

# Differentialtopologie

## Blatt 1

### Aufgabe 1.

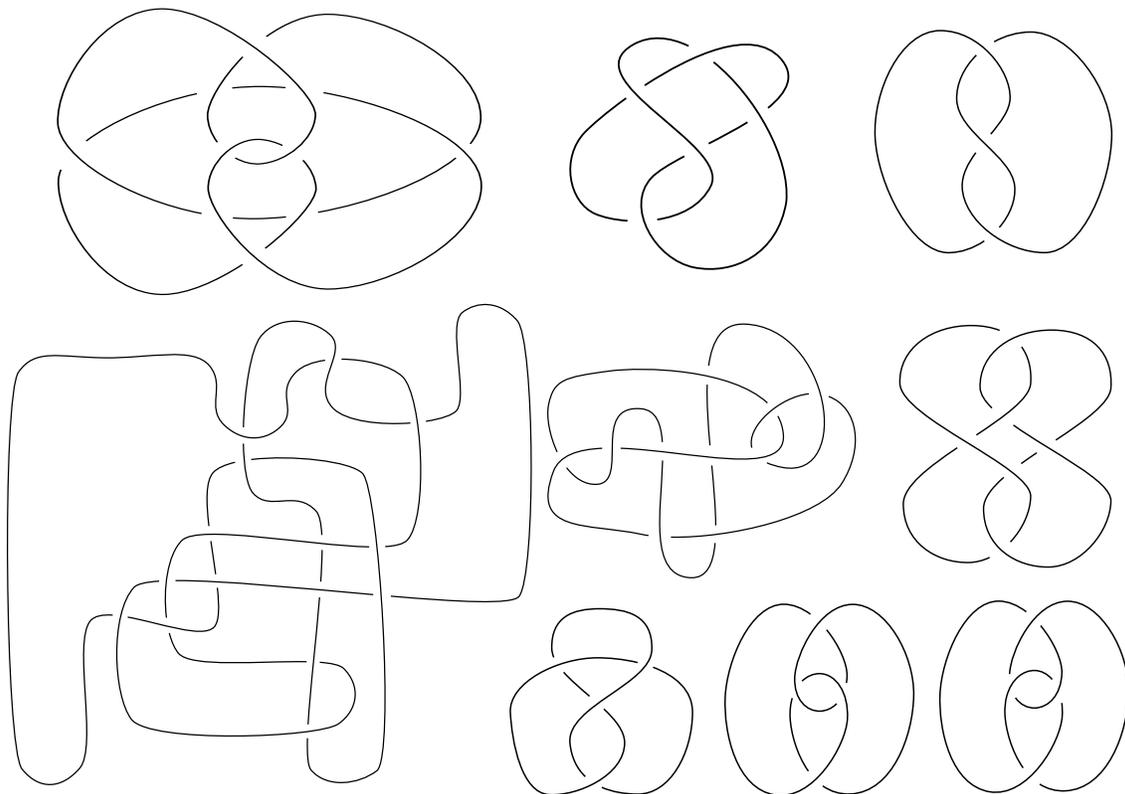
Ein Knotendiagramm  $D_K$  eines Knotens  $K$  heißt **3-färbar** falls man jeden Bogen in genau einer von drei Farben einfärben kann, so dass an jeder Kreuzung sich entweder all drei Farben treffen oder nur eine Farbe benutzt wird.

- (a) Dies ist eine Eigenschaft des Knotens  $K$ .
- (b) Der Kleeblattknoten ist nicht-trivial, d.h. nicht isotop zum Unknoten.
- (c) Welche anderen Knoten kann man so unterscheiden?

### Aufgabe 2.

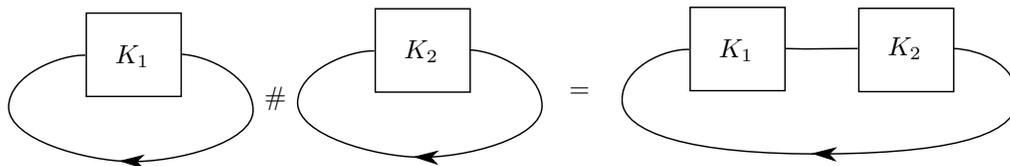
Bestimmen Sie die Isotopieklassen der folgenden Knoten und Verschlingungen.

*Hinweis:* Das Diagramm in der Mitte heißt Schuldiger (culprit). Der Grund ist, dass man es erst verkomplizieren muss bevor man es vereinfachen kann. Das Diagramm unten links heißt Thistlewaite Knoten. Vielen Menschen fällt es schwer diesen Knoten zu bestimmen.



**Bonusaufgabe.**

Die **verbundene Summe** von zwei *orientierten* Knoten  $K_1$  und  $K_2$  ist mittels des folgenden Diagramms definiert.



- (a) Dies ist wohldefiniert. Ist dies immer noch wohldefiniert für unorientierte Knoten?
- (b)  $K_1 \# K_2$  ist isotop zu  $K_2 \# K_1$ .
- (c) Für welche Knoten  $K_1$  und  $K_2$  ist  $K_1 \# K_2$  isotop zum Unknoten?

**Bonusaufgabe.**

- (a) Jeder Knoten besitzt eine reguläre Projektion.
- (b) Beweisen Sie das Reidemeister-Theorem.  
*Hinweis:* Eine gute Referenz dazu ist das Buch von Burde–Zieschang.

**Bonusaufgabe** (Für Teilnehmer mit Vorkenntnissen aus der algebraischen Topologie).

- (a) Zwei isotope Verschlingungen  $L_1, L_2$  in  $S^3$  haben diffeomorphe Außenräume  $S^3 \setminus \nu L_i$ , wobei  $\nu L_i$  eine offene Tubenumgebung von  $L_i$  bezeichnet. Ist die umgekehrte Implikation richtig?  
*Hinweis:* Dies benötigt den Isotopieerweiterungssatz.
- (b) Die Homologiegruppen eines Knotenkomplements sind unabhängig von dem Knoten.
- (c) Beschreiben Sie einen Algorithmus um die **Knotengruppe** (die Fundamentalgruppe des Knotenkomplements) zu berechnen. Nutzen Sie dies um den Unknoten, den Kleeblattknoten und den Achterknoten voneinander zu unterscheiden.

**Knobelaufgabe:** Beschreiben Sie die Knotengruppe von Fox's wildem Bogen und benutzen Sie diese um zu zeigen, dass dieser Knoten nicht isotop zu einem zahmen Knoten ist.

**Knobelaufgabe:** Interpretiere Sie die 3-Färbbarkeit als Existenz gewisser Darstellungen der Knotengruppe.

**Knobelaufgabe.**

Was ist der Isotopietyp von Hakens Knoten?

*Hinweis:* Ich habe dafür 647 Reidemeister-Züge benötigt. Die Lösung dieser Aufgabe wird zeigen, wie Haken dieses Beispiel konstruiert hat und wie man weitere beliebig kompliziertere Diagramme konstruieren kann.