
Graphen und freie Gruppen



$$\Rightarrow \pi_1(\text{Graph}) \cong \langle g_1, \dots, g_n | \phi \rangle.$$

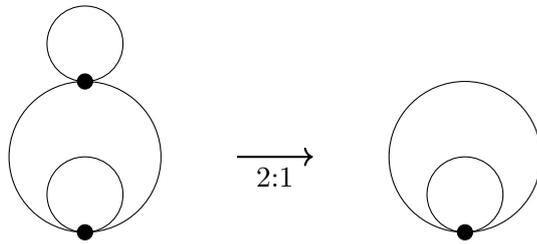
Alternativer Beweis: (Fall $n=2$)

Wir betrachten den ∞ -Baum X :



- X ist einfach zshgd: Jede Schleife in X an x_0 liegt in einem endlichen Teil von X , welcher zusammenziehbar ist.
- X überlagert ∞ :
 $(p : X \rightarrow \infty) = (\Pi : X \rightarrow X/\langle a, b \rangle) \cong \infty$
 $\stackrel{S14}{\Rightarrow} X$ ist universelle Überl. von ∞ und $\pi_1(\infty) \cong \langle a, b \rangle$

Andere Überlagerungen konstruiert man analog. Eine weitere Überlagerung wäre z.B.



Lemma 4.24

$p : (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$ Überlagerung. Dann ist $p_* : \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(Y, y_0)$ injektiv.

Beweis:

Sei $[u] \in \pi_1(X, x_0)$ mit $p \circ u \cong_F e_{y_0}$. Es ist $u : I \rightarrow (X, x_0)$ Hochhebung von $p \circ u : I \rightarrow (Y, y_0)$. Nach Lemma 13 existiert genau eine Homotopie $\tilde{F} : I \times I \rightarrow X$, sodass $\tilde{F} = p^{-1} \circ F$. Damit erhalten wir

$$\tilde{F}(s, 0) = p^{-1}(F(s, 0)) = p^{-1}(p(u(s))) = u(s)$$

$$\tilde{F}(s, 1) = p^{-1}(F(s, 1)) = p^{-1}(e_{y_0}(s)) = p^{-1}(y_0) = x_0 = e_{x_0}(s),$$

also $u \cong_{\tilde{F}} e_{x_0}$. □

Korollar 4.25

$F_n < F_2$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Beweis:

$$F_n \cong \pi_1\left(\bigvee_{i=1}^n S^1\right) < \pi_1(S^1 \vee S^1) \cong F_2$$
 □

Satz 4.26 (Nielsen-Schreiner)

Sei F eine freie Gruppe, $H < F$. Dann ist H frei.

Beweis:

Idee:

\exists Graph G , sodass $\pi_1(G) \cong F$. Sei \tilde{G} die universelle Überlagerung von G . Dann wirkt F

diskret auf \tilde{G} , ebenso H als Untergruppe von F auf \tilde{G} .
 Man kann zeigen, dass \tilde{G}/H ein Graph ist $\Rightarrow H \cong \pi_1(\tilde{G}/H) = \pi_1(\text{Graph}) \cong$ freie Gruppe. \square

5 Mannigfaltigkeiten

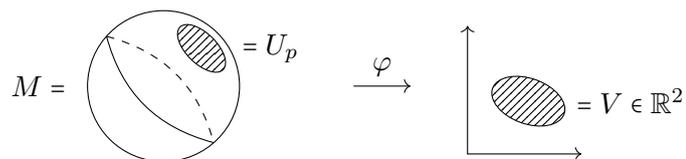
5.1 Definitionen und erste Eigenschaften

Definition

Ein Raum M heißt (**topologische**) **Mannigfaltigkeit**, wenn gilt

- (1) M ist (zshgd und $\neq \emptyset$) topologischer Hausdorffraum mit abzählbarer Basis.
- (2) M ist **lokal Euklidisch**, d.h. $\forall p \in M$ existiert eine offene Umgebung $U_p \subset M$ mit einem Homöomorphismus $\varphi : U_p \rightarrow V$ (offen) $\subset \mathbb{R}^n$.

Man nennt φ eine **Karte** von M und φ^{-1} eine **Parametrisierung**.

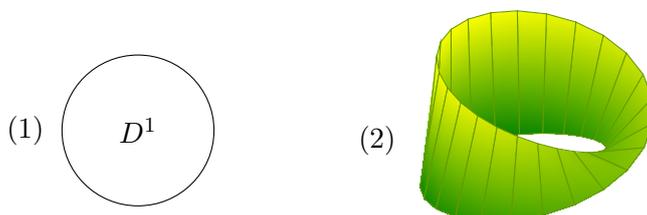


Beispiele:

1. \mathbb{R}^n , $U \subset \mathbb{R}^n$ offen
2. S^n , $\mathbb{R}P^n$, $\mathbb{C}P^n$
3. T^2 , KF

Wenn wir in der Definition ' \mathbb{R}^n ' durch $\mathbb{R}_+^n := \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_n \geq 0\}$ ersetzen, erhalten wir **Mannigfaltigkeiten mit Rand**.

Beispiele:



Definition

Die **Dimension** von M sei n . Der **Rand** von M ist $\partial M := \{p \in M \mid \varphi(p) \in \partial \mathbb{R}_+^n := \{(x, 0) \in \mathbb{R}^n\}\}$

Satz 5.1

Dimension und Rand sind wohldefiniert.

Definition

F heißt **Fläche**, wenn F eine 2-Mannigfaltigkeit ist.

Satz 5.2 (Gebietsinvarianz)

$$\mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^m \Leftrightarrow n = m.$$

Beweis:

Für $n = 2$: (Den allgemeinen Fall können wir mit den jetzigen Methoden noch nicht beweisen, werden ihn aber später aus der Homologietheorie folgern.)

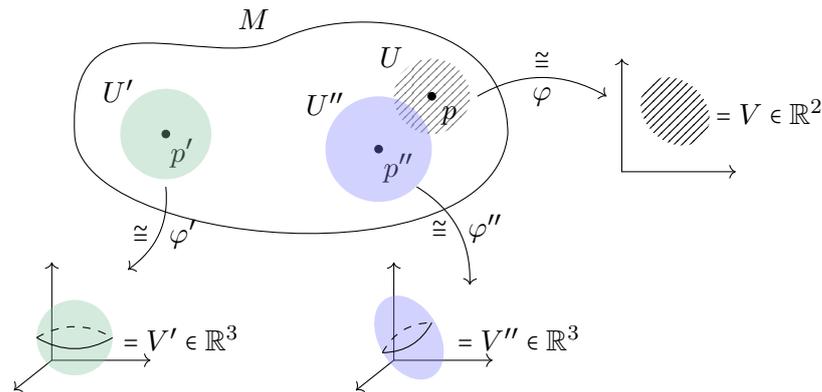
Angenommen $\mathbb{R}^2 \cong \mathbb{R}^m$.

Dann gilt $S^1 \simeq \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \simeq \mathbb{R}^m \setminus \{p\} \simeq S^{m-1} \Rightarrow \mathbb{Z} \cong \pi_1(S^1) \cong \pi_1(S^{m-1}) \Rightarrow m = 2.$ □

Beweis zu Satz 5.1:

Beweis von Satz 1 für $n = 2$:

- Dimension:



Seien $U, U' \subset M$ offen, sodass $\varphi : U \xrightarrow{\cong} V \subset \mathbb{R}^2$, $\varphi' : U' \xrightarrow{\cong} V' \in \mathbb{R}^m$ mit V, V' offen existieren.

$\Rightarrow \exists f : \mathbb{R}^m \supset V'' \xrightarrow{\cong} V \subset \mathbb{R}^2$ mit V'' offen

$\Rightarrow \exists g : \mathbb{R}^m \supset B^m \xrightarrow{\cong} B^2 \subset \mathbb{R}^2 \nexists$ (s. Satz 5.2)

- Rand:

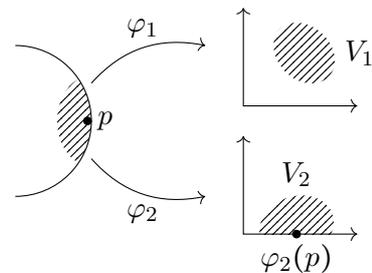
Sei $p \in M$, sodass $U_p \subset M$ offen existiert mit

$\exists \varphi_1 : U \xrightarrow{\cong} V_1 \subset \mathbb{R}^2$, $\varphi_2 : U \xrightarrow{\cong} V_2 \subset \mathbb{R}_+^2$, sodass $\varphi_2(p) \in \partial \mathbb{R}_+^2$

$\Rightarrow \varphi_1 \circ \varphi_2^{-1} = f : V_2 \xrightarrow{\cong} V_1$

$\Rightarrow \exists g : \mathbb{R}_+^2 \xrightarrow{\cong} \mathbb{R}^2$

$\Rightarrow \{p\} \simeq \mathbb{R}_+^2 \setminus \{0\} \simeq \mathbb{R}^2 \setminus \{pkt\} \simeq S^1 \nexists$

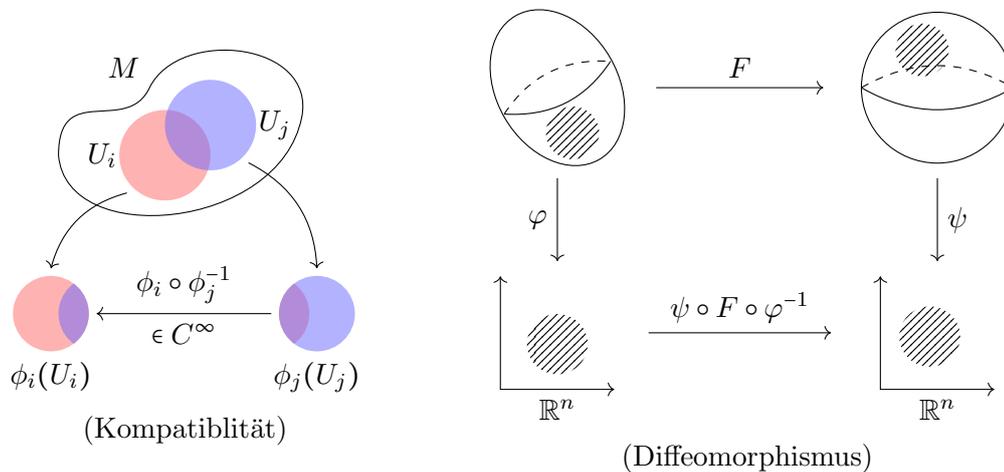


Definition

Ein **Atlas** A von M ist eine Familie von Karten $\{(U_i, \varphi_i)\}_{i \in I}$, sodass $M = \bigcup U_i$.

1. U_i, φ_i und U_j, φ_j heißen **kompatibel** $\Leftrightarrow \varphi_i \circ \varphi_j^{-1} : \varphi_j(U_i \cap U_j) \rightarrow \varphi_i(U_i \cap U_j) \in C^\infty$.
2. Zwei Atlanten A_1 und A_2 heißen **äquivalent**, wenn alle Karten in $A_1 \cup A_2$ kompatibel sind.
3. Eine solche ÄK (auf den Atlanten, in denen alle Karten kompatibel sind) heißt **glatte Struktur**.
4. $F : M \rightarrow N$ heißt **Diffeomorphismus**, wenn für alle Karten (U, φ) in M und (V, ψ) von N gilt, dass $\psi \circ F \circ \varphi^{-1}$ ein Diffeomorphismus ist.
[f ist Diffeomorphismus $\Leftrightarrow f$ ist bijektiv und f, f^{-1} sind stetig differenzierbar]

Veranschaulichungen:



- Beispiele: Alle Beispiele von oben sind glatte Mannigfaltigkeiten.

Geschichtlicher Exkurs

Sei $TOP := \{\text{topo Mannigf.}\}$, $DIFF = \{\text{glatte Mannigf.}\}$. Es gilt $DIFF \subset TOP$. Für $n = 1, 2, 3$ wurde sogar $DIFF = TOP$ bewiesen (Moise, 1953).

Poincaré-Vermutung:

Sei M^n **geschlossen**, d.h. kompakt und $\partial M = \emptyset$, mit $M \simeq S^n$.

$\stackrel{?}{\Rightarrow} M \cong S^n$	$\stackrel{?}{\Rightarrow} M \text{ diffeom. zu } S^n$
n=1,2 (später)	n=1,2,3 (folgt aus dem topologischen Resultat)
n=3 Perelman (2003)	n=4 noch offen
n=4 Freedman (1981)	n=7 NEIN! (Milnor, 1956)
n=5 Stallings (1960)	n ≥ 5 gut verstanden
n ≥ 6 Smale (1960)	

Donaldson (1980):

- Auf \mathbb{R}^n ($n \neq 4$) existiert genau eine glatte Struktur
- Auf \mathbb{R}^4 existieren überabzählbar viele glatte Struktur.

- Beispiele: Seien M^m, N^n Mannigfaltigkeiten $\Rightarrow M \times N$ ist $(m+n)$ -Mannigfaltigkeit.

5.2 Die verbundene Summe

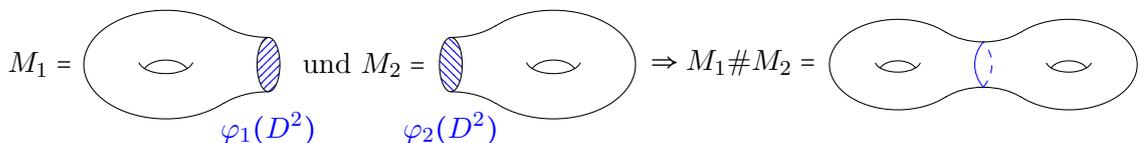
Definition

Seien M_1, M_2 n -Mannigfaltigkeiten und $\varphi_i : D^n \rightarrow M_i$ ($i = 1, 2$) Einbettungen. Die **verbundene Summe** von M_1 und M_2 ist definiert durch

$$M_1 \# M_2 := (M_1 \setminus \varphi_1(\mathring{D}^n) + M_2 \setminus \varphi_2(\mathring{D}^n)) / \sim$$

mit $\varphi_1(x) \sim \varphi_2(x)$ für $x \in \partial D^n$.

Veranschaulichung:



Satz 5.3

$M_1 \# M_2$ ist eine Mannigfaltigkeit, die unabhängig von φ_1 und φ_2 ist.

~ ohne Beweis ~

- Beispiele:

(1) $M^n \# S^n \cong M^n$. [Betrachte $S^n \cong D_+^n \cup D_-^n = \left(\begin{array}{c} D_+^n \\ \text{---} \\ D_-^n \end{array} \right)]$

(2) $T^2 \# T^2 =$ 

(3) $\mathbb{R}P^2 \# \mathbb{R}P^2 \cong \text{Möbiusb.} \cup \text{Möbiusb.} = KF$. [Betrachte: $\mathbb{R}P^2 \cong \text{Möbiusb.} \cup D^2$]

Satz 5.4 (Flächenklassifikationssatz)

Jede geschlossene Fläche F^2 ist homöomorph zu genau einer der folgenden:

- S^2
- $\Sigma_g := \#_g T^2$ mit $g \geq 1$
- $N_k := \#_k \mathbb{R}P^2$ mit $k \geq 1$

5.3 Henkelzerlegungen

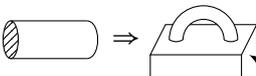
Definition

Ein n-dimensionaler **k-Henkel** h_k^n ist eine Kopie von $D^k \times D^{n-k}$ angeheftet an den Rand ∂M^n einer n-Mannigfaltigkeit mittels Einbettung $\varphi : \partial D^k \times D^{n-k} \rightarrow \partial M$ ($k :=$ **Index**).

Eine **Henkelzerlegung** von M ist die Zerlegung von M in solche Henkel.

- Beispiele:

Henkel:

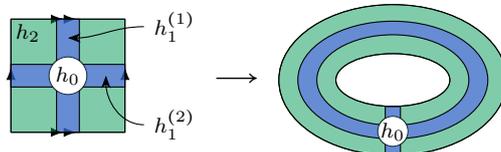
- $h_1^3 = D^1 \times D^2 =$  \Rightarrow  ∂M
- 0-Henkel: $p \times D^n$ angeheftet entlang $\partial(p) = \emptyset$
- n-Henkel: $D^n \times p$ angeheftet entlang $\partial(D^n) = S^{n-1}$

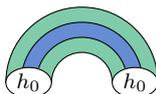
Zerlegungen:

(1) $S^n = h_0 \cup h_n \cong D_- \cup D_+$.

(2) $\mathbb{R}P^2 \cong$ 

(3) $T^2 = h_0 \cup h_1 \cup h_1 \cup h_2$



(4) $S^2 =$ 

- Bemerkung: Zerlegungen sind nicht eindeutig! (siehe z.B. das Beispiel aus der Vorlesung für S^2 .)

Satz 5.5

Jede kompakte Fläche besitzt eine Henkelzerlegung (HZ).

Beweis:

Jede kompakte Fläche kann trianguliert werden [siehe z. B. „A short proof that compact 2-manifolds can be triangulated“(1968) - P. H. Doyle und D. A. Moran]

⌈ In Dimension 2 ist eine **Triangulierung** T einer Fläche F die Zerlegung von F in Dreiecke. Dabei soll $T = \{\Delta_i\}_{i \in I}$ derart sein, dass für $i \neq j$ gilt:
 $\Delta_i \cap \Delta_j = \emptyset$ oder genau eine Ecke oder genau eine Kante. ⌋

Sei T eine Triangulierung von F . Erhalte dann eine HZ durch

- Ecken \rightarrow 0-Henkel
- Kanten \rightarrow 1-Henkel
- Dreiecke \rightarrow 2-Henkel

(vergleiche die Beispiele aus der VL) □

- Bemerkung: Ähnlich zeigt man, dass jede kompakte 1- und 3-Mannigfaltigkeit und jede glatte kompakte m -Mannigfaltigkeit eine HZ besitzt.

Lemma 5.6

Seien $\varphi_1, \varphi_2 : \partial D^k \times D^{n-k} \hookrightarrow \partial M$ Einbettungen zu denen $h : M \xrightarrow{\cong} M$ mit $h \circ \varphi_1 = \varphi_2$ existiert $\Rightarrow M \cup_{\varphi_1} h_k \cong M \cup_{\varphi_2} h_k$.

Beweis:

Betrachte

$$\begin{array}{ccc} M_1 := (M + h_k) / \sim & & \\ \cong? \downarrow h \left(\begin{array}{ccc} \varphi_1(p) & \longleftarrow & p \\ \cong & & \\ \varphi_2(p) & \longleftarrow & p \\ \cong & & id \end{array} \right) & & \\ \downarrow & & \\ M_2 := (M + h_k) / \sim & & \end{array}$$

□

Lemma 5.7 (Alexander-Trick)

- (a) Sei $f : S^{n-1} \rightarrow S^{n-1}$ Homöomorphismus $\Rightarrow \exists F : D^n \xrightarrow{\cong} D^n$ (Erweiterung)
- (b) Sei M^n n -Mannigfaltigkeit und $\varphi_1, \varphi_2 : \partial D^n \times p \hookrightarrow \partial M$ mit $\varphi_1(\partial D^n) = \varphi_2(\partial D^n) \Rightarrow M \cup_{\varphi_1} h_n \cong M \cup_{\varphi_2} h_n$.

Beweis:

(a) $F : \begin{array}{ccc} D^n & \longrightarrow & D^n \\ t \cdot x & \mapsto & t \cdot f(x) \end{array}$ für $x \in S^{n-1}, t \in [0, 1]$

$$(b) \quad M_1 := (M + h_n) / \sim$$

$$\begin{array}{ccc} \varphi_1(p) & \longleftarrow & p \\ \cong & & \cong \\ \varphi_2(p) & \longleftarrow & p \end{array}$$

$$M_2 := (M + h_n) / \sim$$

Erweiterung von $\varphi_2^{-1} \circ \varphi_1$ auf h_n (nach (a)) bringt dann die Behauptung.

