SS 2019 Marc Kegel

Topologie I

Übungsblatt 2

Aufgabe 1.

(a) Verifizieren Sie, dass die Quotiententopologie wirklich eine Topologie definiert.

(b) Die Quotiententopologie ist die feinste Topologie (d.h. die Topologie mit den meisten offenen Mengen) für welche die kanonische Projektion $\pi\colon X \to X/_\sim$ stetig ist.

(c) Sei Y ein weiterer topologischer Raum. Eine Abbildung $f\colon X/_\sim \to Y$ ist genau dann stetig, wenn $f \circ \pi\colon X \to Y$ stetig ist.

(d) Zeigen Sie, dass der Quotientenraum D^n/S^{n-1} homöomorph zu S^n ist. (Mit X/A ist der Quotientenraum unter der Äquivalenzrelation $x \sim y :\Leftrightarrow (x = y \text{ oder } x, y \in A)$ gemeint.

(e) Zeigen Sie, dass die Einhängung ΣS^n der n-Sphäre S^n homöomorph zu S^{n+1} ist.

Aufgabe 2.
Ist $f\colon X \to Y$ eine injektive Abbildung und $f\colon X \to f(X)$ ein Homöomorphismus, wenn man $f(X)$ die durch Y induzierte Topologie gibt, so heißt f eine **Einbettung**.

(a) Abgeschlossene Teilmengen kompakter Räume sind kompakt.

(b) Kompakte Teilmengen von Hausdorff-Räumen sind abgeschlossen. Insbesondere sind also einpunktige Teilmengen abgeschlossen.

(c) Nutzen Sie (a) und (b) um zu zeigen, dass jede stetige und injektive Abbildung eines kompakten Raumes in einen Hausdorff-Raum eine Einbettung ist.

(d) Die Abbildung

$$\begin{aligned} f\colon [0, 2\pi] \times [0, \pi] &\longrightarrow \mathbb{R}^5 \\ (x, y) &\longmapsto (\cos x, \cos 2y, \sin 2y, \sin x \cos y, \sin x \sin y) \end{aligned}$$

induziert eine Einbettung der Kleinschen Flasche in den $\mathbb{R}^5$.
Hinweis: Nutzen Sie dafür Aufgabenteil (c) und Aufgabe $1(c)$.
Bonusaufgabe: Kann man die Kleinsche Flasche auch in den $\mathbb{R}^4$ einbetten?

(e) Beschreiben Sie stetige bijektive Abbildungen, die keine Homöomorphismen sind.

Aufgabe 3.
Der Rand eines Möbiusbands is homöomorph zu einem Kreis S^1. Beschreiben Sie eine Einbettung eines Möbiusbandes in den $\mathbb{R}^3$, so dass der Rand ein Standardkreis ist. Fertigen Sie ein $3D$-Modell dieser Einbettung (z.B. aus Papier) an.

b.w.

Aufgabe 4.
Der n-dimensionale reell projektive Raum $\mathbb{R}P^n$ ist der Quotientenraum von S^n, der durch die Identifikation von Antipodenpunkten entsteht, d.h. $\mathbb{R}P^n := S^n/_\sim$ mit $x \sim y$ für $x, y \in S^n$ genau dann, wenn $y = x$ oder $y = -x$.

(a) Zeigen Sie, dass die folgenden Definitionen äquivalent zu dieser Definition von $\mathbb{R}P^n$ sind, d.h., dass sie zu Räumen führen, die homöomorph zu $\mathbb{R}P^n$ sind:

  (i) Beginne mit $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ und identifiziere Punkte, die auf derselben Geraden durch den Ursprung liegen, d.h. bilde den Quotientenraum $(\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\})/_\sim$ mit $x \sim y$ für $x, y \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ genau dann, wenn ein $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ existiert, so dass $x = \lambda y$. (Man sagt dann auch: $\mathbb{R}P^n$ ist der Raum der Ursprungsgeraden im $\mathbb{R}^{n+1}$.)

  (ii) Beginne mit der n-dimensionalen Kreisscheibe D^n und identifiziere Antipodenpunkte auf dem Rand $\partial D^n = S^{n-1}$, d.h. $D^n/_\sim$ mit $x \sim y$ für $x, y \in D^n$ genau dann, wenn $y = x$ oder $y \in S^{n-1}$ mit $y = -x$.

(b) Sei M ein Möbiusband. Sein Rand ist $\partial M = S^1$. Verklebe M mit einer Kreisscheibe D^2 entlang des Randes, d.h. bilde $D^2 \cup_\varphi M$ mit $\varphi = \mathrm{id}_{S^1}$. Zeigen Sie, dass dieser Raum homöomorph zu $\mathbb{R}P^2$ ist.

(c) Das Verkleben zweier Möbiusbänder entlang ihrer Ränder liefert eine Kleinsche Flasche.

Bonusaufgabe.

(a) Wiederholen Sie den Beweis des Satzes von Heine–Borel.

(b) Jeder kompakte, lokal Euklidische Raum besitzt eine abzählbare Basis der Topologie. Ein Raum heißt **lokal Euklidisch**, falls jeder seiner Punkte eine offene Umgebung besitzt, die homöomorph zu einer offenen Menge im $\mathbb{R}^n$ ist.

(c) Wir nennen einen topologischen Raum X **folgenkompakt**, falls jede Folge $\{x_i\}_{i \in I}$ eine konvergente Teilfolge besitzt. Überlegen Sie sich, was eine sinnvolle Definition einer konvergenten Folge in einem topologischen Raum ist und zeigen Sie, dass Teilmengen des $\mathbb{R}^n$ genau dann kompakt sind, wenn sie folgenkompakt sind.

(d) Wir haben also drei verschiedene Kompaktheitsbegriffe kennengelernt (die im $\mathbb{R}^n$ alle übereinstimmen): abgeschlossene und beschränkte Mengen in metrischen Räumen, Folgenkompaktheit und die (Überdeckungs-) Kompaktheit. Beschreiben Sie topologische Räume in denen diese drei Kompaktheitsbegriffe nicht gleich sind.

Abgabe: Bis spätestens **Donnerstag** 18.4.19, 15:00 Uhr, in Raum 1.318 (RUD 25). Verspätete Abgabe oder Abgabe per E-Mail ist leider **nicht** möglich.