SS 2024 Marc Kegel

Differentialtopologie

Blatt 6

Aufgabe 1.

(a) Beschreiben Sie eine Henkelzerlegung der Kleinschen Flasche mit genau einem 0-Henkel und übersetzen Sie diese Henkelzerlegung in ein Wort wie in der Vorlesung. Zeigen Sie durch Modifikation dieses Wortes, dass die Kleinsche Flasche homöomorph zu der verbundenen Summe zweier Kopien von $\mathbb{R}P^2$ ist.

(b) Welche Henkelzerlegung welcher Fläche wird durch das Wort

$$a\,b\,a\,c\,d\,e\,c\,f\,g\,h\,d\,g^{-1}f^{-1}h^{-1}b^{-1}e^{-1}$$

beschrieben?

Aufgabe 2.

(a) Einbettungen $[-1,1] \to \mathbb{R}$ sind genau die streng monotonen Funktionen $[-1,1] \to \mathbb{R}$.

(b) Seien $\varphi_i, \varphi_2 \colon [-1,1] \to \mathbb{R}$ streng monoton wachsende Funktionen. Zeigen Sie die Existenz eines Homöomorphismus $h \colon \mathbb{R}^2_- \to \mathbb{R}^2_-$ mit $h = \mathrm{Id}$ außerhalb eines Kompaktums und $h \circ \varphi_1 = \varphi_2$. Dabei fassen wir $\mathbb{R}$ als Rand von $\mathbb{R}^2_- = \{(x,y) | y < 0\}$ auf.
Hinweis: Zeigen Sie zuerst die Existenz eines solchen Homöomorphismus von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$.

(c) Füllen Sie damit die Details aus dem Beweis des Flächenklassifikationssatzes aus der Vorlesung, d.h. zeigen Sie, dass man ohne Einschränkung annehmen kann, dass alle 1-Henkel an den Rand des 0-Henkels angeheftet werden und dass diese Anheftungen nur von dem Monotonieverhalten und den Bildern der Anklebeabbildungen abhängen.

Aufgabe 3.

(a) Klassifizieren Sie kompakte Flächen mit nicht-leerem Rand.
Hinweis: Gehen Sie dabei analog zum Beweis aus der Vorlesung vor.

(b) Zwei geschlossene Flächen sind homöomorph genau dann, wenn sie homotopieäquivalent sind. Gilt dies auch für kompakte Flächen mit Rand?

Bonusaufgabe 1.
Sei L eine orientierte Verschlingung in S^3. Zeigen Sie, dass es eine zusammenhängende, orientierte und kompakte Fläche F in S^3 gibt, deren orientierter Rand L ist. Können Sie eine solche Fläche explizit konstruieren? Was ist das Geschlecht dieser Fläche?