□

5.4 Die Klassifikation von Flächen

Lemma 5.8

Jede geschlossene Fläche F besitzt eine HZ mit genau einem 0-Henkel.

Beweis:

(Erinnerung: F zshgd)

- Anheften eines 0-Henkels:
Disjunkte Vereinigung mit einer $D^2 \Rightarrow$ Erzeugung einer weiterer Zusammenhangskomponente.
- Anheften eines 2-Henkels:
Verklebe eine Komponente von ∂M mit $\partial D^2 = S^1$. Da S^1 zshgd, ist auch $\varphi(S^1) \subset \partial M$ zshgd $\Rightarrow M$ und $M \cup h_2$ haben die gleiche Anzahl an Zshgd-Komponenten.

Sei eine HZ von F mit zwei 0-Henkeln h_0, h'_0 gegeben. Da F zshgd müssen diese durch einen 1-Henkel h_1 verbunden sein. Die Vereinigung $h_0 \cup h'_0 \cup h_1$ ist wieder homöomorph zu einem einzigen 0-Henkel. (Diesen Prozess nennt man auch **Henkelaufhebung**.) Schrittweise kann man so alle 0-Henkel bis auf einen entfernen. □

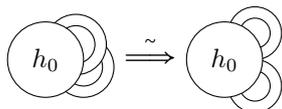
Sei von nun an F immer eine geschlossene Fläche mit einer HZ mit genau einem 0-Henkel.

Lemma 5.9

Wir können annehmen, dass alle 1-Henkel an ∂h_0 angeheftet werden.

Beweis:

Angenommen nicht, dann betrachte:

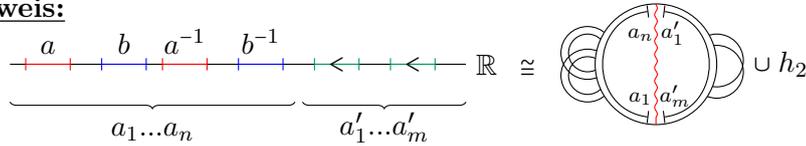


(explizite Formeln folgen in der Übung) □

Lemma 5.11

Seien $F \cong a_1 \dots a_n$, $F' \cong a'_1 \dots a'_m$. Dann $F \# F' \cong a_1 \dots a_n a'_1 \dots a'_m$.

Beweis:

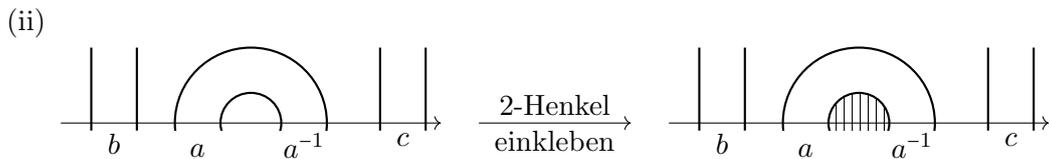
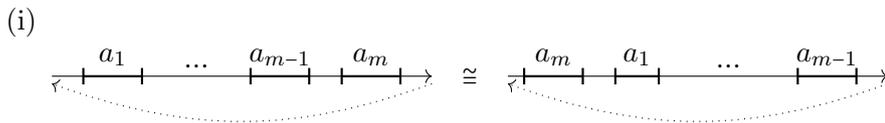


Aufschneiden entlang roter S^1 und Zukleben der Ränder mit 2-Henkel liefert $F \dot{\cup} F'$. \square

Lemma 5.12

- (i) $a_1 \dots a_m \cong a_m a_1 \dots a_{m-1}$
- (ii) $\dots b a a^{-1} c \dots \cong \dots b c \dots$ (Henkelaufhebung)

Beweis:



dann "platt drücken". (Diesen Prozess nennt man auch **Henkelaufhebung**.)

\square

Satz 5.13

Es ist $F \cong S^2, \#_g T^2$ oder $\#_k \mathbb{R}P^2$.

Beweis:

1. Schreibe HZ von F als Wort.
2. Entferne Paare $\dots a a^{-1} \dots$ (Lemma 12(ii))
3. $\dots a \dots a \dots \rightsquigarrow \dots a a \dots$ (**Henkelbewegung**)

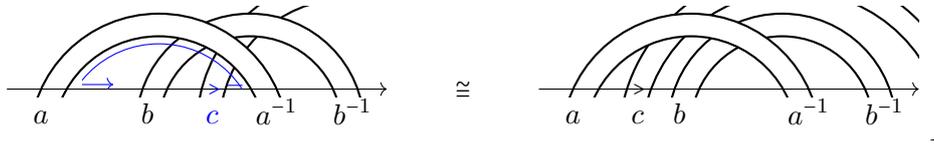


4. Entferne Paare $aa \hat{=}$ Entferne $\mathbb{R}P^2$ -Summand aus F.
 \Rightarrow Alle Paare sind von der Form $\dots a \dots a^{-1} \dots$

5. Betrachte ein Paar von der Form $\dots a \dots a^{-1} \dots$

- Falls ein Paar c, c^{-1} existiert, sodass $\dots a \dots c \dots c^{-1} \dots a^{-1} \dots$, so ersetze a durch c .
 \Rightarrow Erhalte Konfiguration der Form $\dots a \dots b \dots a^{-1} \dots b^{-1} \dots$

6. $\dots a \dots b \dots a^{-1} \dots b^{-1} \dots \cong \dots a \dots b a^{-1} \dots b^{-1} \dots$



7. $\dots a \dots b a^{-1} \dots b^{-1} \dots \cong \dots a b a^{-1} b^{-1} \dots$



8. Entferne Paare der Form $aba^{-1}b^{-1} \hat{=} \text{Entfernen von } T^2\text{-Summanden}$

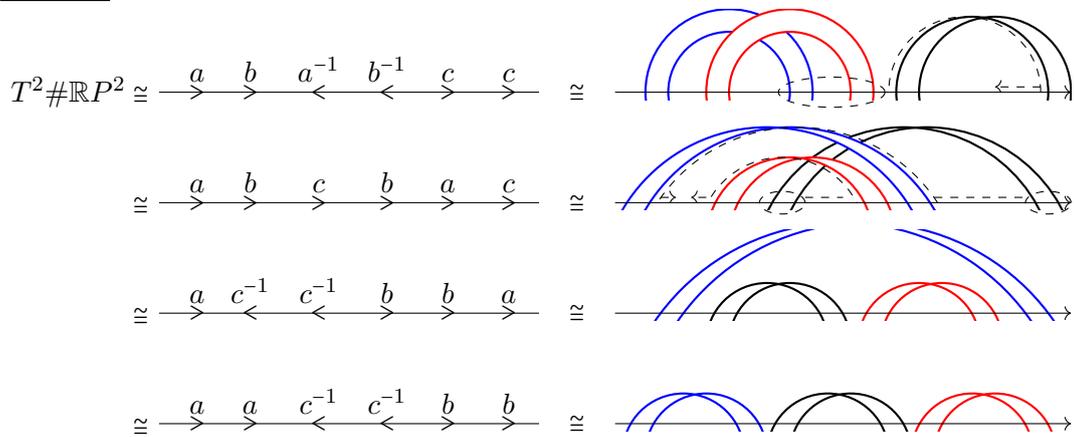
$$\Rightarrow F \cong T^2 \# \dots \# T^2 \# \mathbb{R}P^2 \# \dots \# \mathbb{R}P^2.$$

Satz 13 folgt aus dem folgenden Lemma. □

Lemma 5.14

$$T^2 \# \mathbb{R}P^2 \cong \mathbb{R}P^2 \# \mathbb{R}P^2 \# \mathbb{R}P^2$$

Beweis:



Satz 5.15

$S^2, \#_g T^2, \#_k \mathbb{R}P^2$ sind paarweise nicht homöomorph.

Definition

Sei G eine Gruppe.

Die Untergruppe $[G, G]$ erzeugt durch $[a, b] := aba^{-1}b^{-1} \forall a, b \in G$ heißt **Kommutator Gruppe**. Für diese gilt des Weiteren

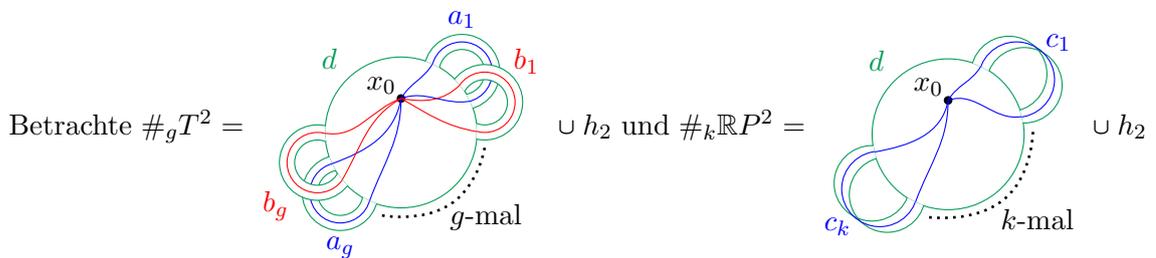
- Wegen $[a, b]^{-1} = [b, a]$ besteht $[G, G]$ aus endlichen Produkten von $[\cdot, \cdot]$
- Es gilt $g[a, b]g^{-1} = [gag^{-1}, gbg^{-1}] \in [G, G]$. Damit ist $[G, G]$ ein Normalteiler in G .

$G^{ab} := G/[G, G]$ ist eine abelsche Gruppe und heißt **Abelisierung** von G .

Dazu gilt: Ist $G \cong \langle E \mid R \rangle \Rightarrow G/[G, G] \cong \langle E \mid R, [a, b] = 1 \forall a, b \in G \rangle$

Beweis zu Satz 5.15:

Wir wissen bereits $\pi_1(S^2) = 1$.



Wir berechnen nun $\pi_1(F)$ ($F = \#_g T^2$ bzw. $F = \#_k \mathbb{R}P^2$) mit dem Satz von Seifert und van Kampen.

Setze dazu

$$U := h_0 \cup \{1\text{-Henkel}\} \text{ (leicht verdickt)} \cong \bigcup_{i=1}^{2g \text{ bzw. } k} S^1$$

$$V := h_2 \text{ (leicht verdickt)} \cong \{pkt\}$$

Bezüglich eines Basispunktes x_0 im Schnitt, von dem aus die Schleifen ausgehen, erhalten wir

$$\pi_1(U) \cong \langle a_1, b_1, \dots, a_g, b_g \mid \emptyset \rangle \text{ bzw. } \langle c_1, \dots, c_k \mid \emptyset \rangle$$

$$\pi_1(V) \cong 1$$

$$U \cap V \cong S^1 \Rightarrow \pi_1(U \cap V) \cong \langle d \mid \emptyset \rangle$$

$$\Rightarrow \pi_1(\#_g T^2) \cong \langle a_1, b_1, \dots, a_g, b_g \mid i_*(d) = j_*(d) \rangle$$

$$= \langle a_1, b_1, \dots, a_g, b_g \mid a_1 b_1^{-1} a_1^{-1} b_1 \cdots a_g b_g^{-1} a_g^{-1} b_g = 1 \rangle$$

$$\Rightarrow \pi_1(\#_k \mathbb{R}P^2) \cong \langle c_1, \dots, c_k \mid i_*(d) = j_*(d) \rangle$$

$$= \langle c_1, \dots, c_k \mid c_1^2 \cdots c_k^2 = 1 \rangle$$

Bemerkung: Es folgt die Poincaré-Vermutung in Dimension 2:

Sei F eine geschlossene Fläche mit $F \simeq S^2$. Dann gilt $\pi_1(F) \cong \pi_1(S^2) \cong 1 \Rightarrow F \cong S^2$.

Als Abelisierungen der Fundamentalgruppen erhalten wir (mit der Definition)

$$\begin{aligned} \pi_1^{ab}(\#_g T^2) &\cong \langle a_1, b_1, \dots, a_g, b_g \mid a_1 b_1^{-1} a_1^{-1} b_1 \dots a_g b_g^{-1} a_g^{-1} b_g = 1, \\ &\quad [a, b] = 1 \quad \forall a, b \in \pi_1(\#_g T^2) \rangle \\ &\cong \langle a_1, b_1, \dots, a_g, b_g \mid [a, b] = 1 \quad \forall a, b \in \pi_1(\#_g T^2) \rangle \\ &\cong \mathbb{Z}^{2g} \\ \pi_1^{ab}(\#_k \mathbb{R}P^2) &\cong \langle c_1, \dots, c_k \mid c_1^2 \dots c_k^2 = 1, [a, b] = 1 \quad \forall a, b \in \pi_1(\#_k \mathbb{R}P^2) \rangle \\ &\cong \langle c_1, \dots, c_{k-1}, c_1 \dots c_k \mid (c_1 \dots c_k)^2 = 1, [a, b] = 1 \quad \forall a, b \in \pi_1(\#_k \mathbb{R}P^2) \rangle \\ &\cong \mathbb{Z}^{k-1} \oplus \mathbb{Z}_2 \end{aligned}$$

□

- Bemerkung: F ist orientierbar genau dann, wenn $\pi_1^{ab}(F)$ keinen \mathbb{Z}_2 -Faktor enthält.

5.5 Heegaard-Zerlegungen

(Nicht Klausurrelevant!)

Sei M eine geschlossene und orientierbare 3-Mannigfaltigkeit (Einschränkungen nur zur Vereinfachung, Kompaktheit ist wichtig).

Satz 5.16

M besitzt eine HZ mit genau einem h_0 und genau einem h_3 .

Beweis:

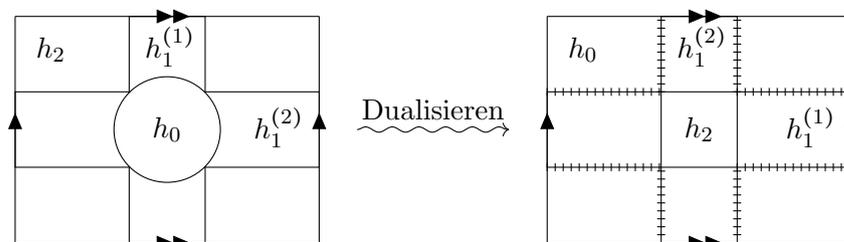
- (1) Jedes M besitzt eine HZ. (*Übung*)
- (2) M zshgd \Rightarrow 2 0-Henkel müssen durch 1-Henkel verbunden sein



- (3) **duale Henkelzerlegung:**

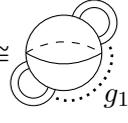
Beobachte: k-Henkel $h_k = D^k \times D^{n-k} \cong D^{n-k} \times D^k = h_{n-k}$ (n-k)-Henkel ("Henkelkörper auf den Kopf stellen")

- Beispiele:



- (4) Durch Übergang zur Dualen HZ erhalten wir HZ mit genau einem 3-Henkel.
- (5) nochmal (2)

□

$$\Rightarrow M = \underbrace{h_0 \cup h_1^1 \cup \dots \cup h_1^{g_1}}_{=H_1} \cup \underbrace{h_2^1 \cup \dots \cup h_2^{g_2}}_{=H_2} \cup h_3 \text{ mit } H_1 \cong \text{Diagramm}$$


⌈ Behauptung: $g_1 = g_2$ ⌋
 ⌋ $\#_{g_1} T^2 \cong \partial H_1 \cong \partial H_2 \cong \#_{g_2} T^2$ und Flächenklassifikationssatz ⌋

$M = H_1 \cup_{\partial} H_2$ mit $H_1 \cong H_2$ heißt **Heegaard-Zerlegung**.

In der Vorlesung wurde dann gezeigt, dass jedes M eine Heegaard-Zerlegung besitzt und diese eindeutig durch ein **planares Heegaard-Diagramm** bestimmt ist. Einfache Beispiele wurden diskutiert.

6 Simplicialkomplexe

6.1 Triangulierungen

Seien $x_0, \dots, x_q \in \mathbb{R}^n$, welche einen affinen Raum

$$A_{x_0, \dots, x_q} := \{x_0 + \sum_{i=1}^q \lambda_i (x_i - x_0) \mid \lambda_i \in \mathbb{R}\}$$

aufspannen.

Eine symmetrische Darstellung ist mit $\lambda_0 = 1 - \sum_{i=1}^q \lambda_i$ gegeben durch

$$A_{x_0, \dots, x_q} = \left\{ \sum_{i=0}^q \lambda_i x_i \mid \sum_{i=0}^q \lambda_i = 1 \right\}.$$

Wir sagen x_0, \dots, x_q sind **in allgemeiner Lage**

- $\Leftrightarrow \dim(A_{x_0, \dots, x_q}) = q$
- $\Leftrightarrow x_1 - x_0, \dots, x_q - x_0$ sind linear unabh.
- $\Leftrightarrow \sum_{i=0}^q \lambda_i x_i = \sum_{i=0}^q \lambda'_i x_i$ und $\sum_{i=0}^q \lambda_i = 1 = \sum_{i=0}^q \lambda'_i$

Definition

Dann heißt

$$G := \left\{ \sum_{i=0}^q \lambda_i x_i \mid \sum_{i=0}^q \lambda_i = 1, \lambda_0, \dots, \lambda_q \geq 0 \right\}$$

das **q-dimensionale Simplex** mit **Ecken** x_0, \dots, x_q .

Notation: $\varsigma = (x_0, \dots, x_q)$.

- Beispiele:

- 0-Simplex = Punkt
- 1-Simplex = Geradensegment
- 2-Simplex = Dreieck
- 3-Simplex = Tetraeder

Definition

Ein Simplex $\tau \subset \mathbb{R}^n$ heißt **Seite** von einem Simplex ς (Notation: $\tau \leq \varsigma$) genau dann, wenn Ecken von τ Ecken von ς sind.

τ heißt **eigentliche Seite** (Notation: $\tau < \varsigma$) genau dann, wenn $\tau \leq \varsigma$ und $\tau \neq \varsigma$.

Das **Innere** von ς ist $\overset{\circ}{\varsigma} := \varsigma \setminus \bigcup \{\text{eigentliche Seiten}\}$

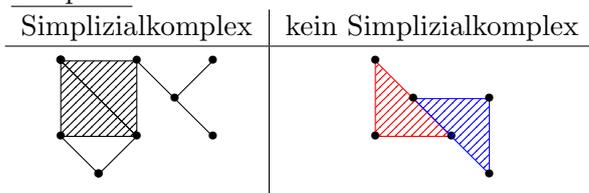
Definition

Ein **simplizialer Komplex** K ist eine endliche Menge von Simplexen im \mathbb{R}^n mit

- (i) $\varsigma \in K$ und $\tau < \varsigma \Rightarrow \tau \in K$
- (ii) $\varsigma, \tau \in K$ und $\varsigma \cap \tau \neq \emptyset \Rightarrow \varsigma \cap \tau \leq \varsigma$ und $\varsigma \cap \tau \leq \tau$

Die 0-Simplexe heißen **Ecken** von K und die 1-Simplexe die **Kanten** von K . Die **Dimension** $\dim(K) := \max_{\varsigma \in K} \{\dim(\varsigma)\}$.

- Beispiele:



Definition

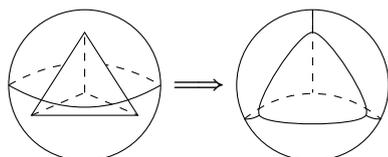
Der **zugrundeliegende topo. Raum** ist $|K| := \bigcup_{\varsigma \in K} \varsigma \subset \mathbb{R}^n$ mit der Teilraumtopologie.

X heißt **triangulierbar** oder **Polyeder** genau dann, wenn \exists Simplizialkomplex K , sodass ein Homöomorphismus $h : |K| \xrightarrow{\cong} X$ existiert.

Dazu heißt (K, h) **Triangulierung** von X

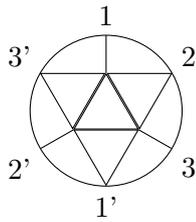
- S^q ist triangulierbar:

$$K := \bigcup \{\text{eigentliche Seiten des } (q+1)\text{-Simplexes im } \mathbb{R}^{q+1}\}$$



- $\mathbb{R}P^2$ ist triangulierbar:

$$\mathbb{R}P^2 = D^2 / x \sim -x \text{ für } x \in \partial D^2$$



- Alle kompakten und glatten Mannigfaltigkeiten sind triangulierbar.
- Aber es existieren kompakte, topologische Mannigfaltigkeiten, die nicht triangulierbar sind (ab $\dim n \geq 4$)

• Bemerkung:

- (1) Jeder Simplex ist kompakt $\Rightarrow |K|$ ist kompakt (als Vereinigung kompakter Mengen)
- (2) Ist $|K|$ zshgd, so auch wegzshgd. (Übung)
- (3) $|K|$ ist lokal einfach zshgd. (Übung)

• Beispiele:

Die folgenden Räume sind nicht triangulierbar:

- \mathbb{R}^n
- Graph von $x \mapsto \sin(\frac{1}{x})$
- Hawaiianischer Ohrring

6.2 Die Baryzentrische Unterteilung

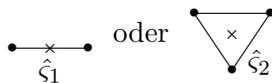
Sei $x \in \zeta = (x_0, \dots, x_q)$. Dann gibt es eine eindeutige Darstellung von x als

$$x = \sum_{i=0}^q \lambda_i x_i \text{ mit } \sum_{i=0}^q \lambda_i = 1.$$

Wir nennen $(\lambda_0, \dots, \lambda_q)$ **baryzentrische Koordinaten** von x .

Der **Schwerpunkt** oder **Baryzentrum** von ζ ist der Punkt $\hat{\zeta}$ mit den baryzentrischen Koordinaten $\lambda_0 = \dots = \lambda_q = \frac{1}{q+1}$.

• Beispiele:



• Bemerkung:

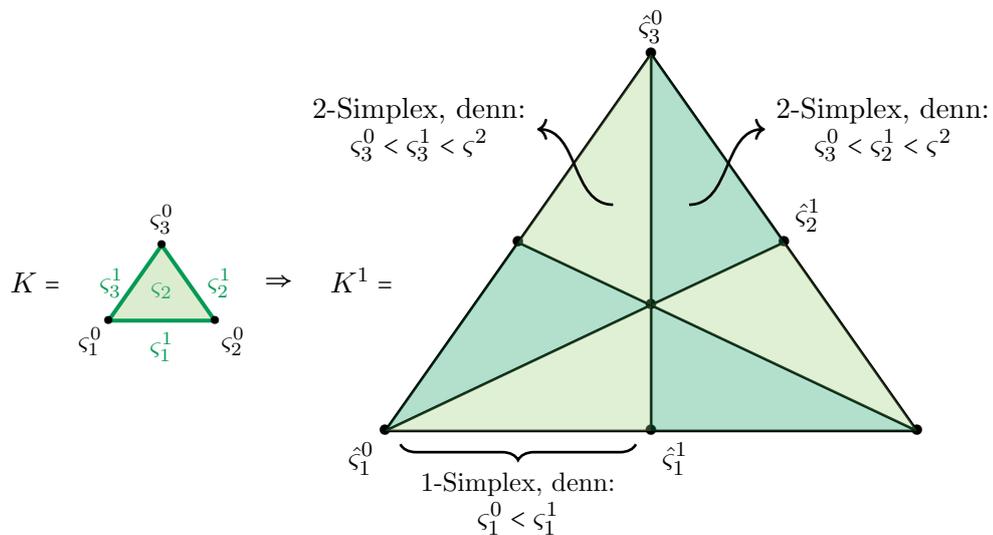
- Seien $\zeta^0, \dots, \zeta^q \in K$ mit $\zeta^0 < \dots < \zeta^q$ (i.A. $\dim(\zeta^i) = i$).
 $\Rightarrow \hat{\zeta}^i \notin$ affiner Teilraum aufgespannt von $\hat{\zeta}^0, \dots, \hat{\zeta}^{i-1}$
 $\Rightarrow \hat{\zeta}^0, \dots, \hat{\zeta}^q$ liegen in allgemeiner Lage

Definition

Die **erste baryzentrische Unterteilung** K^1 von K ist der wie folgt definierte Komplex:

- (i) Ecken von $K^1 =$ Schwerpunkte aller Simplexe in K
- (ii) Die Ecken $\hat{\zeta}^0, \dots, \hat{\zeta}^q$ von K^1 spannen einen q -Simplex in K^1 auf genau dann, wenn für $\zeta^0, \dots, \zeta^q \in K$ (nach Ummummerierung) gilt: $\zeta^0 < \dots < \zeta^q$.

• Beispiele:



- Bemerkung: $(\zeta^0, \dots, \zeta^q) \in K^1 \Rightarrow \zeta^0 < \dots < \zeta^q$
 \Rightarrow Alle Ecken $\hat{\zeta}^0, \dots, \hat{\zeta}^q$ von $(\zeta^0, \dots, \zeta^q) \in K^1$ liegen in $\zeta^q \in K$

Lemma 6.1

- (a) K^1 ist ein Simplicialkomplex und $|K^1| = |K|$
- (b) $\mu(K) := \max_{\zeta \in K} \{\text{Durchmesser von } \zeta\}$ heißt **Maschenweite von K**.
 Es gilt $\mu(K^1) \leq \frac{m}{m+1} \mu(K)$, wobei $m = \dim(K)$

Beweis:

- (a) Wir hatten gesehen: K^1 besteht aus eindeutigen Mengen von Simplexen.

Die Behauptung folgt daraus, dass $\{\zeta' \mid \zeta' \in K^1 \text{ und } \zeta' \subset \zeta\}$ eine disjunkte Zerlegung von $\zeta \in K$ ist. (*)

(*) folgt per Induktion über $q = \dim(\zeta)$:

- $q = 0$: Es gilt $\zeta = \hat{\zeta}$.

- Sei $q > 0$ und ζ ein q -Simplex.

Nach IV ist $\{\zeta' \mid \zeta' \in K^1 \text{ und } \zeta' \subset \zeta \setminus \zeta^c\}$ disjunkte Zerlegung des Randes $\zeta \setminus \zeta^c$. Jedes $x \in \zeta \setminus \zeta^c$ liegt auf einer Seite von $\hat{\zeta}$ zu dem Rand $\zeta \setminus \zeta^c$.

Sei y Endpunkt dieser Strecke auf $\zeta \setminus \zeta^c$. Dann existiert genau ein $\tau' \in K^1$ mit $y \in \tau'$. Seien $\hat{\tau}^0, \dots, \hat{\tau}^r$ die Ecken. Nach Ummummerierung $\tau^0 < \dots < \tau^r < \zeta$ und $(\hat{\tau}^0, \dots, \hat{\tau}^r, \hat{\zeta}) \in K^1$ ist der eindeutige Simplex in K^1 , der x im Zentrum enthält.

- (b) Es sei $\text{Durchmesser}(\zeta) := \max\{\text{Länge seiner Kanten}\}$.

Sei ζ' eine Kante in K^1 mit Ecken \hat{a}, \hat{b} , wobei o.B.d.A $a < b \Rightarrow \zeta' \subset b$ und sei $q := \dim(b)$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \text{Länge}(\zeta') &\stackrel{(*)}{\leq} \frac{q}{q+1} \text{Durchmesser}(b) \leq \frac{m}{m+1} \text{Durchmesser}(b) \leq \frac{m}{m+1} \mu(K) \\ \Rightarrow \mu(K^1) &\leq \frac{m}{m+1} \mu(K) \end{aligned}$$

Zu (*):

Sei $b = (x_0, \dots, x_q)$ ein q -Simplex mit $a < b$ und $\zeta' := (\hat{a}, \hat{b})$. Dann ist zu zeigen: $\text{Länge}(\zeta') \leq \frac{q}{q+1} \text{Durchmesser}(b)$.

Es gilt $\text{Länge}(\zeta') \leq \text{Länge}((\hat{b}, x_i))$ für ein $i = 0, \dots, q$, da sich die anderen (\hat{b}, y) durch Mitteln ergeben. Wir rechnen nach, z. B. für $i = 0$:

$$\hat{b} - x_0 = \frac{1}{q+1}(x_0 + \dots + x_q) - x_0 = \frac{1}{q+1}((x_1 - x_0) + \dots + (x_q - x_0)),$$

sodass

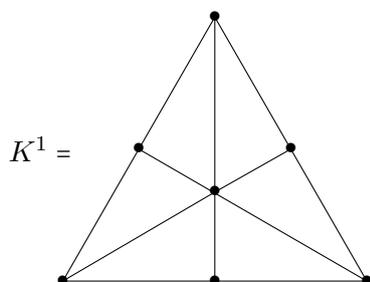
$$\begin{aligned} \text{Länge}(\zeta') \leq \text{Länge}((\hat{b}, x_0)) &= |\hat{b} - x_0| \leq \frac{1}{q+1}(|x_1 - x_0| + \dots + |x_q - x_0|) \\ &\leq \frac{q}{q+1} \text{Durchmesser}(b) \end{aligned}$$

□

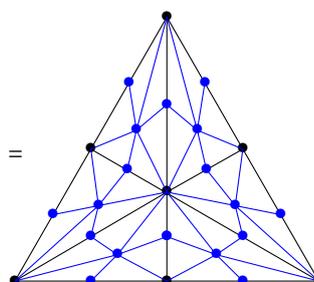
Definition

Die l -te Baryzentrische Unterteilung ist $K^l := (K^{l-1})^1$.

- Beispiele:



und dazu $K^2 =$

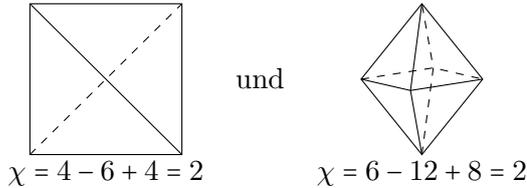


6.3 Die Euler-Charakteristik und die Hauptvermutung

Definition

Sei K ein Simplizialkomplex von Dimension n und $\alpha_i := \#\{i\text{-Simplexe in } K\}$.
Die **Euler-Charakteristik** ist $\chi(K) := \sum_{i=0}^n (-1)^i \alpha_i$.

• Beispiele:



Frage: Ist χ eine topo. Invariante? D.h. $|K| \cong |L| \stackrel{?}{\Rightarrow} \chi(K) = \chi(L)$.

Lemma 6.2

Sind $K, L, K \cap L$ und $K \cup L$ Simplizialkomplexe, dann
$$\chi(K \cup L) = \chi(K) + \chi(L) - \chi(K \cap L)$$

Beweis:

Übung □

Korollar 6.3

$$\chi(K) = \chi(K^1)$$

Beweis:

Wir zeigen zunächst: Für einen n -Simplex ς_n ist $\chi(\varsigma_n) = 1$.

Mit $\alpha_i^n := \#\{i\text{-Simplexe im } \varsigma_n\}$ erhalten wir

$$\alpha_0^n = \alpha_0^{n-1} + 1$$

$$\alpha_1^n = \alpha_1^{n-1} + \alpha_0^{n-1}$$

⋮

$$\alpha_i^n = \alpha_i^{n-1} + \alpha_{i-1}^{n-1}$$

$$\Rightarrow \chi(\varsigma_n) = 1 + \alpha_0^{n-1} - \alpha_1^{n-1} + \alpha_2^{n-1} - \dots + \alpha_n^{n-1} = 1$$

Ähnlich: $\chi(\varsigma_n^1) = 1$.

Sei $n = \dim(K)$ und $l := \alpha_n = \#\{n\text{-Simplexe in } K\}$. Wir führen eine Induktion nach n und l :

- $n = 0$: Es ist $\Rightarrow K = K^1$
- $n - 1 \rightsquigarrow n$:

- $l = 1$:
 $K = L \cup \zeta_n$ mit $\dim(L) < n$. Dann $\chi(K) = \chi(L) + \chi(\zeta_n) + \chi(L \cap \zeta_n) \geq \chi(L^1) + 1 + \chi((L \cap \zeta_n)^1) = \chi(K^1)$
- $l \rightsquigarrow l + 1$:
 $K = L \cup \zeta_n$ mit $\#\{n\text{-Simplexe in } L\} = l \Rightarrow \chi(K) = \chi(L) + \chi(\zeta_n) + \chi(L \cap \zeta_n) \geq \chi(L^1) + 1 + \chi((L \cap \zeta_n)^1) = \chi(K^1)$

□

Hauptvermutung:

Für alle Triangulierungen K, L von X existiert eine gemeinsame "Verfeinerung".

- Bemerkung: Aus der Hauptvermutung folgt, dass χ eine topologische Invariante ist.

Problem:

- Die HV ist i.A. falsch (sogar für Mannigfaltigkeiten).
- Aber z. B. bewiesen für Mannigfaltigkeiten der Dimension 1,2,3.

Trotzdem gilt:

Satz 6.4

Sind K, L Komplexe mit $|K| \cong |L| \Rightarrow \chi(K) = \chi(L)$.

Beweis:

Kommt in Kapitel 8 mittels Homologie.

□

Lemma 6.5 (Euler)

Sei $|K| \cong S^2$, dann gilt $\chi(K) = 2$.

Beweis:

Wir wissen

- $|K| \cong S^2 \Rightarrow \dim(K) = 2$
- $\chi(K) = \text{Ecken} - \text{Kanten} + \text{Flächen}$
- $|K|$ zshgd \Rightarrow alle Ecken sind durch Kanten verbunden

Sei T ein **maximaler Baum** in K . D.h. $T \subset K$ sei ein 1-dimensionaler Unterkomplex von K , der alle Ecken von K enthält und für den $|T|$ zshgd mit $|T| \simeq pkt$ ist. Dann gilt $\#\{\text{Ecken von } T\} = \#\{\text{Kanten von } T\} + 1 \Rightarrow \chi(T) = 1$.

Da $|K| \setminus |T|$ eine zshgd Fläche ist, muss $\chi(T) + \#\{\text{Flächen in } |K| \setminus |T|\} = 2$. Wir erhalten K aus T durch Hinzufügen der restlichen Kanten. Wegen $|K| \cong S^2$ bewirkt das Hinzufügen einer solchen Kante das Zerteilen einer Fläche in zwei Teile $\Rightarrow \chi(K) = \chi(T) + 1 = 2$. □

Satz 6.6

Es existieren genau 5 **platonische Körper** (Tetraeder, Würfel, Oktaeder, Ikosaeder, Dodekaeder). [Das heißt: Konvexe Polyeder, sodass alle Seiten kongruente Polygone sind und sich an jeder Ecke gleich viele Kanten treffen.]

Beweis:

Sei K der Rand eines platonischen Körpers, also $K \cong S^2$. Wir wissen:

- Jede Fläche von K hat n Ecken und n Kanten.
- Jede Kante ist Seite von zwei Flächen $\Rightarrow k = \frac{nf}{2}$.
- Jede Ecke ist Seite von d Kanten und jede Kante hat 2 Ecken $\Rightarrow 2k = de$.

$$\Rightarrow 2 = \chi(S^2) = \chi(K) = e - k + f = e - \frac{de}{2} + \frac{de}{n}$$

$$\Leftrightarrow e(2n + 2d - nd) = 4n \text{ mit } e, n, d > 0$$

$$\Rightarrow 2n + 2d - nd > 0$$

$$\Leftrightarrow (n - 2)(d - 2) < 4$$

$$\Rightarrow (d, n) = (3, 3), (3, 4), (4, 3), (3, 5) \text{ oder } (5, 3)$$

□

6.4 Simpliciale Approximation

Definition

Seien K und L Simplicialkomplexe. Wir nennen $s : |K| \rightarrow |L|$ **simplicial** genau dann, wenn für alle $\zeta \in K$ gilt, dass $s|_{\zeta} : \zeta \rightarrow \tau \in L$ linear ist.

Konkret: Sei $\zeta = (x_0, \dots, x_q) \in K$. Es ist s ein Simplicial, wenn $s(x_0), \dots, s(x_q)$ Ecken eines Simplexes $\tau \in L$ (i.A. nicht verschieden) sind und $s(\sum_{i=0}^q \lambda_i x_i) = \sum_{i=0}^q \lambda_i s(x_i)$.

- Bemerkung: s simplicial $\Rightarrow s$ stetig.

Definition

Ist $f : |K| \rightarrow |L|$ stetig, dann existiert für alle $x \in |K|$ genau ein $\tau \in L$ mit $f(x) \in \hat{\tau}$. $\tau = \tau_{f(x)}$ heißt **Trägersimplex** von $f(x)$.

$s : |K| \rightarrow |L|$ heißt **simpliciale Approximation** von f genau dann, wenn s Simplicial ist und $s(x) \in \tau_{f(x)}$ (nicht notwendig $\hat{\tau}$) für alle $x \in |K|$ gilt.

Lemma 6.7

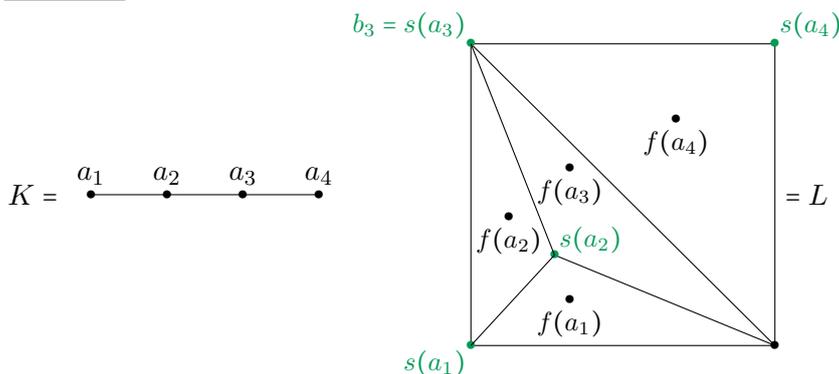
Es gilt $s \cong f$.

Beweis:

$F(x, t) := (1 - t) \cdot s(x) + t \cdot f(x)$ liegt ganz in $\tau_{f(x)}$.

□

- Beispiele:



Wir hätten jedoch auch $s([a_3, a_4]) = b_3$ wählen können. Die Wahl von s ist also nicht eindeutig!

- Bemerkung: Ist f Homöomorphismus, so ist s i.A. kein Homöomorphismus.

- Beispiele: I.A. existiert s nicht.
Sei $|K| = |L| = [0, 1]$ und $f(x) = x^2$.

Behauptung: f hat keine simpliziale Approximation.

Angenommen s sei eine solche. Dann

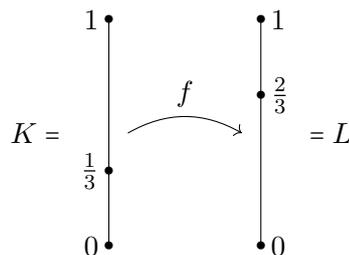
$$f(0) = 0 \Rightarrow s(0) = 0,$$

$$f(1) = 1 \Rightarrow s(1) = 1,$$

$$s\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow \left[0, \frac{1}{3}\right] \xrightarrow{s \text{ linear}} \left[0, \frac{2}{3}\right], \left[\frac{1}{3}, 1\right] \xrightarrow{s \text{ linear}} \left[\frac{2}{3}, 1\right].$$

$$\text{Aber } f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4} \in \left[0, \frac{2}{3}\right] \Rightarrow s\left(\frac{1}{2}\right) \in \left[0, \frac{2}{3}\right] \not\checkmark$$

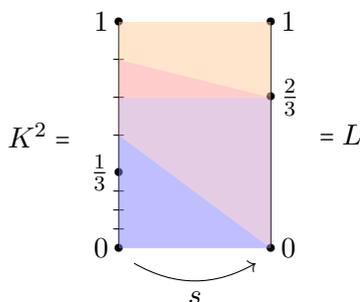


Satz 6.8 (Existenz der simplizialen Approximation)

Sei $f : |K| \rightarrow |L|$ stetig. Für ein $l \in \mathbb{N}_0$ hinreichend groß existiert eine simpliziale Approximation $s : |K^l| \rightarrow |L|$ zu $f : |K^l| \rightarrow |L|$.

- Beispiele:

Sei alles wie im vorigen Beispiel. Betrachte jedoch K^2 .



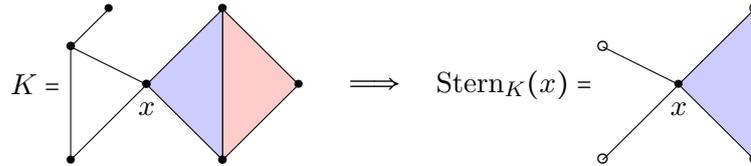
Definition

Sei $x \in K$ eine Ecke. Dann heißt die offene Menge

$$\text{Stern}_K(x) := \bigcup_{x \leq \zeta} \overset{\circ}{\zeta} = \{p \in |K| \mid x \leq \tau_p\}$$

Eckenstern von x in K .

- Beispiele:



Lemma 6.9

Ecken x_0, \dots, x_q von K spannen ein Simplex in K auf genau dann, wenn $\bigcap_{i=0}^q \text{Stern}_K(x_i) \neq \emptyset$.

Beweis:

" \Rightarrow ": Sei $\zeta = (x_0, \dots, x_q) \in K$. Dann $\overset{\circ}{\zeta} \subset \bigcap_{i=0}^q \text{Stern}_K(x_i)$

" \Leftarrow ": Sei $p \in \bigcap_{i=0}^q \text{Stern}_K(x_i)$. Dann gilt für alle $i = 0, \dots, q$, dass x_i Ecke von τ_p ist. Somit $\zeta := (x_0, \dots, x_q) \leq \tau_p \in K \Rightarrow \zeta \in K$.

□

Beweis zu Satz 6.8:

- Angenommen für alle Ecken $u \in K$ existiert eine Ecke $v \in L$, sodass $f(\text{Stern}_K(u)) \subset \text{Stern}_L(v)$. Wir definieren dann s auf den Ecken von K wie folgt: $s(u) = v$, wobei v wie in der Annahme.

- Angenommen $(u_0, \dots, u_q) \in K$. Dann ist nach Lemma 6.9 $\bigcap_{i=0}^q \text{Stern}_K(u_i) \neq \emptyset$. Also

$$\emptyset \neq f\left(\bigcap_{i=0}^q \text{Stern}_K(u_i)\right) \subset \bigcap_{i=0}^q f(\text{Stern}_K(u_i)) \subset \bigcap_{i=0}^q \text{Stern}_L(s(u_i)).$$

Damit spannen $s(u_0), \dots, s(u_q)$ einen Simplex in L auf.

- Man kann s linear über die Simplexe von K zu einer simplizialen Abb $s : |K| \rightarrow |L|$ erweitern. s ist dann eine simpliziale Approximation von f , denn:

Sei $x \in |K|$ und $\tau_x := (u_0, \dots, u_q)$. Dann gilt

$$x \in \bigcap_{i=0}^q \text{Stern}_K(u_i) \Rightarrow f(x) \in \bigcap_{i=0}^q \text{Stern}_L(s(u_i))$$

$$\Rightarrow s(x) \in (\text{Simplex aufgespannt von } s(u_0), \dots, s(u_q) \leq \tau_{f(x)})$$

Behauptung: Es existiert ein $l \in \mathbb{N}_0$, sodass für alle Ecken $u \in K^l$ genau eine Ecke $v \in L$ mit $f(\text{Stern}_{K^l}(u)) \subset \text{Stern}_L(v)$ existiert.

Beweis hierzu:

$\{\text{Stern}_L(v) \mid v \text{ Ecke in } L\}$ ist offene Überdeckung von $L \Rightarrow \{f^{-1}(\text{Stern}_L(v)) \mid v \text{ Ecke in } L\}$ ist offene Überdeckung von K .

Mit dem Überdeckungssatz existiert dann ein $\delta > 0$, sodass für alle $A \in |K|$ mit $\text{Durchmesser}(A) < \delta$ ein $i = 0, \dots, q$ existiert mit $A \subset f^{-1}(\text{Stern}_L(v_i))$. Nach Lemma 1(b) existiert nun ein $l \in \mathbb{N}_0$, sodass $\mu(K^l) \leq \left(\frac{\dim(K)}{\dim(K)+1}\right)^l \mu(K) \leq \frac{\delta}{2}$. Damit ist $\text{Durchmesser}(\text{Stern}_{K^l}(u)) < \delta$. \square

6.5 Der Brouwersche Fixpunktsatz

Satz 6.10 (Brouwerscher Fixpunktsatz)

Sei $f : D^n \rightarrow D^n$ stetig $\Rightarrow F$ hat mindestens einen FP.

Wir haben dies für $n = 2$ bereits bewiesen. Analog zu dem niedrigdimensionalen Fall folgt der Brouwersche Fixpunktsatz auch in beliebiger Dimension aus dem folgenden Lemma.

Betrachte $D^n \xrightarrow{r} S^{n-1} \xrightarrow{i} D^n$ und insbesondere $\underbrace{\pi_1(D^2)}_0 \rightarrow \underbrace{\pi_1(S^1)}_{\mathbb{Z}} \rightarrow \underbrace{\pi_1(D^2)}_0$. Jedoch gilt

für $n \geq 2$ auch $\pi_1(S^n) = 0$.

Lemma 6.11

Es existiert keine Retraktion $r : D^n \rightarrow \partial D^n = S^{n-1}$.

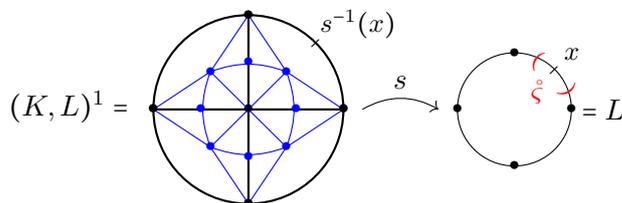
Beweis:

Sei $h : (|K|, |L|) \xrightarrow{\cong} (D^n, S^{n-1})$ eine Triangulierung (d.h. $L \subset K$ ist Unterkomplex).

Angenommen: Es existiert eine stetige Retraktion $r : D^n \rightarrow S^{n-1}$.

Dann ist $h^{-1} \circ r \circ h : |K| \rightarrow |L|$ auch eine Retraktion, die auf $|L| \subset |K|$ schon simplicial ist. Satz 8 gilt auch relativ, d.h. es existiert $l \in \mathbb{N}_0$ und eine simpliciale Approximation $s : |(K, L)^l| \rightarrow |L|$ mit $s|_{|L|} = (h^{-1} \circ r \circ h)|_{|L|} = \text{id}_{|L|}$.

Dabei ist $(K, L)^1$ wie folgt definiert:



- Ecken von $(K, L)^1$ sind die Ecken a_i von L und die Schwerpunkte $\hat{\zeta}^j$ von Simplexen $\zeta \in K$, die nicht ganz in L liegen.
- $a_1, \dots, a_r, \hat{\zeta}^1, \dots, \hat{\zeta}^q$ spannen einen Simplex in $(K, L)^1$ auf
 $\Leftrightarrow a_1, \dots, a_r$ spannen einen Simplex ζ in L auf und $\zeta < \zeta^0 < \dots < \zeta^q$ (nach Umnummerierung).

Sei $x :=$ Schwerpunkt eines $(n-1)$ -Simplexes ζ in L und betrachte dazu $s^{-1}(x) \in (K, L)^l$. Sei weiter τ ein n -Simplex von $(K, L)^l$ mit $\tau \cap s^{-1}(x) \neq \emptyset \Rightarrow s(\tau) \cap \overset{\circ}{\zeta} \neq \emptyset \Rightarrow \zeta \leq s(\tau) \stackrel{\dim(L)=n-1}{\Rightarrow} s(\tau) = \zeta$.

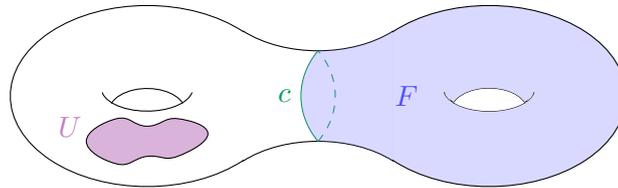
Setze $\tau = (a_0, \dots, a_n)$ und $\zeta = (b_0, \dots, b_{n-1})$ und dazu $s(a_i) = b_i$ für $i = 0, \dots, n-1$, $s(a_n) = b_{n-1}$

$$\begin{aligned} \Rightarrow x &= \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} b_i \text{ und } s\left(\sum_{i=0}^n \lambda_i a_i\right) = \sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i b_i + \lambda_n b_{n-1} \\ \Rightarrow \tau \cap s^{-1}(x) &= \left\{ \sum_{i=0}^n \lambda_i a_i \mid \lambda_0 = \dots = \lambda_{n-2} = \frac{1}{n}, \lambda_{n-1} + \lambda_n = \frac{1}{n} \right\} \\ \Rightarrow \tau \cap s^{-1}(x) &\text{ ist ein Geradensegment} \\ \Rightarrow s^{-1}(x) &\text{ ist 1-Mannigfaltigkeit mit } \partial(s^{-1}(x)) < \partial D^n \\ \Rightarrow \exists y \neq x \in |L| &= S^{n-1} \text{ mit } s(y) = s(x) \quad \checkmark \end{aligned}$$

□

7 Simpliciale Homologie

7.1 Definition der Homologiegruppen



Ziel: $c = \partial F \Rightarrow c = 0$ in Homologie

Definition

Die Ecken eines q -Simplexes $\zeta = (x_0, \dots, x_q)$ lassen sich auf $(q+1)!$ Arten anordnen. **Zwei Anordnungen heißen äquivalent** genau dann, wenn sie durch eine gerade Permutation hervorgehen.

Ein **orientiertes Simplex** ist ein Simplex mit einer fest gewählten Äquivalenzklasse solcher Anordnungen.

Notation: $\zeta = (x_0, \dots, x_q)$ meint in Zukunft immer ein orientiertes Simplex.

Definition

$-\zeta := \zeta$ mit umgekehrter Orientierung.

- Beispiele:

$$\begin{array}{ccc}
 \begin{array}{c} \bullet \xrightarrow{\quad} \bullet \\ x_0 \quad x_1 \\ (x_0, x_1) \end{array} & = & \begin{array}{c} \bullet \xleftarrow{\quad} \bullet \\ x_0 \quad x_1 \\ -(x_1, x_0) \end{array} \\
 & \text{und} & \\
 \begin{array}{c} \bullet \\ x_2 \\ \begin{array}{ccc} \bullet & & \bullet \\ x_0 & & x_1 \end{array} \\ \text{Clockwise arrow} \\ (x_0, x_1, x_2) \end{array} & = & \begin{array}{c} \bullet \\ x_2 \\ \begin{array}{ccc} \bullet & & \bullet \\ x_0 & & x_1 \end{array} \\ \text{Counter-clockwise arrow} \\ -(x_0, x_2, x_1) \end{array}
 \end{array}$$

Definition

Sei K ein Komplex (mit orientierten Simplexen). Die **Kettengruppen** $C_q(K)$ mit $q \in \mathbb{Z}$ sind definiert durch

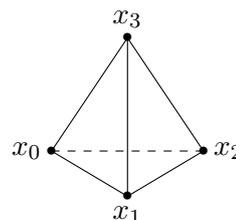
- (i) $C_q(K) = 0$ für $q < 0, q > \dim(K)$
- (ii) $C_0(K) =$ freie abelsche Gruppe erzeugt durch die Ecken in $K = \mathbb{Z}\#\{\text{Ecken}\}$
- (iii) $C_q(K) =$ freie abelsche Gruppe erzeugt von den orientierten q -Simplexen in K , modulo der Relation $\varsigma + (-\varsigma) = 0$, für $1 \leq q \leq \dim(K)$

Es heißt $c \in C_q(K)$ **q -Kette**.

• Beispiele:

Betrachte den Komplex $K = \cup\{\text{eigentliche Seiten eines 3-Simplex}\}$.

- $C_0(K) \cong \mathbb{Z}^4$ erzeugt von x_0, \dots, x_3
- $C_1(K) \cong \mathbb{Z}^6$ erzeugt von $(x_0, x_1), (x_1, x_2), (x_2, x_0), (x_0, x_3), (x_1, x_3), (x_2, x_3)$ (umgekehrt orientierte Seiten werden nicht mitgezählt)
- $C_2(K) \cong \mathbb{Z}^4$ erzeugt von $(x_0, x_1, x_3), (x_1, x_2, x_3), \dots$ (-|- Dreiecke werden nicht mitgezählt)



- Bemerkung: $\dim(C_q(K)) = \alpha_q = \#\{q\text{-Simplexe in } K\}$

Definition

Der **Rand** ist definiert durch

$$\partial_q: \begin{array}{c} C_q(K) \\ \varsigma = (x_0, \dots, x_q) \end{array} \rightarrow \begin{array}{c} C_{q-1}(K) \\ \partial_q \varsigma \end{array} \quad \text{mit} \quad \partial_q \varsigma := \begin{cases} 0 & , q = 0 \\ \sum_{i=0}^q (-1)^i (\dots, \widehat{x}_i, \dots) & , \text{sonst} \end{cases}$$

(und linearer Erweiterung)

• Beispiele:

(1) $\begin{array}{c} \bullet \xrightarrow{\quad} \bullet \\ x_0 \quad x_1 \end{array} \Rightarrow \partial(x_0, x_1) = x_1 - x_0$

(2) $\begin{array}{c} \bullet \\ x_2 \\ \begin{array}{ccc} \bullet & & \bullet \\ x_0 & & x_1 \end{array} \\ \text{Clockwise arrow} \end{array} \Rightarrow \partial(x_0, x_1, x_2) = (x_1, x_2) - (x_0, x_2) + (x_0, x_1)$

Lemma 7.1

Ein Rand hat keinen Rand, d.h. $\partial_{q-1} \circ \partial_q = 0$ (oder auch: $\partial^2 = 0$).

Beweis:

(Notation: $(\dots, \hat{x}_i, \dots) = (\dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots)$)

$$\begin{aligned} \partial^2(x_0, \dots, x_q) &= \partial \left(\sum_{i=0}^q (-1)^i (x_0, \dots, \hat{x}_i, \dots, x_q) \right) \\ &= \sum_{i=0}^q (-1)^i \left[\sum_{j=0}^{i-1} (-1)^j (\dots, \hat{x}_j, \dots, \hat{x}_i, \dots) - \sum_{j=i+1}^q (-1)^j (\dots, \hat{x}_i, \dots, \hat{x}_j, \dots) \right] \\ &= \sum_{j < i} (-1)^{i+j} (\dots, \hat{x}_j, \dots, \hat{x}_i, \dots) - \sum_{i < j} (-1)^{i+j} (\dots, \hat{x}_i, \dots, \hat{x}_j, \dots) \\ &= 0 \end{aligned}$$

□

Definition

Eine Folge C_q von abelschen Gruppen mit Homomorphismen $\partial_q : C_q \rightarrow C_{q-1}$ für die $\partial_{q-1} \circ \partial_q = 0$ gilt heißt **Kettenkomplex** (C_*, ∂_*) .

Es heißen $B_q(K) := \text{im}(\partial_{q+1})$ **q-Ränder** und $Z_q(K) := \ker(\partial_q)$ **q-Zyklen**.

- Bemerkung: $\partial^2 = 0 \Rightarrow B_q(K) < Z_q(K) \Rightarrow B_q(K) \triangleleft Z_q(K)$ ist Normalteiler.

Definition

Die **q-te Homologiegruppe** ist $H_q(K) = Z_q(K)/B_q(K)$.

Notation: $[z] \in H_q(K)$ sei die Äquivalenzklasse von $z \in Z_q(K)$.

- Bemerkung: Aus der Klassifikation endlicher abelscher Gruppen folgt $H_q(K) \cong F_q \oplus T_q$ mit $F_q \cong \mathbb{Z}^{b_q}$ ("Frei"), $T_q \cong \mathbb{Z}_{p_1} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}_{p_r}$ ("Torsion") und $b_q :=$ **q-te Betti-Zahl**.

- Beispiele:

Betrachte wieder

$$K = \cup \{\text{eigentliche Seiten eines 3-Simplex}\} = \begin{array}{c} x_3 \\ \diagup \quad \diagdown \\ x_0 \quad \text{---} \quad x_2 \\ \diagdown \quad \diagup \\ x_1 \end{array} \Rightarrow |K| \cong S^2$$

$$\text{und den Kettenkomplex } 0 \xrightarrow{\partial_3} \underbrace{C_2}_{\cong \mathbb{Z}^4} \xrightarrow{\partial_2} \underbrace{C_1}_{\cong \mathbb{Z}^6} \xrightarrow{\partial_1} \underbrace{C_0}_{\cong \mathbb{Z}^4} \rightarrow 0.$$

- $Z_0 = \ker(\partial_1) = C_0(K) \cong \mathbb{Z}^4$ erzeugt von x_0, \dots, x_3
 $B_0 \cong \mathbb{Z}^3$ erzeugt von $(x_1 - x_0), (x_2 - x_0), (x_3 - x_0)$

$H_0 = Z_0/B_0 \cong \mathbb{Z}$ erzeugt von $[x_0] = [x_1] = [x_2] = [x_3]$

- Elemente von $Z_1(K)$ sind endliche Summen von Elementen der Form $(x_i, x_j) + (x_j, x_k) + (x_k, x_l) + \dots + (x_m, x_i)$. In unserem Fall gilt sogar

$$\begin{aligned} (x_i, x_j) + (x_j, x_k) + (x_k, x_i) &= \partial(x_i, x_j, x_k) \\ \Rightarrow [(x_i, x_j) + (x_j, x_k) + (x_k, x_i)] &= 0 \in H_1(K) \\ \Rightarrow [(x_i, x_j) + (x_j, x_k)] &= [(x_i, x_k)] \in H_1(K) \end{aligned}$$

Damit sind folgende Umformungen möglich

$$\begin{aligned} [(x_i, x_j) + (x_j, x_k) + (x_k, x_l) + \dots + (x_m, x_i)] \\ = [(x_i, x_k) + (x_k, x_l) + \dots + (x_m, x_i)] \\ = \dots = 0 \in H_1(K) \\ \Rightarrow H_1(K) = 0 \end{aligned}$$

- $H_2 = \ker(\partial_2)/\text{im}(\partial_3) = \ker(\partial_2) \cong \mathbb{Z}$ erzeugt von $[(x_0, x_1, x_3) + (x_1, x_2, x_3) + (x_0, x_2, x_1) + (x_0, x_3, x_2)]$ (Seiten heben sich bei dieser Orientierung auf)

Satz 7.2 (Ziel)

Seien K, L Simplicialkomplexe mit $|K| \cong |L|$. Dann $H_q(K) \cong H_q(L)$ für alle $q \in \mathbb{Z}$.

Beweis:

In Kapitel 7.4 □

7.2 Erste Berechnungen

Satz 7.3

$H_0(K) \cong \mathbb{Z}^r$ mit $r = \#\{\text{Komponenten von } |K|\}$.

Beweis:

Es gilt immer $Z_0(K) = C_0(K) =$ (freie abelsche Gruppe erzeugt von den Ecken von K) und $B_0(K) =$ (freie abelsche Gruppe erzeugt von $v_i - v_j$, wobei $(v_i, v_j) \in K$).

- Seien v, w Ecken in der selben Komponente von $|K|$.
Dann existiert ein stetiger Weg $u : I \rightarrow |K|$ von v nach w . Nach Satz 6.8 gibt es zu diesem eine simpliciale Approximation $s : I \rightarrow |K|$ von u (solch ein s heißt **Kantenweg** von v nach w). Wir fassen s als Element $c \in C_1(K)$ auf $\Rightarrow \partial c = w - v \in B_0(K) \Rightarrow [w] = [v] \in H_0(K)$.
- Definiere den **augmentations Homomorphismus** ε durch

$$\begin{array}{ccc} C_1(K) & \xrightarrow{\partial_1} & C_0(K) & \xrightarrow{\varepsilon} & \mathbb{Z} \\ & & \sum \lambda_i v_i & \mapsto & \sum \lambda_i \end{array}$$

Es gilt $\varepsilon \circ \partial_1 = 0$, da $\text{im}(\partial_1) = B_0(K)$ erzeugt von $v_i - v_j$.

- Seien v, w Ecken in verschiedenen Komponenten von $|K|$.
Dann $\nexists c \in Z_1(K)$ mit $\partial c = w - v$.
⌈ Denn: Solch ein c könnten wir dann schreiben als $c = c_v + c_w + c_0$ mit
 - $c_v = 1$ -Kette in der Komponente von v

- $c_w = 1$ -Kette in der Komponente von w
- c_0 1-Kette in den anderen Komponenten

$\Rightarrow \partial c_0 = 0, \partial c_v = -v, \partial c_w = w$, aber $\varepsilon(\partial c) = -1 \neq 0$ $\not\Leftarrow$

Also $[v] \neq [w] \in H_0(K)$.

- $\varepsilon(\lambda v) = \lambda \Rightarrow \lambda v \notin B_0(K)$ für $\lambda \neq 0$. Also $\lambda[v] = 0 \Leftrightarrow \lambda = 0$ (d.h. es gibt keine Torsion)

□

Satz 7.4

$$H_q(CK) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & , \text{ falls } q = 0 \\ 0 & , \text{ sonst} \end{cases}.$$

$$\text{Insbesondere: } H_q(D^n) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & , \text{ falls } q = 0 \\ 0 & , \text{ sonst} \end{cases} \quad (\text{folgt aus Satz 7.2})$$

Beweis:

$|CK|$ zshgd $\stackrel{S7.3}{\implies} H_0(CK) \cong \mathbb{Z}$.

Sei $q > 0$ und x die Kegelspitze. Definiere

$$d: C_q(CK) \rightarrow C_{q+1}(CK), (x_0, \dots, x_q) \mapsto \begin{cases} (x, x_0, \dots, x_q) & , \text{ falls } (x_0, \dots, x_q) \in K \\ 0 & , \text{ sonst} \end{cases}$$

Behauptung: $\partial d\zeta + d\partial\zeta = \zeta$ für alle $\zeta \in CK$.

- $\zeta = (x_0, \dots, x_q) \in K$:

$$\partial d\zeta = \partial(x, x_0, \dots, x_q) = (x_0, \dots, x_q) + \sum_{i=0}^q (-1)^{i+1} (x, \dots, \widehat{x}_i, \dots)$$

$$d\partial\zeta = d\left(\sum_{i=0}^q (-1)^i (x_0, \dots, \widehat{x}_i, \dots)\right) = \sum_{i=0}^q (-1)^i (x, \dots, \widehat{x}_i, \dots)$$

$$\Rightarrow \partial d\zeta + d\partial\zeta = (x, x_0, \dots, x_q) = \zeta$$

- $\zeta = (x, x_1, \dots, x_q)$:

$$\partial d\zeta = 0$$

$$d\partial\zeta = d\left((x_1, \dots, x_q) + \sum_{i=1}^q (-1)^i (x, \dots, \widehat{x}_i, \dots)\right) = (x, x_1, \dots, x_q)$$

Für $z \in Z_q(CK)$ gilt

$$z = \partial dz + d\partial z = \partial dz \in B_q(CK)$$

$$\Rightarrow Z_q(CK) = B_q(CK)$$

$$\Rightarrow H_q(CK) = Z_q(CK)/B_q(CK) = 0$$

□

Satz 7.5

Sei $\Sigma^n := \{\text{eigentliche Seiten eines } (n+1)\text{-Simplexes}\}$. Dann ist

$$H_q(\Sigma^n) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & , \text{ f\"ur } q = 0, n \\ 0 & , \text{ sonst} \end{cases}$$

Beweis:

- H_q hängt nur von den q - und $(q+1)$ -Simplexen ab, sodass wir mit Satz 7.4

$$H_q(\Sigma^n) = H_q(\Delta^{n+1}) = H_q(C\Delta^n) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & , \text{ f\"ur } q = 0 \\ 0 & , \text{ sonst} \end{cases}$$

für alle $q \leq n-1$ erhalten.

- Σ^n hat keine $(n+1)$ -Simplexe, also $H_n(\Sigma^n) = Z_n(\Sigma^n)$.
Es besitzen Σ^n und Δ^{n+1} das gleiche **n-Skelett** (d.h. $\cup_{k \leq n} k$ -Simplexe), womit $Z_n(\Sigma^n) = Z_n(\Delta^{n+1})$ gilt. Aus $H_n(\Delta^{n+1}) = 0$ (Satz 7.4) folgt dann auch $Z_n(\Delta^{n+1}) = B_n(\Delta^{n+1}) = \partial C_{n+1}(\Delta^{n+1}) \cong \mathbb{Z}$ erzeugt von $\partial((n+1)\text{-Simplexe}) \Rightarrow H_n(\Sigma^n) \cong \mathbb{Z}$.

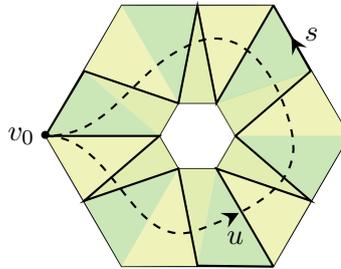
□

Satz 7.6

$|K|$ wegzshgd $\Rightarrow H_1(K) \cong \pi_1^{ab}(|K|)$.

Beweis:

Betrachte eine Ecke v_0 von K als Basispunkt. Sei $u : I \rightarrow |K|$ Schleife von v_0 . Mittels simplizialer Approximation erhalten wir eine Kantenschleife $s : I \rightarrow |K|$ mit $s \cong u$.

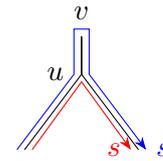
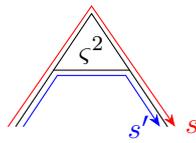


Sei $z(s) := (1\text{-Zykel definiert durch } s) = (v_0, v_1) + \dots + (v_{n-1}, v_0)$.

Wir definieren $\Phi : \pi_1(|K|, v_0) \rightarrow H_1(K)$, $[s] \mapsto z(s)$.

- (1) Φ wohldefiniert:

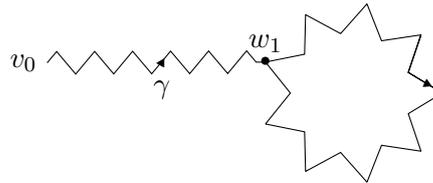
Seien s, s' homotope Kantenschleifen von v_0 . Dann gilt: $s \sim s' \Rightarrow s'$ entsteht aus s durch lineare Interpolation über Simplexe $\Rightarrow s$ und s' unterscheiden sich durch einen Rand.



$$z(s) - z(s') = \partial \zeta^2 \Rightarrow [z(s)] = [z(s')] \in H_1 \quad z(s') = z(s) + (u, v) + (v, u) = z(s)$$

(2) Φ surjektiv

$Z_1(K)$ wird erzeugt von 1-Zyklen der Form $z = (w_1, w_2) + \dots + (w_k, w_1)$. Sei γ Kantenweg von v_0 nach w_1 , dann $z(\gamma w_1 w_2 \dots w_k, w_1 \gamma^{-1}) = z$.



(3) $\ker(\Phi) = [\pi_1, \pi_1]$ (Kommutator Gruppe von π_1)

- $H_1(K)$ ist abelsch $\Rightarrow [\pi_1, \pi_1] \subset \ker(\Phi)$.
- Sei $[\alpha] \in \ker(\Phi)$, also $\alpha = v_0 v_1 \dots v_{n-1} v_0$ mit $z(\alpha) = \partial(\sum_{i=1}^k \lambda_i \zeta_i)$, wobei $\zeta_i = 2$ -Simplexe von K sind.
Setze $\zeta_i = (a_i, b_i, c_i)$ und wähle Kantenweg γ_i von v_0 nach a_i . Dann gilt $\gamma_i a_i b_i c_i \gamma_i^{-1} \simeq \gamma_i \gamma_i^{-1} \simeq v_0 \Rightarrow \gamma := \prod_{i=1}^k (\gamma_i a_i b_i c_i \gamma_i^{-1})^{\lambda_i} \simeq v_0 \Rightarrow [\alpha] = [\alpha \gamma^{-1}]$.
Andererseits gilt $z(\gamma_i a_i b_i c_i \gamma_i^{-1}) = \partial(a_i b_i c_i) \Rightarrow z(\alpha \gamma^{-1}) = 0$. Das heißt $\alpha \gamma^{-1}$ enthält jede Kante (a,b) mit gleicher Vielfachheit wie (b,a).
Also $[\alpha] = [\alpha \gamma^{-1}] = 0 \in \pi_1^{ab}(|K|, v_0)$.

□

• Beispiele:

Sei $|K| =$ geschlossene Fläche. Dann

- $H_0(K) \cong \mathbb{Z}$
- $H_1(K) \cong \begin{cases} 0 & , F \cong S^2 \\ \mathbb{Z}^{2g} & , F \cong \#_g T^2 \\ \mathbb{Z}^{k-1} \oplus \mathbb{Z}_2 & , F \cong \#_k \mathbb{R}P^2 \end{cases}$
- (siehe Übung) $H_2(K) \cong \begin{cases} 0 & , F \cong \#_k \mathbb{R}P^2 \\ \mathbb{Z} & , \text{sonst} \end{cases}$

7.3 Kettenabbildungen

Definition

Seien K, L Simpliziale Komplexe, dann heißt $\varphi : C(K) \rightarrow C(L)$ eine **Kettenabbildung**
 $\Leftrightarrow \varphi_q : C_q(K) \rightarrow C_q(L)$ ist Folge von Homomorphismen, sodass

$$\begin{array}{ccc}
 C_q(K) & \xrightarrow{\partial_q^{(K)}} & C_{q-1}(K) \\
 \varphi_q \downarrow & \circlearrowleft & \downarrow \varphi_{q-1} \\
 C_q(L) & \xrightarrow{\partial_q^{(L)}} & C_{q-1}(L)
 \end{array} \quad (\text{kurz: } \varphi \circ \partial = \partial \circ \varphi)$$

Lemma 7.7

Eine Kettenabbildung $\varphi : C(K) \rightarrow C(L)$ induziert einen Homomorphismus $\varphi_{q*} : H_q(K) \rightarrow H_q(L), [z] \mapsto [\varphi_q(z)]$.

Beweis:

Sei $z \in Z_q(K)$. Dann $\partial(\varphi_q(z)) = \varphi_{q-1}(\partial_q(z)) = 0 \Rightarrow \varphi_q(z) \in Z_q(L)$.

Sei $\partial x \in B_q(K)$. Dann $\varphi_q(\partial x) = \partial(\varphi_{q+1}(x)) \in B_q(L)$ □

- Bemerkung: Ist $\psi : C(L) \rightarrow C(M)$ eine weitere Kettenabbildung, so $(\psi \circ \varphi)_* = \psi_* \circ \varphi_*$ und $(id_{C(K)})_* = id_{H(K)}$.

Definition

Sei $s : |K| \rightarrow |L|$ eine simpliziale Approximation. Definiere $s_q : C_q(K) \rightarrow C_q(L)$ durch

$$s_q(\varsigma) = s_q(x_0, \dots, x_q) := \begin{cases} (s(x_0), \dots, s(x_q)) & , \text{ falls alle } s(x_i) \text{ verschieden} \\ 0 & , \text{ sonst} \end{cases}$$

(wohldefiniert wegen $s_q(-\varsigma) = -s_q(\varsigma)$)

Lemma 7.8

$(s_q) : C_q(K) \rightarrow C_q(L)$ ist eine Kettenabbildung.

Beweis:

- Fall: $s(x_0), \dots, s(x_q)$ sind alle verschieden
 $\Rightarrow \partial s_q(\varsigma) = s_{q-1}(\partial \varsigma)$
- Fall: $s(x_j) = s(x_k)$ für ein $j < k$
 $\Rightarrow \partial s_q(\varsigma) = 0$

Andererseits:

$$\begin{aligned}
 s_{q-1}(\partial\zeta) &= \sum_{i=0}^q (-1)^i s_{q-1}(\dots, \widehat{x}_i, \dots) \\
 &= (-1)^j s_{q-1}(\dots, \widehat{x}_j, \dots) + (-1)^k s_{q-1}(\dots, \widehat{x}_k, \dots) \\
 &= \begin{cases} 0 & , \text{ falls noch andere } s(x_l) \text{ gleich sind} \\ (-1)^j (\dots, \widehat{s(x_j)}, \dots) + (-1)^k (\dots, \widehat{s(x_k)}, \dots) \end{cases} \\
 &= \begin{cases} 0 & , -1 \quad - \\ ((-1)^j + (-1)^k (-1)^{j-k-1}) (\dots, \widehat{s(x_j)}, \dots) \end{cases} \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

□

Definition

Simpliziale Abbildungen $s, t : |K| \rightarrow |L|$ heißen **kettenhomotop** \Leftrightarrow Es existiert ein Homomorphismus $d_q : C_q(K) \rightarrow C_{q+1}(L)$, sodass $\partial_{q+1}^{(L)} d_q + d_{q-1} \partial_q^{(K)} = t_q - s_q$.

$$\begin{array}{ccccc}
 \dots & C_{q+1}(K) & \xrightarrow{\partial_{q+1}^{(K)}} & C_q(K) & \xrightarrow{\partial_q^{(K)}} & C_{q-1}(K) & \dots \\
 & \downarrow \begin{matrix} s \\ t \end{matrix} & \swarrow d_q & \downarrow \begin{matrix} s \\ t \end{matrix} & \swarrow d_{q-1} & \downarrow \begin{matrix} s \\ t \end{matrix} & \\
 \dots & C_{q+1}(L) & \xrightarrow{\partial_{q+1}^{(L)}} & C_q(L) & \xrightarrow{\partial_q^{(L)}} & C_{q-1}(L) & \dots
 \end{array}$$

Lemma 7.9

Sind $s, t : |K| \rightarrow |L|$ kettenhomotop, so $s_* = t_*$

Beweis:

Sei $z \in Z_q(K)$. Dann $t_q(z) - s_q(z) = \partial d_q(z) + d_{q-1} \partial(z) = \partial d_q(z) \in B_q(L) \Rightarrow [t_q(z)] = [s_q(z)] \in H_q(L)$. □

7.4 Topologische Invarianz der Homologie

Wir wollen zeigen, dass $f : |K| \rightarrow |L|$ stetig einen Homomorphismus $f_* : H_q(K) \rightarrow H_q(L)$ mit $(g \circ f)_* = g_* f_*$ und $id_* = id$ induziert. Dann folgt: Ein Homöomorphismus $f : |K| \rightarrow |L|$ induziert einen Isomorphismus $H_q(K) \rightarrow H_q(L)$. ($H_q(|K|) = H_q(K)$)

Definition

K heißt **azyklisch** $:\Leftrightarrow H_0(K) \cong \mathbb{Z}$ und $H_q(K) = 0$ für $q \neq 0$.

Eine Kettenabbildung $\varphi : C(K) \rightarrow C(L)$ heißt **augmentationserhaltend** $:\Leftrightarrow \varepsilon_K = \varepsilon_L \circ \varphi_0 : C_0(K) \rightarrow \mathbb{Z}$, d.h. $\varphi_0(\sum a_i \varsigma_i^0) = \sum b_i \tau_i^0 \Rightarrow \sum a_i = \sum b_i$.

Sei $c = \sum b_j \tau_j^q \in C_q(L)$ eine q -Kette und $L' \subset L$ Unterkomplex. L' heißt **Träger zu c** $:\Leftrightarrow$ für $b_j \neq 0$ ist $\tau_j^q \in L'$.

Lemma 7.10

Seien $\varphi, \psi : C(K) \rightarrow C(L)$ augmentationserhaltende Kettenabbildungen derart, dass für alle $\varsigma \in K$ ein Unterkomplex $L(\varsigma) < L$ existiert, sodass

- (i) $\varsigma' < \varsigma \Rightarrow L(\varsigma') < L(\varsigma)$
- (ii) $L(\varsigma)$ ist azyklisch
- (iii) $L(\varsigma^k)$ ist ein Träger von $\varphi_k(\varsigma^k)$ und $\psi_k(\varsigma^k)$

Dann sind φ, ψ kettenhomotop, also insbesondere $\varphi_* = \psi_*$.

Beweis:

Wir konstruieren $d_q : C_q(K) \rightarrow C_{q+1}(L)$, sodass für alle q -Simplexe $\varsigma^q \in K$ gilt: $L(\varsigma^q)$ ist Träger von $d_q(\varsigma^q)$.

Via Induktion nach q :

IA $q=0$: Sei v eine Ecke in K .

$L(v)$ ist Träger von $\varphi_0(v)$ und $\psi_0(v)$. φ_0, ψ_0 sind augmentationserhaltend $\Rightarrow (\varphi_0 - \psi_0)(v) = \sum b_j \tau_j^0$ mit $\sum b_j = 0$. Weiterhin ist $L(v)$ azyklisch, also existiert eine 1-Kette $d_0(v)$ mit Träger $L(v) < L$, sodass $(\varphi_0 - \psi_0)(v) = \partial(d_0(v))$.

IS Seien d_0, \dots, d_{q-1} bereits konstruiert.

Gesucht ist d_q derart, dass für alle $\varsigma^q \in K$ gilt: $\partial(d_q(\varsigma)) = (\varsigma_q - \psi_q - d_{q-1}\partial)(\varsigma)$ (*) und $L(\varsigma)$ ist Träger von $d_q(\varsigma)$.

$L(\varsigma)$ ist Träger der rechten Seite von (*) nach IV, (i) und (iii). Damit

$$\partial(\varsigma_q - \psi_q - d_{q-1}\partial)(\varsigma) \stackrel{IV}{=} (\partial\varsigma_q - \partial\psi_q - (\varsigma_{q-1} - \psi_{q-1} - d_{q-2}\partial)\partial)(\varsigma) = 0$$

$\stackrel{(ii)}{\Rightarrow}$ Es existiert eine Kette $d_q(\varsigma)$ mit Träger $L(\varsigma)$, so dass (*) erfüllt ist.

□

Satz 7.11

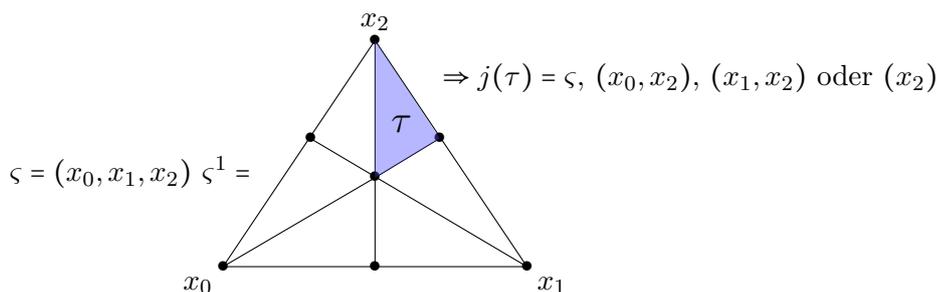
$$H_q(K^1) \cong H_q(K)$$

Beweis:

1. Schritt:

Definiere $j : |K^1| \rightarrow |K|$, $\hat{\varsigma} \mapsto$ Ecke von ς .

Dies ist eine simpliziale Approximation der Eins und j induziert eine Kettenabbildung $j_q : C_q(K^1) \rightarrow C_q(K)$. j und j_q sind nicht eindeutig, aber $j_* : H_q(K^1) \rightarrow H_q(K)$ ist unabhängig von der Wahl von j .



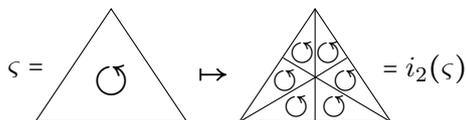
2. Schritt:

Definiere $i_q : C_q(K) \rightarrow C_q(K^1)$, $\varsigma \mapsto$ Summe der q -Simplexe in $\hat{\varsigma}$.

Formal:

- $i_0(x) = x$ für eine Ecke x von K
- $i_1(x_0, x_1) = (b, x_1) - (b, x_0)$, wobei b Baryzentrum ist, d.h. $i_1(\varsigma) = (\hat{\varsigma}, i_0 \partial \varsigma)$ für einen 1-Simplex ς
- $i_q(\varsigma) = (\hat{\varsigma}, i_{q-1} \partial \varsigma)$ für $q > 1$

Anschaulich:



i_q ist eine Kettenabbildung, denn:

$$\partial i_q(\varsigma) = \partial(\hat{\varsigma}, i_{q-1} \partial \varsigma) = i_{q-1} \partial \varsigma - (\hat{\varsigma}, \partial i_{q-1} \partial \varsigma)$$

Ist i_{q-1} Kettenabbildung, dann $(\hat{\varsigma}, \partial i_{q-1} \partial \varsigma) = (\hat{\varsigma}, i_{q-2} \partial^2 \varsigma) = 0$, womit i_q eine Kettenabbildung ist. Also induktiv: i_0 ist Kettenabbildung $\Rightarrow i_q$ Kettenabbildung für alle q .

3. Schritt:

$j_q i_q = id_{C_q(K)}$, da jedes Simplex auf sich selbst abbildet. (Nur für bestimmte j ?) $i_q j_q$ ist Kettenhomotop zu $id_{C_q(K^1)}$ (Übung)

$$\xrightarrow{7.9} j_* i_* = id_{H_q(K)} \text{ und } i_* j_* = id_{H_q(K^1)} \Rightarrow i_*, j_* \text{ sind Isomorphismen.}$$

□

Lemma 7.12

Seien $s, t : |K| \rightarrow |L|$ simpliziale Approximationen von $f : |K| \rightarrow |L|$, dann gilt: $s_* = t_*$.

Beweis:

Sei $\varsigma \in K$ und $x \in \hat{\varsigma}$ mit $s(x), t(x) \in \tau_{f(x)}$, dann $s(\varsigma), t(\varsigma) \in \tau_{f(x)}$. Sei $L(\varsigma) :=$ kleinstes Simplex mit $s(\varsigma), t(\varsigma) \in L(\varsigma)$, dann folgt mit Lemma 7.10 die Behauptung. □

Analog zur Konstruktion im 2. Schritt von Satz 7.11 erhält man eine Kettenabbildung $i_q^{(m)} : C_q(K) \rightarrow C_q(K^m)$.

Bemerke:

$s : |K| \rightarrow |L|$ simpliziale Approximation von $f : |K| \rightarrow |L|$ und

$t : |L| \rightarrow |M|$ simpliziale Approximation von $g : |L| \rightarrow |M|$
 $\Rightarrow t \circ s : |K| \rightarrow |M|$ simpliziale Approximation von $g \circ f : |K| \rightarrow |M|$

Lemma 7.13

Sind $s : |K^m| \rightarrow |L|$ und $t : |K^n| \rightarrow |L|$ simpliziale Approx. von $f : |K| \rightarrow |L| \Rightarrow s_* i_*^{(m)} = t_* i_*^{(n)}$.

Beweis:

Für $m = n$: Lemma 7.12.

Sei $l := m - n > 0$ und ersetze K^n durch K .

Wir iterieren die Konstruktion im Beweis von Satz 7.11 und erhalten die simpliziale Approximation $j^{(l)} : |K^l| \rightarrow |K|$ von id und $i_*^{(l)}, j_*^{(l)}$ sind invers zueinander.

$\Rightarrow s, t \circ j^{(l)} : |K^l| \rightarrow |L|$ sind simpliziale Approximationen von f

$\Rightarrow s_* = t_* j_*^{(l)}$

$\Rightarrow s_* i_*^{(l)} = t_* j_*^{(l)} i_*^{(l)} = t_*$ □

Folgendes ist somit wohldefiniert:

Definition

Sei $f : |K| \rightarrow |L|$ stetig. Wir definieren $f_* : H_q(K) \rightarrow H_q(L)$, $f_* = s_* i_*^{(l)}$, wobei $s : |K^l| \rightarrow |L|$ simpliziale Approximation von f ist.

Es gilt $(id_{|K|})_* = id_{H_q(K)}$.

Lemma 7.14

Sind $|K| \xrightarrow{f} |L| \xrightarrow{g} |M|$ stetig, dann gilt $(g \circ f)_* = g_* \circ f_*$.

Beweis:

Seien $t : |L^l| \rightarrow |M|$ und $s : |K^k| \rightarrow |L^l|$ simpliziale Approx von g und f . Dann

$$\begin{array}{ccccc}
 H_q(K) & \xrightarrow{f_*} & H_q(L) & & \\
 \downarrow i_*^{(k)} & & \downarrow i_*^{(l)} & \nearrow g_* & \\
 & & H_q(M) & & \\
 & & \uparrow j_*^{(l)} & \nwarrow & \\
 H_q(K^k) & \xrightarrow{s_*} & H_q(L^l) & \nearrow t_* &
 \end{array}$$

Also ist $t \circ s$ simpliziale Approximation von $g \circ f$ und $j^{(l)} \circ s$ eine von f

$\Rightarrow (g \circ f)_* = (t \circ s)_* i_*^{(k)} = t_* s_* i_*^{(k)} = \underbrace{t_* i_*^{(l)}}_{g_*} \underbrace{j_*^{(l)} s_* i_*^{(k)}}_{f_*} = g_* f_*$ □

Satz 7.15

Sind K, L Komplexe mit $|K| \cong |L| \Rightarrow H_q(K) \cong H_q(L)$ für alle q .

Beweis:

(wie in Korollar 4.7)

Sei $f : |K| \xrightarrow{\cong} |L|$, dann $(f^{-1})_* f_* \stackrel{7.14}{=} (f^{-1} f)_* = id_* = id$. Analog: $f_* f_*^{-1} = id$. \square

Wir definieren für einen Polyeder $|K|$ die Homologiegruppen als $H_q(|K|) = H_q(K)$, z. B.

$$H_q(S^n) \stackrel{7.5}{\cong} \begin{cases} \mathbb{Z} & q = 0, n \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}, H_q(D^n) \stackrel{7.4}{\cong} \begin{cases} \mathbb{Z} & q = 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}.$$

Alternativer Beweis von Lemma 6.11:

Angenommen es existiert eine Retraktion $r : D^n \rightarrow S^{n-1}$. Sei $i : S^{n-1} \rightarrow D^n$ die Inklusion.

$$\mathbb{Z} \cong H_{n-1}(S^{n-1}) \xrightarrow{i_*} H_{n-1}(D^n) \xrightarrow[r_*]{\cong 0} H_{n-1}(S^{n-1}) \cong \mathbb{Z}$$

$$\text{Topologie} \Rightarrow r_* i_* = (r \circ i)_* = id_* = id$$

$$\text{Algebra} \Rightarrow r_* i_* = 0$$

Satz 7.16

Seien $f, g : |K| \rightarrow |L|$ stetig. Dann gilt $f \simeq g \Rightarrow f_* = g_* : H_q(|K|) \rightarrow H_q(|L|)$

Beweis:

Sei

- $F : |K| \times I \rightarrow |L|$ Homotopie von f nach g
- $i_0 : |K| \rightarrow |K| \times \{0\}$ Inklusion
- $i_1 : |K| \rightarrow |K| \times \{1\}$ Inklusion

$$\Rightarrow f = F \circ i_0 \text{ und } g = F \circ i_1.$$

Trianguliere $|K| \times I$, sodass $|K| \times \{0\}$ und $|K| \times \{1\}$ die gleiche simpliziale Struktur haben und $\zeta \times I$ für alle $\zeta \in K$ ein Unterkomplex ist. Setze $L(\zeta) = \zeta \times I$. $L(\zeta)$ ist azyklisch, denn $|\zeta \times I| \cong D^{q+1}$. Damit erfüllen $(i_0)_q, (i_1)_q : C_q(K) \rightarrow C_q(K \times I)$ alle Voraussetzungen von Lemma 10 $\Rightarrow f_* = (F \circ i_0)_* = F_* \circ i_{0*} = F_* \circ i_{1*} = (F \circ i_1)_* = g_*$ \square

Korollar 7.17

$|K| \simeq |L| \Rightarrow H_q(|K|) \cong H_q(|L|)$ für alle $q \in \mathbb{Z}$.

Satz 7.18

- (1) $S^n \simeq S^m \Leftrightarrow m = n$
- (2) $\mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^m \Leftrightarrow m = n$
- (3) Der Rand ∂M einer n -Mannigfaltigkeit M ist wohldefiniert

Beweis:

$$(1) H_q(S^n) = \begin{cases} \mathbb{Z} & q = 0, n \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \text{ für } n \geq 1$$

$$H_q(S^0) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}^2 & q = 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$(2) h: \mathbb{R}^n \xrightarrow{\cong} \mathbb{R}^m \Rightarrow S^{n-1} \simeq \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \cong \mathbb{R}^m \setminus \{h(0)\} \simeq S^{m-1} \stackrel{(1)}{\Rightarrow} m = n$$

(3) wie in Kapitel 5

□

7.5 Die Mayer-Vietoris-Sequenz

Definition

Eine Folge von Gruppen und Homom.

$$\dots \rightarrow G_i \xrightarrow{\varphi_i} G_{i+1} \xrightarrow{\varphi_{i+1}} G_{i+2} \rightarrow \dots$$

heißt **exakte Sequenz** : $\Leftrightarrow im(\varphi_i) = ker(\varphi_{i+1})$ für alle i .

Eine exakte Sequenz der Form

$$0 \rightarrow A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C \rightarrow 0$$

heißt **kurze Sequenz**. Insbesondere gilt α injektiv, β surjektiv und $im(\alpha) = ker(\beta)$.

• Beispiele:

- $0 \rightarrow G \xrightarrow{f} H \rightarrow 0$ ist genau dann exakt, wenn f ein Isomorphismus ist.
- $0 \rightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{p} (p)\mathbb{Z} \xrightarrow{mod(p)} \mathbb{Z}_p \rightarrow 0$ ist exakt.

Satz 7.19

Eine kurze exakte Sequenz von Kettenkomplexen

$$0 \rightarrow C(K) \xrightarrow{i} C(L) \xrightarrow{j} C(M) \rightarrow 0$$

induziert eine lange exakte Sequenz

$$\dots \rightarrow H_q(K) \xrightarrow{i_*} H_q(L) \xrightarrow{j_*} H_q(M) \xrightarrow{\Delta} H_{q-1}(K) \rightarrow \dots$$

Beweis:

- Definiere $\Delta: H_q(M) \rightarrow H_{q-1}(K)$ durch **Diagrammjagd**.

$$\begin{array}{ccccccc}
& \vdots & & \vdots & & \vdots & \\
& \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\
0 \rightarrow & C_q(K) & \xrightarrow{i} & C_q(L) & \xrightarrow{j} & C_q(M) & \rightarrow 0 \\
& \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\
& \circlearrowleft & & \circlearrowleft & & \circlearrowleft & \\
& z \xrightarrow{\quad} & \partial y & \xrightarrow{\quad} & \partial y & \xrightarrow{\quad} & 0 \\
0 \rightarrow & C_{q-1}(K) & \xrightarrow{i} & C_{q-1}(L) & \xrightarrow{j} & C_{q-1}(M) & \rightarrow 0 \\
& \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\
& \vdots & & \vdots & & \vdots &
\end{array}$$

Sei $[x] \in H_q(M)$ gegeben, d.h. $x \in C_q(M)$ mit $\partial x = 0$. Wegen der Surjektivität von j existiert $y \in C_q(L)$ mit $j(y) = x$. Dann folgt $j(\partial y) \stackrel{\circlearrowleft}{=} \partial j(y) = \partial x = 0 \Rightarrow \partial y \in \ker(j) = \text{im}(i)$. Also $\exists z \in C_{q-1}(K)$ mit $i(z) = \partial y$. Es gilt $\partial z = 0$, denn $i(\partial z) \stackrel{\circlearrowleft}{=} \partial i(z) = \partial^2 y = 0$ und i injektiv.

Definiere damit $\Delta : H_q(M) \rightarrow H_{q-1}(K)$, $[x] \mapsto [z]$.

- Wohldefiniertheit:

$$\begin{array}{ccccccc}
& \vdots & & \vdots & & \vdots & \\
& \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\
0 \rightarrow & C_{q+1}(K) & \xrightarrow{i} & C_{q+1}(L) & \xrightarrow{j} & C_{q+1}(M) & \rightarrow 0 \\
& \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\
& \circlearrowleft & & \circlearrowleft & & \circlearrowleft & \\
& v \xrightarrow{\quad} & w & \xrightarrow{\quad} & w & \xrightarrow{\quad} & \\
0 \rightarrow & C_q(K) & \xrightarrow{i} & C_q(L) & \xrightarrow{j} & C_q(M) & \rightarrow 0 \\
& \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\
& \circlearrowleft & & \circlearrowleft & & \circlearrowleft & \\
& u \xrightarrow{\quad} & y - y' & \xrightarrow{\quad} & y - y' - \partial v & \xrightarrow{\quad} & \\
& z - z' \xrightarrow{\quad} & \partial y - \partial y' & \xrightarrow{\quad} & \partial y - \partial y' & \xrightarrow{\quad} & \\
0 \rightarrow & C_{q-1}(K) & \xrightarrow{i} & C_{q-1}(L) & \xrightarrow{j} & C_{q-1}(M) & \rightarrow 0 \\
& \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\
& \vdots & & \vdots & & \vdots &
\end{array}$$

Sei $[x] = [x'] \in H_q(M)$, also $x - x' \in B_q(M) \Rightarrow x - x' = \partial w$ für $w \in C_{q+1}(M)$

$\xrightarrow{j \text{ surj.}} \exists v \in C_{q+1}(L)$ mit $j(v) = w$

$\stackrel{\circlearrowleft}{\Rightarrow} j(\partial v) = \partial j(v) = \partial w = x - x' = j(y - y')$ für $y, y' \in C_q(L)$

$\Rightarrow j(y - y' - \partial v) = 0$

$\Rightarrow y - y' - \partial v \in \ker(j) = \text{im}(i)$

$\Rightarrow \exists u \in C_q(K)$ mit $i(u) = y - y' - \partial v$

$\stackrel{\circlearrowleft}{\Rightarrow} i(\partial u) = \partial i(u) = \partial y - \partial y' = \partial y - \partial y' - \partial v$ [da $\partial y - \partial y' \in \ker(j) = \text{im}(i)$]

$\Rightarrow z - z' = \partial u$

$\Rightarrow [z] = [z'] \in H_{q-1}(K)$

- Exaktheit der langen Sequenz:

- $\text{im}(i_*) \subset \ker(j_*) : j_* i_* = 0 \Rightarrow j_* i_* = 0$

- $\text{im}(i_*) \supset \ker(j_*) :$

Sei $[a] \in \ker(j_*)$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \partial a = 0 \text{ und } \exists b \in C_{q+1}(M) \text{ mit } j(a) = \partial b & \quad | \ j \text{ surj.} \\ \Rightarrow \exists c \in C_{q+1}(L) \text{ mit } j(c) = b & \\ \Rightarrow j(a) = \partial b = \partial j(c) = j(\partial c) & \\ \Rightarrow j(a - \partial c) = 0 & \quad | \ im(i) = \ker(j) \\ \Rightarrow \exists d \in C_q(K) \text{ mit } i(d) = a - \partial c & \quad | \ i \text{ inj.} \\ \Rightarrow \partial d = 0 & \\ \Rightarrow [d] \in H_q(K) \text{ und } i_*[d] = [i(d)] = [a - \partial c] = [a] & \end{aligned}$$

■ noch zu zeigen: $im(i_*) = \ker(\Delta)$ und $im(\Delta) = \ker(i_*)$ (Übung)

□

Korollar 7.20 (Mayer-Vietoris)

Sei K ein Komplex mit Unterkomplexen L und M , sodass $K = L \cup M$. Wir schreiben die Inklusion als

$$\begin{array}{ccc} L \cap M & \xrightarrow{i_L} & L \\ i_M \downarrow & & \downarrow j_L \\ M & \xrightarrow{j_M} & L \cup M = K \end{array}$$

Dann gibt es eine LES (lange exakte Sequenz)

$$\dots \rightarrow H_q(L \cap M) \xrightarrow{\alpha_*} H_q(L) \oplus H_q(M) \xrightarrow{\beta_*} H_q(K) \xrightarrow{\Delta} H_{q-1}(L \cap M) \rightarrow \dots$$

wobei $\alpha_*[z] = (i_{L*}[z], i_{M*}[z])$ und $\beta_*([y_L], [y_M]) = j_{L*}[y_L] - j_{M*}[y_M]$

Beweis:

$H_q(L) \oplus H_q(M)$ ist die Homologie des Kettenkomplexes $(C_q(L) \oplus C_q(M), \partial_q^L \oplus \partial_q^M)$. Wir erhalten eine KES von Kettenkomplexen

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & C_q(L \cap M) & \rightarrow & C_q(L) \oplus C_q(M) & \rightarrow & C_q(K) & \rightarrow & 0 \\ & & z & \mapsto & (i_L(z), i_M(z)) & & & & \\ & & & & (y_L, y_M) & \mapsto & j_L(y_L) - j_M(y_M) & & \end{array}$$

Die Behauptung folgt nun mit Satz 7.19. □

- Bemerkung: 7.20 ist ein Satz über Polyeder, d.h. üblicherweise unabhängig von den Triangulierungen.

• Beispiele:

$$(1) \text{ Behauptung: } H_q(S^n) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{für } q = 0, n \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Beweis (per Induktion nach n):

Setze $A = S^n \setminus \{N\} \simeq \{pkt\}$, $B = S^n \setminus \{S\} \simeq \{pkt\}$ mit $A \cap B \simeq S^{n-1}$.

IA: Sei $n=1$, dann $H_0(S^1) \cong \mathbb{Z}$ und $H_1(S^1) \stackrel{7.6}{\cong} \pi_1^{ab}(S^1) \cong \mathbb{Z}$.

IS: Sei $n \geq 2$.

Mit Mayer-Vietoris erhalten wir

$$H_q(A) \oplus H_q(B) \rightarrow H_q(S^n) \rightarrow H_{q-1}(A \cap B) \rightarrow H_{q-1}(A) \oplus H_{q-1}(B) \rightarrow \dots$$

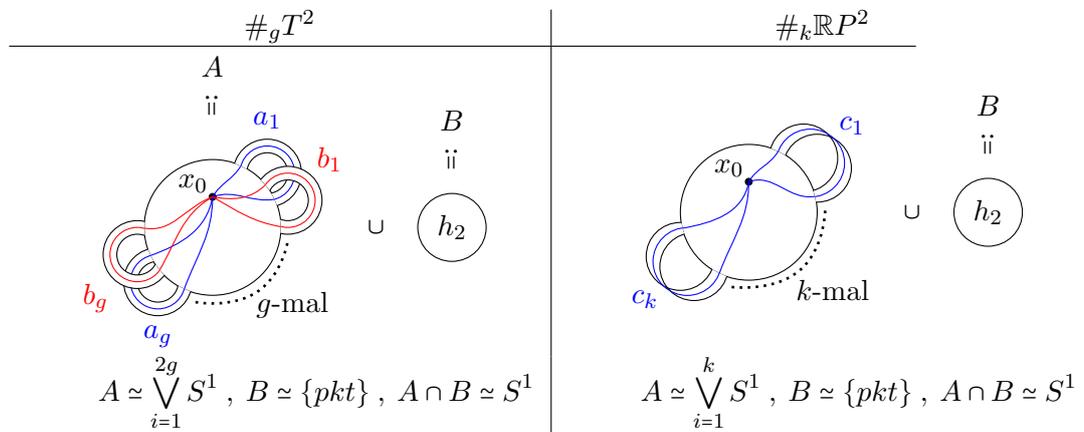
Für $q \geq 2$:

$$0 \rightarrow H_q(S^n) \xrightarrow{\cong} H_{q-1}(S^{n-1}) \rightarrow 0 \Rightarrow H_q(S^n) \cong 0$$

Für $q = 1$:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & H_1(S^n) & \rightarrow & H_0(S^{n-1}) & \rightarrow & H_0(\text{pkt}) \oplus H_0(\text{pkt}) \\ & & & & \mathbb{Z} & & \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \\ & & & & 1 & \mapsto & (1, 1) \\ & & 0 & \rightarrow & 0 & & \end{array}$$

(2) Betrachte die Flächen $\#_g T^2$ und $\#_k \mathbb{R}P^2$ mit ihren Standard-Henkelzerlegungen.



Mit Mayer-Vietoris erhalten wir für $L = \bigvee_{i=1}^{n-1} S^1$, $M = S^1$:

$$\begin{array}{cccccccccccc}
 H_1(pkt) & \rightarrow & H_1\left(\bigvee_{i=1}^{n-1} S^1\right) & \oplus & H_1(S^1) & \rightarrow & H_1\left(\bigvee_{i=1}^n S^1\right) & \rightarrow & H_0(pkt) & \rightarrow & H_0\left(\bigvee_{i=1}^{n-1} S^1\right) & \oplus & H_0(S^1) & \rightarrow & H_0\left(\bigvee_{i=1}^n S^1\right) & \rightarrow & 0 \\
 0 & \rightarrow & ? & \oplus & \mathbb{Z} & \rightarrow & ? & \rightarrow & \mathbb{Z} & \rightarrow & \mathbb{Z} & \oplus & \mathbb{Z} & \rightarrow & \mathbb{Z} & \rightarrow & 0 \\
 \Rightarrow & H_1\left(\bigvee_{i=1}^{n-1} S^1\right) \oplus \mathbb{Z} \cong & H_1\left(\bigvee_{i=1}^n S^1\right) \\
 \Rightarrow & H_1\left(\bigvee_{i=1}^n S^1\right) \cong & \mathbb{Z}^n
 \end{array}$$

Für $\#_g T^2$:

$$\begin{array}{cccccccccccccccccccc}
 0 & \xrightarrow{\beta_2} & H_2(\#_g T^2) & \xrightarrow{\Delta_2} & H_1(S^1) & \xrightarrow{\alpha_1} & H_1\left(\bigvee_{i=1}^{2g} S^1\right) & \oplus & H_1(pkt) & \xrightarrow{\beta_1} & H_1(\#_g T^2) & \xrightarrow{\Delta_1} & H_0(S^1) & \xrightarrow{\alpha_0} & H_0\left(\bigvee_{i=1}^{2g} S^1\right) & \oplus & H_0(pkt) & \xrightarrow{\beta_0} & H_0(\#_g T^2) & \rightarrow & 0 \\
 0 & \rightarrow & H_2(\#_g T^2) & \rightarrow & \mathbb{Z} & \rightarrow & \mathbb{Z}^{2g} & & & \rightarrow & H_1(\#_g T^2) & \rightarrow & \mathbb{Z} & \rightarrow & \mathbb{Z} & \oplus & \mathbb{Z} & \rightarrow & H_0(\#_g T^2) & \rightarrow & 0 \\
 & & & & \mathbb{Z} & \mapsto & ((a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} \dots) & , & 0) & & & & 1 & \mapsto & (1, 1) \\
 & & & & 1 & \mapsto & (0 & , & 0)
 \end{array}$$

Mit Isomorphiesatz:

$$\begin{aligned}
 H_0(\#_g T^2) &= \ker(\Delta_0) = \text{im}(\beta_0) \cong (\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}) / \ker(\beta_0) = (\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}) / \text{im}(\alpha_0) = (\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}) / \langle (1, 1) \rangle \cong \mathbb{Z} \\
 H_1(\#_g T^2) / \ker(\Delta_1) &\cong \text{im}(\Delta_1) = \ker(\alpha_0) = 0 \text{ und } \ker(\Delta_1) = \text{im}(\beta_1) \cong (\mathbb{Z}^{2g}) / \ker(\beta_1) = (\mathbb{Z}^{2g}) / \text{im}(\alpha_1) = \mathbb{Z}^{2g} \Rightarrow H_1(\#_g T^2) \cong \mathbb{Z}^{2g} \\
 H_2(\#_g T^2) &= H_2(\#_g T^2) / \text{im}(\beta_2) = H_2(\#_g T^2) / \ker(\Delta_2) \cong \text{im}(\Delta_2) = \ker(\alpha_1) = \mathbb{Z}
 \end{aligned}$$

Für $\#_k \mathbb{R}P^2$:

$$\begin{array}{cccccccccccc}
 0 & \rightarrow & H_2(\#_k \mathbb{R}P^2) & \xrightarrow{\Delta} & H_1(S^1) & \xrightarrow{\alpha} & H_1\left(\bigvee_{i=1}^k S^1\right) & \oplus & H_1(pkt) & \xrightarrow{\beta} & H_1(\#_k \mathbb{R}P^2) & \rightarrow & 0 \\
 0 & \rightarrow & H_2(\#_k \mathbb{R}P^2) & \rightarrow & \mathbb{Z} & \rightarrow & \mathbb{Z}^k & & & \rightarrow & H_1(\#_k \mathbb{R}P^2) & \rightarrow & 0 \\
 & & & & \mathbb{Z} & \mapsto & 2c_1 + \dots + 2c_k \\
 & & & & 1 & \mapsto & (2, \dots, 2)
 \end{array}$$

Mit Isomorphiesatz:

$$\begin{aligned}
 H_1(\#_k \mathbb{R}P^2) &= \text{im}(\beta) \cong (\mathbb{Z}^k) / \ker(\beta) = (\mathbb{Z}^k) / \text{im}(\alpha) = (\mathbb{Z}^k) / \langle (2, \dots, 2) \rangle \cong \mathbb{Z}^{k-1} \oplus \mathbb{Z}_2 \\
 H_2(\#_k \mathbb{R}P^2) / \ker(\Delta) &\cong \text{im}(\Delta) = \ker(\alpha) = 0 \text{ und } \ker(\Delta) = \text{im}(0) = 0 \Rightarrow H_2(\#_k \mathbb{R}P^2) \cong 0
 \end{aligned}$$

8 Anwendungen

8.1 Der Abbildungsgrad

Seien M^n, N^n geschlossene, orientierbare und triangulierbare n -Mannigfaltigkeiten und $f: M \rightarrow N$ stetig.

Wir sahen bereits auf *Blatt 10 Aufgabe 2*:

Eine Orientierung von M liefert einen Erzeuger von $H_n(M) \cong \mathbb{Z}$ ($K[M] \mapsto K$), genannt die **Fundamentalklasse** $[M] = [\sum \zeta_i^{(n)}]$.

$$\begin{aligned} \Rightarrow f_* : H_n(M) &\rightarrow H_n(N) \\ k[M] &\rightarrow \lambda k[N] \\ \mathbb{Z} &\rightarrow \mathbb{Z} \\ k &\mapsto \lambda k \end{aligned}$$

Definition

Der **Abbildungsgrad** von f ist $\deg(f) = \lambda$.

Eigenschaften:

- (1) $f \simeq g \Rightarrow f_* = g_* \Rightarrow \deg(f) = \deg(g)$
Beispiel: $S^1 \ni Z \mapsto Z^k \in S^1$, dann $\deg(f) = k$
- (2) $(g \circ f)_* = g_* \circ f_* \Rightarrow \deg(g \circ f) = \deg(g) \cdot \deg(f)$
- (3) $f: M \xrightarrow{\cong} N \Rightarrow f_*$ Isomorphismus $\Rightarrow \deg(f) = \pm 1$
Insbesondere $\deg(\text{Id}) = \pm 1$.
- (4) $\deg(\text{konst. Abb.}) = 0$ falls $n \geq 1 \Rightarrow \text{id} \neq \text{konst. Abb.}$

Satz 8.1

Sei $f: S^n \rightarrow S^n, x \mapsto -x$ die Antipodenabbildung. Dann $\deg(f) = (-1)^{n+1}$

Beweis:

Wir wählen eine Triangulierung von S^n durch $V_{\pm i} := (0, \dots, \overbrace{\pm 1}^{\text{i-te Stelle}}, \dots, 0)$ und $\Sigma :=$ Komplex bestehend aus den Simplexen $(V_{i_1}, \dots, V_{i_q})$ mit $|i_1| < \dots < |i_q|$. Dann $|\Sigma| \cong S^n$.

Wir orientieren (V_1, \dots, V_{n+1}) und alle anderen Simplexe kompatibel. Dann $[S^n] = [\Sigma] = \sum \zeta_i^{(n)}$. Es ist $f: |\Sigma| \rightarrow |\Sigma|$ simplizial mit $f(V_i) = V_{-i}$.

Es gilt

- $(V_1, V_2, \dots, V_{n+1})$ und $-(V_{-1}, V_2, \dots, V_{n+1})$ sind kompatibel
- $(V_1, V_2, \dots, V_{n+1})$ und $(-1)^{n+1}(V_{-1}, V_{-2}, \dots, V_{-(n+1)})$ sind kompatibel
- $f(V_1, V_2, \dots, V_{n+1}) = (V_{-1}, V_{-2}, \dots, V_{-(n+1)}) = (-1)^{n+1}(V_1, V_2, \dots, V_{n+1}) \Rightarrow \deg(f) = (-1)^{n+1}$

□

Korollar 8.2
 $id_{S^n} \simeq -id_{S^n} \Leftrightarrow n \in 2\mathbb{Z} + 1.$
Beweis:

Sei $n \in 2\mathbb{Z}$, so $deg(-id_{S^n}) = -1 \neq 1 = deg(id_{S^n})$.

Sei $n \in 2\mathbb{Z} + 1$. Mit $n = 2m - 1$, $m \in \mathbb{Z}$ ist $S^n = S^{2m-1} \subset \mathbb{C}^m$, also $id_{S^{2m-1}} \simeq_F -id_{S^{2m-1}}$ vermöge $F(z, t) := e^{\pi i t} \cdot z$. □

Korollar 8.3

Sei $f : S^n \rightarrow S^n$ stetig.

- (a) \nexists Fixpunkt von $f \Rightarrow deg(f) = (-1)^{n+1}$
- (b) $n \in 2\mathbb{Z} \Rightarrow \exists x \in S^n$ mit $f(x) = \pm x$
- (c) $n \in 2\mathbb{Z}$ und $f \simeq id_{S^n} \Rightarrow f$ hat einen Fixpunkt

Beweis:

(a) $f \simeq_F -id_{S^n}$ vermöge $F(x, t) := \frac{(1-t)f(x)-tx}{|(1-t)f(x)-tx|}$.

(b) Angenommen $f(x) \neq \pm x$ für alle $x \in S^n$. Unter anderem existiert damit kein Fixpunkt, sodass wir $f \simeq -id_{S^n}$ wie im Beweis von (a) erhalten. Andererseits: $f \simeq_G id_{S^n}$ mittels $G(x, t) := \frac{(1-t)f(x)+tx}{|(1-t)f(x)+tx|}$. Insgesamt: $-1 = deg(-id) = deg(f) = deg(id) = 1$. ζ

(c) Angenommen f hat keinen Fixpunkt, also $f(x) \neq x$ für alle $x \in S^n$. Mit (a) folgt dann $deg(f) = (-1)^{n+1} = (-1)^{2z+1} = -1$ und wie im Beweis zu (b): $f \simeq_G id_{S^n} \Rightarrow deg(f) = 1$. ζ

□

Ein stetiges **Vektorfeld** auf S^n ist eine stetige Abbildung $X : S^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ so dass $X(x)$ senkrecht auf x steht.

Korollar 8.4 (Satz vom Igel)

Es existiert ein Vektorfeld ohne Nullstelle auf $S^n \Leftrightarrow n \in 2\mathbb{Z} + 1$.

Beweis:

\Leftarrow : Sei $n = 2m - 1$ für $m \in \mathbb{Z}$, dann $S^n = S^{2m-1} \subset \mathbb{C}^m$. Mit $X(z_1, \dots, z_m) := i \cdot (z_1, \dots, z_m)$ folgt die Behauptung.

\Rightarrow : Sei X ein Vektorfeld auf S^n ohne Nullstellen und $f : S^n \rightarrow S^n, p \mapsto \frac{X(p)}{|X(p)|}$. Wegen $X(p) \perp p$ folgt $f(p) \neq \pm p \Rightarrow n \notin 2\mathbb{Z} \Rightarrow n \in 2\mathbb{Z} + 1$.

□

Für Beispiele siehe VL.

Es gilt allgemeiner:

- Eine geschlossene Mannigfaltigkeit M besitzt ein VF ohne NS genau dann, wenn $\chi(M) = 0$. (Die Hinrichtung dieser Aussage werden wir etwas später beweisen.)
- S^n besitzt n -linear unabhängige VF, d.h. S^n ist **parallelisierbar** genau dann, wenn $n = 1, 3, 7$. (Mehr dazu werden wir im nächsten Semester diskutieren.)

Definition

Eine topologische Gruppe G **wirkt frei** auf einem topologischen Raum X \Leftrightarrow Gilt $gx = x$ für ein $x \in X$, so ist $g = e$.

Korollar 8.5

Wirkt G frei auf S^{2m} ($m \in \mathbb{Z}$), dann $G = 1$ oder \mathbb{Z}_2 .

Beweis:

Seien $g, h \in G \setminus \{e\}$. Mit 8.3 (a) gilt dann $\deg(h) = \deg(g) = (-1)^{2m+1} = -1$. Also $\deg(g \circ h) = \deg(g) \cdot \deg(h) = 1$. Nach 8.3 (a) besitzt $g \circ h$ einen Fixpunkt, also $g \circ h = e \Rightarrow G = \mathbb{Z}_2$. \square

8.2 Homologie mit Koeffizienten

Definition

Sei G eine abelsche Gruppe und K ein Komplex.

$$C_q(K; G) := \left\{ \sum_i g_i \varsigma_i \mid g_i \in G, \varsigma_i \in K \text{ ein } q\text{-Simplex} \right\}.$$

Wir definieren analog

$$\partial : C_q(K; G) \rightarrow C_{q-1}(K; G) \text{ mit } \partial^2 = 0$$

und die **Homologie mit Koeffizienten in G**

$$H_q(K; G) := H_q(C_*(K; G), \partial).$$

Anmerkung: Die gesamte Theorie aus Kapitel 7 gilt analog. Die Berechnungen unterscheiden sich, z. B.

- $G = \mathbb{Z}_2$ ist VR $\Rightarrow H_q$ sind VR (d.h. alle Sequenzen spalten) und $x = -x$ (d.h. keine Orientierung)
- $G = \mathbb{Q} \Rightarrow$ keine Torsion
- **Beispiele:**
 - $H_2(\mathbb{R}P^2; \mathbb{Z}) = 0$ und $H_2(\mathbb{R}P^2; \mathbb{Z}_2) \cong \mathbb{Z}_2$
 - $H_1(\mathbb{R}P^2; \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}_2$ und $H_1(\mathbb{R}P^2; \mathbb{Q}) = 0$

(vergl. Übung)

8.3 Die Euler-Poincaré-Formel

Lemma 8.6

Sei $H_q(K; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}^{b_q} \oplus T_q$ mit einer endlichen abelschen Gruppe T_q und der q -ten Betti-Zahl b_q . Dann ist $H_q(K; \mathbb{Q}) \cong \mathbb{Q}^{b_q}$, d.h. $\dim_{\mathbb{Q}}(H_q(K; \mathbb{Q})) = rk_{\mathbb{Z}}(H_q(K; \mathbb{Z})) = b_q$.

(algebraisch: $H_q(K; \mathbb{Q}) \cong H_q(K; \mathbb{Z}) \otimes \mathbb{Q}$)

Beweis:

Seien $[z_1], \dots, [z_{b_q}] \in H_q(K)$ eine Basis des freien Anteils \mathbb{Z}^{b_q} . Wir können die Zyklen z_i als Zyklen in $C_q(K; \mathbb{Q})$ auffassen. Für die Homologieklassen in $H_q(K; \mathbb{Q})$ schreiben wir $[[z_i]] \in H_q(K; \mathbb{Q})$.

Sei $[[z]] \in H_q(K; \mathbb{Q})$ beliebig, d.h. $z \in Z_q(K; \mathbb{Q})$. Dann existiert ein $n \in \mathbb{Z}$ mit $nz \in Z_q(K)$

$\Rightarrow [nz] = \lambda_1[z_1] + \dots + \lambda_{b_q}[z_{b_q}] + [w]$ mit $\lambda_i \in \mathbb{Z}$ und $[w] \in T_q$

$\Rightarrow [[z]] = \frac{1}{n}(\lambda_1[z_1] + \dots + \lambda_{b_q}[z_{b_q}] + [w])$

Weiter ist $[w]$ Torsion, d.h. es existiert ein $m \in \mathbb{Z}$ mit $mw = \partial u$ für ein $u \in C_{q+1}(K)$.

$\Rightarrow w = \partial(\frac{1}{m}u)$ mit $\frac{1}{m}u \in C_{q+1}(K; \mathbb{Q})$

$\Rightarrow [w] = 0$ in $H_q(K; \mathbb{Q})$

$\Rightarrow [[z_1], \dots, [z_{b_q}]]$ spannen $H_q(K; \mathbb{Q})$ auf

Zu zeigen bleibt: $[[z_i]]$ sind linear unabhängig über \mathbb{Q} .

Sei $\lambda_1[[z_1]] + \dots + \lambda_{b_q}[[z_{b_q}]] = 0 \in H_q(K; \mathbb{Q})$ mit $\lambda_i \in \mathbb{Q}$

$\Rightarrow \lambda_1 z_1 + \dots + \lambda_{b_q} z_{b_q} = \partial v$ für ein $v \in C_{q+1}(K; \mathbb{Q})$

$\Rightarrow \exists l \in \mathbb{Z}$ mit $lv \in C_{q+1}(K)$ und $l\lambda_i \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow l\lambda_1[z_1] + \dots + l\lambda_{b_q}[z_{b_q}] = 0 \in H_q(K)$

$\Rightarrow l\lambda_1 = \dots = l\lambda_{b_q} = 0$

$\Rightarrow \lambda_1 = \dots = \lambda_{b_q} = 0$

□

Satz 8.7 (Euler-Poincaré-Formel)

$$\chi(K) = \sum_{q=0}^n (-1)^q b_q$$

Insbesondere hängt $\chi(K)$ nur vom Homologietyp von $|K|$ ab, weil $b_q = rk_{\mathbb{Z}}(H_q(K))$.

Zum Beispiel:

$$H_q(\#_g T^2) = \begin{cases} \mathbb{Z} & , q = 0 \\ \mathbb{Z}^{2g} & , q = 1 \\ \mathbb{Z} & , q = 2 \end{cases} \Rightarrow \chi(\#_g T^2) = 1 - 2g + 1 = 2 - 2g$$

Beweis:

Wir haben die folgenden KES von \mathbb{Q} -VR:

$$0 \rightarrow Z_q(K; \mathbb{Q}) \rightarrow C_q(K; \mathbb{Q}) \xrightarrow{\partial} B_{q-1}(K; \mathbb{Q}) \rightarrow 0$$

$$0 \rightarrow B_q(K; \mathbb{Q}) \rightarrow Z_q(K; \mathbb{Q}) \xrightarrow{pr} H_q(K; \mathbb{Q}) \rightarrow 0$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \chi(K) &= \sum_{q=0}^n (-1)^q \alpha_q = \sum_{q=0}^n (-1)^q \dim(C_q(K; \mathbb{Q})) && | Z_q = \ker(\partial_q), B_{q-1} = \text{im}(\partial_q) \\
&= \sum_{q=0}^n (-1)^q [\dim(Z_q) + \dim(B_{q-1})] \\
&= \sum_{q=0}^n (-1)^q [\dim(B_q) + \dim(H_q) + \dim(B_{q-1})] \\
&= \sum_{q=0}^n (-1)^q \dim(H_q) && | \text{Lemma 8.6} \\
&= \sum_{q=0}^n (-1)^q b_q
\end{aligned}$$

□

8.4 Der Satz von Borsuk-Ulam

Satz 8.8

$H_q(\mathbb{R}P^n; \mathbb{Z}_2) \cong \mathbb{Z}_2$ für $q = 0, \dots, n$ zu $n \geq 1$.

Beweis:

Wir betrachten $\Pi : S^n \rightarrow \mathbb{R}P^n = S^n / x \sim -x$. Wähle eine Triangulierung von S^n verträglich mit Π (siehe Übung oder Kapitel 8.1). Wir schreiben $\Pi_q : C_q(S^n; \mathbb{Z}_2) \rightarrow C_q(\mathbb{R}P^n; \mathbb{Z}_2)$ und definieren den **Transfer** $t_q : C_q(\mathbb{R}P^n; \mathbb{Z}_2) \rightarrow C_q(S^n; \mathbb{Z}_2)$ durch $t_q(\zeta) = \zeta_+ + \zeta_-$, wobei ζ_{\pm} die q -Simplexe mit $\Pi(\zeta_{\pm}) = \zeta$ sind.

Die Sequenz

$$0 \rightarrow C_q(\mathbb{R}P^n; \mathbb{Z}_2) \xrightarrow{t_q} C_q(S^n; \mathbb{Z}_2) \xrightarrow{\Pi_q} C_q(\mathbb{R}P^n; \mathbb{Z}_2) \rightarrow 0$$

ist exakt. Denn:

- t_q ist injektiv und Π_q surjektiv
- $\Pi_q \circ t_q(\zeta) = \Pi(\zeta_+ + \zeta_-) = 2\zeta = 0$ in $C_q(\mathbb{R}P^n; \mathbb{Z}_2) \Rightarrow \text{Im}(t_q) \subset \ker(\Pi_q)$
- Sei $c \in \ker(\Pi_q)$, dann sind ζ_+ und ζ_- mit gleicher Vielfachheit in c enthalten, also $c \in \text{im}(t_q)$.
- Es gilt auch $\partial t_q = t_{q-1} \partial$ und $\partial \Pi_q = \Pi_{q-1} \partial$.

Mit Satz 7.17 erhalten wir die LES

$$\dots \rightarrow H_q(\mathbb{R}P^n; \mathbb{Z}_2) \xrightarrow{t_*} H_q(S^n; \mathbb{Z}_2) \xrightarrow{\Pi_*} H_q(\mathbb{R}P^n; \mathbb{Z}_2) \xrightarrow{\Delta} H_{q-1}(\mathbb{R}P^n; \mathbb{Z}_2) \rightarrow \dots$$

Es gilt $H_0(\mathbb{R}P^n; \mathbb{Z}_2) \cong \mathbb{Z}_2$, da $\mathbb{R}P^n$ wegzshgd ist und $H_n(\mathbb{R}P^n; \mathbb{Z}_2) \cong \mathbb{Z}_2$ erzeugt von der

Summe aller n-Simplexe.

$$0 \rightarrow H_n(\mathbb{R}P^n; \mathbb{Z}_2) \xrightarrow{t_*} H_n(S^n; \mathbb{Z}_2) \xrightarrow{\Pi_*} H_n(\mathbb{R}P^n; \mathbb{Z}_2) \xrightarrow{\Delta} H_{n-1}(\mathbb{R}P^n; \mathbb{Z}_2) \rightarrow H_{n-1}(S^n; \mathbb{Z}_2) = 0$$

$$\cong \qquad \qquad \mathbb{Z}_2 \xrightarrow[\cong]{\Pi_*} \qquad \qquad 0 \cong$$

$$0 \rightarrow H_1(\mathbb{R}P^n; \mathbb{Z}_2) \xrightarrow{\Delta} H_0(\mathbb{R}P^n; \mathbb{Z}_2) \xrightarrow{t_*} H_0(S^n; \mathbb{Z}_2) \xrightarrow{\Pi_*} H_0(\mathbb{R}P^n; \mathbb{Z}_2) \rightarrow 0$$

$$\mathbb{Z}_2 \cong \qquad \qquad \mathbb{Z}_2 \rightarrow \qquad \qquad \mathbb{Z}_2 \cong \qquad \qquad \mathbb{Z}_2$$

$$\mathbb{Z}_2 \cong \qquad \qquad \mathbb{Z}_2 \rightarrow \qquad \qquad 0$$

□

- Bemerkung: Δ ist Isomorphismus für $q = 1, \dots, n$.

Satz 8.9

Sei $f : S^n \rightarrow S^m$ stetig mit $f(-x) = -f(x)$, dann $n \leq m$ und für $n = m$ gilt $\deg(f) \in 2\mathbb{Z} + 1$.

Beweis:

f induziert eine Abbildung $\bar{f} : \mathbb{R}P^n \rightarrow \mathbb{R}P^m$, sodass folgendes Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccc} S^n & \xrightarrow{f} & S^m \\ \Pi \downarrow & \circlearrowleft & \downarrow \Pi \\ \mathbb{R}P^n & \xrightarrow{\bar{f}} & \mathbb{R}P^m \end{array}$$

Man rechnet auch nach, dass folgendes Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccccccc} H_q(\mathbb{R}P^n; \mathbb{Z}_2) & \xrightarrow{t_*} & H_q(S^n; \mathbb{Z}_2) & \xrightarrow{\Pi_*} & H_q(\mathbb{R}P^n; \mathbb{Z}_2) & \xrightarrow{\Delta} & H_{q-1}(\mathbb{R}P^n; \mathbb{Z}_2) \\ \bar{f}_* \downarrow & & f_* \downarrow & & \bar{f}_* \downarrow & & \bar{f}_* \downarrow \\ H_q(\mathbb{R}P^m; \mathbb{Z}_2) & \xrightarrow{t_*} & H_q(S^m; \mathbb{Z}_2) & \xrightarrow{\Pi_*} & H_q(\mathbb{R}P^m; \mathbb{Z}_2) & \xrightarrow{\Delta} & H_{q-1}(\mathbb{R}P^m; \mathbb{Z}_2) \end{array}$$

Angenommen $n \geq m$. Dann gilt für $q \leq m \leq n$:

$$\begin{array}{ccc} H_q(\mathbb{R}P^n; \mathbb{Z}_2) & \xrightarrow[\cong]{\Delta} & H_{q-1}(\mathbb{R}P^n; \mathbb{Z}_2) \\ \bar{f}_* \downarrow & \circlearrowleft & \downarrow \bar{f}_* \\ H_q(\mathbb{R}P^m; \mathbb{Z}_2) & \xrightarrow[\cong]{\Delta} & H_{q-1}(\mathbb{R}P^m; \mathbb{Z}_2) \end{array}$$

Für $q - 1 = 0$ ist $\bar{f}_* : H_{q-1}(\mathbb{R}P^n, \mathbb{Z}_2) \rightarrow H_{q-1}(\mathbb{R}P^m, \mathbb{Z}_2)$ ein Isomorphismus. Induktiv folgt $\bar{f}_* : H_q(\mathbb{R}P^n, \mathbb{Z}_2) \rightarrow H_q(\mathbb{R}P^m, \mathbb{Z}_2)$ ist ein Isomorphismus für $q = 1, \dots, m$.

Betrachte

$$\begin{array}{ccc}
 \mathbb{Z}_2 = H_m(\mathbb{R}P^n; \mathbb{Z}_2) & \xrightarrow{t_*} & H_m(S^n; \mathbb{Z}_2) \quad (= 0 \text{ f\"ur } m < n) \\
 \bar{f}_* \downarrow \cong & \circlearrowleft & \downarrow f_* \\
 H_m(\mathbb{R}P^m; \mathbb{Z}_2) & \xrightarrow[\cong]{t_*} & H_m(S^m; \mathbb{Z}_2) = \mathbb{Z}_2
 \end{array}$$

$n > m$: Der Isomorphismus $t_* \bar{f}_* = f_* t_* : \mathbb{Z}_2 \rightarrow \mathbb{Z}_2$ faktorisiert durch $H_m(S^n; \mathbb{Z}_2) = 0$. \nexists

$n = m$: Es ist $f_* : H_n(S^n; \mathbb{Z}_2) \rightarrow H_n(S^n; \mathbb{Z}_2)$ ein Isomorphismus.

$\Rightarrow f_* : H_n(S^n) \rightarrow H_n(S^n)$ ist Multiplikation mit einer ungeraden Zahl

$\Rightarrow \deg(f) \in 2\mathbb{Z} + 1$

□

Korollar 8.10

Sei $f : S^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig $\Rightarrow \exists x \in S^n$ mit $f(x) = f(-x)$.

Beweis:

Angenommen $f(x) \neq f(-x)$ für alle $x \in S^n$.

Dann ist $g : S^n \rightarrow S^{n-1}$, $x \mapsto \frac{f(x) - f(-x)}{|f(x) - f(-x)|}$ stetig mit $g(-x) = -g(x)$. \nexists zu Satz 8.9

□

Korollar 8.11 (Lusternik-Schnirelmann)

Sei A_1, \dots, A_n, A_{n+1} eine Überdeckung von S^n mit A_1, \dots, A_n abgeschlossen $\Rightarrow \exists x, -x \in A_i$ für ein A_i .

Beweis:

Sei d Metrik auf S^n . Betrachte $S^n \rightarrow \mathbb{R}_0^+$, $x \mapsto d(x, A)$ zu $A \subset S^n$. Dies ist eine stetig Abbildung, denn: $d(x, A) \leq d(x, x') + d(x', A) \Rightarrow |d(x, A) - d(x', A)| \leq d(x, x')$.

Definiere $f : S^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $x \mapsto (d(x, A_1), \dots, d(x, A_n))$. Da f stetig ist, existiert nach Korollar 8.10 ein $x \in S^n$ mit $f(x) = f(-x)$, d.h. $d(x, A_i) = d(-x, A_i)$ für $i = 1, \dots, n$.

- Falls $d(x, A_i) > 0$ für alle $i \in \{1, \dots, n\} \Rightarrow x, -x \notin A_i \Rightarrow x, -x \in A_{n+1}$
- Falls $d(x, A_i) = 0$ für ein $i \in \{1, \dots, n\} \xrightarrow{A_i \text{ abg.}} x, -x \in A_i$

□

8.5 Der Fixpunktsatz von Lefschetz

Sei $f : X \rightarrow X$ stetig und X triangulierbar.

Definition

Zu f und $q = 0, \dots, n := \dim(X)$ haben wir

$$f_{q*} : H_q(X; \mathbb{Q}) \rightarrow H_q(X; \mathbb{Q}).$$

Die **Lefschetz-Zahl** von f sei dann gegeben durch

$$L(f) := \sum_{q=0}^n (-1)^q \operatorname{Spur}(f_{q*}).$$

- Bemerkung: Es gilt: $f \simeq g \stackrel{7.17}{\Rightarrow} f_{q*} = g_{q*} \Rightarrow L(f) = L(g)$.

Satz 8.12 (Der Fixpunktsatz von Lefschetz)

Ist $L(f) \neq 0$, so besitzt f einen Fixpunkt.

Korollar 8.13

Falls $H_q(X; \mathbb{Q}) \cong H_q(\text{pkt}; \mathbb{Q}) \cong \begin{cases} \mathbb{Q} & , q = 0 \\ 0 & , \text{sonst} \end{cases}$, so hat jedes stetige $f : X \rightarrow X$ einen FP.

Bemerke, dass hieraus erneut der Brouwersche Fixpunktsatz folgt. Aber das obige Korollar lässt sich auch auf allgemeinere Räume anwenden, wie z.B. $\mathbb{R}P^2$.

Beweis:

Es gilt $f_{0*} = id_{\mathbb{Q}}$ und $f_{q*} = 0$ für $q > 0 \Rightarrow L(f) = 1 \neq 0$. Mit Fixpunktsatz von Lefschetz folgt die Behauptung. \square

Korollar 8.14

- $L(id_X) = \chi(X)$
- Falls $id_X \simeq$ Abbildung ohne FP $\Rightarrow \chi(X) = 0$

Beweis:

- $L(id_X) = \sum_{q=0}^n (-1)^q \operatorname{Spur}(id_{q*}) = \sum_{q=0}^n (-1)^q \dim(H_q(X; \mathbb{Q})) = \chi(X)$ (mit Euler-Poincaré)
- Falls $id_X \simeq$ Abbildung ohne FP, so $0 = L(f) = L(id_X) = \chi(X)$.

\square

- Beispiele:

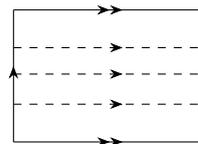
Sei M eine geschlossene Mannigfaltigkeit mit einem Vektorfeld X ohne Nullstellen.

\Rightarrow Verschiebe jeden Punkt in X -Richtung

\Rightarrow Erhalte Abbildung $f \simeq id$ ohne FP

$\Rightarrow \chi(M) = 0$

z. B. $\chi(T^2) = 0$, $\chi(KF) = 0$



Korollar 8.15

Sei G eine topologische Gruppe, wegzshgd und triangulierbar $\Rightarrow \chi(G) = 0$.

Beweis:

Sei $g_1 \in G \setminus \{e\}$. Dazu ist $f_{g_1} : G \rightarrow G, g \mapsto g_1 g$ stetig und hat keinen FP, sodass $L(f_{g_1}) = 0$. Sei $t \mapsto g_t$ mit $t \in I$ ein Weg von $g_0 = e$ nach g_1 . Dann ist f_{g_t} eine Homotopie von $f_{g_0} = id_G$ und $f_{g_1} \Rightarrow 0 = L(f_{g_1}) = L(id_G) = \chi(G)$. \square

• Beispiele:

- T^2 ist die einzige (geschlossene) Fläche, die die Struktur einer topologischen Gruppe trägt, denn:
 $\chi(F) = 0 \Leftrightarrow F = T^2$ oder $F = KF$. Jedoch ist $\pi_1(KF)$ nicht abelsch.
- $\chi(S^{2n}) \neq 0 \Rightarrow S^{2n}$ ist keine topologische Gruppe.
 Des Weiteren gilt: S^{2n+1} zu $n \geq 2$ sind keine topologische Gruppe. Hingegen bilden S^0, S^1, S^3 topologische Gruppen ($\subset \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$).

Satz 8.16 (Spurformel von Hopf)

Sei $\phi : C(K; \mathbb{Q}) \rightarrow C(K; \mathbb{Q})$ eine Kettenabbildung. Dann

$$\sum_{q=0}^n (-1)^q \text{Spur}(\phi_{q*}) = \sum_{q=0}^n (-1)^q \text{Spur}(\phi_q)$$

Beweis:

ϕ induziert Homomorphismen

$$\phi_q^Z : Z_q(K; \mathbb{Q}) \rightarrow Z_q(K; \mathbb{Q}), \quad \phi_q^B : B_q(K; \mathbb{Q}) \rightarrow B_q(K; \mathbb{Q}).$$

Wir erhalten die folgenden kommutativen Diagramme

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & B_q & \longrightarrow & Z_q & \longrightarrow & H_q & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow \phi_q^B & & \downarrow \phi_q^Z & & \downarrow \phi_{q*} & & \\ 0 & \longrightarrow & B_q & \longrightarrow & Z_q & \longrightarrow & H_q & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

und

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & Z_q & \longrightarrow & C_q & \longrightarrow & B_{q-1} & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow \phi_q^Z & & \downarrow \phi_q & & \downarrow \phi_{q-1}^B & & \\ 0 & \longrightarrow & Z_q & \longrightarrow & C_q & \longrightarrow & B_{q-1} & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

In Blockmatrix-Schreibweise

$$\begin{aligned} \phi_q^Z &= \left(\begin{array}{c|c} \phi_q^B & * \\ \hline 0 & \phi_{q*} \end{array} \right) \text{ und } \phi_q = \left(\begin{array}{c|c} \phi_q^Z & * \\ \hline 0 & \phi_{q-1}^B \end{array} \right) \\ \Rightarrow \text{Spur}(\phi_q) &= \text{Spur}(\phi_q^Z) + \text{Spur}(\phi_{q-1}^B) = \text{Spur}(\phi_q^B) + \text{Spur}(\phi_{q*}) + \text{Spur}(\phi_{q-1}^B) \\ \Rightarrow \sum_{q=0}^n (-1)^q \text{Spur}(\phi_q) &= \sum_{q=0}^n (-1)^q \text{Spur}(\phi_{q*}) \end{aligned}$$

\square

Beweis zu Satz 8.12:

Sei K eine Triangulierung von X und $f : |K| \rightarrow |K|$ fixpunktfrei. Wir zeigen: $L(f) = 0$.

- Definiere $\delta := \min_{x \in |K|} \{d(x, f(x))\} > 0$.

Da $L(f)$ unabhängig von der Triangulierung ist, können wir K so oft baryzentrisch Unterteilen bis $\mu(K) < \frac{\delta}{2}$ gilt und f eine simpliziale Approximation $s : |K^l| \rightarrow |K|$ besitzt.

Es gilt $f_* = s_* i_*^{(l)}$ (vgl. Kapitel 7), d.h.

$$H_q(K; \mathbb{Q}) \xrightarrow{i_q^{(l)}} H_q(K^l; \mathbb{Q}) \xrightarrow{s_{q*}} H_q(K; \mathbb{Q})$$

$\underbrace{\hspace{15em}}_{f_*}$

- Nach Satz 8.16 reicht es $Spur(s_q i_q^{(l)}) = 0$ zu zeigen.

Sei ς ein q -Simplex von K und τ ein q -Simplex in $i_q^{(l)}(\varsigma)$. Betrachte

$$x \in \tau \subset \varsigma \Rightarrow s(x) \in \tau_{f(x)}$$

$$\Rightarrow d(s(x), f(x)) \leq \mu(K) < \frac{\delta}{2}$$

$$\Rightarrow d(x, s(x)) \geq d(x, f(x)) - d(s(x), f(x)) > \delta - \frac{\delta}{2} = \frac{\delta}{2} > \mu(K)$$

$\Rightarrow x$ und $s(x)$ liegen in verschiedenen Simplexen in K

$\Rightarrow s(\tau) \neq \varsigma$

\Rightarrow Der Koeffizient von ς in $s_q i_q^{(l)}(\varsigma)$ ist $= 0$

$\Rightarrow Spur(s_q i_q^{(l)}) = 0$

□