

Differentialtopologie

Blatt 7

Aufgabe 1.

Welche 3-Mannigfaltigkeit wird durch das folgende planare Heegaard-Diagramm präsentiert?

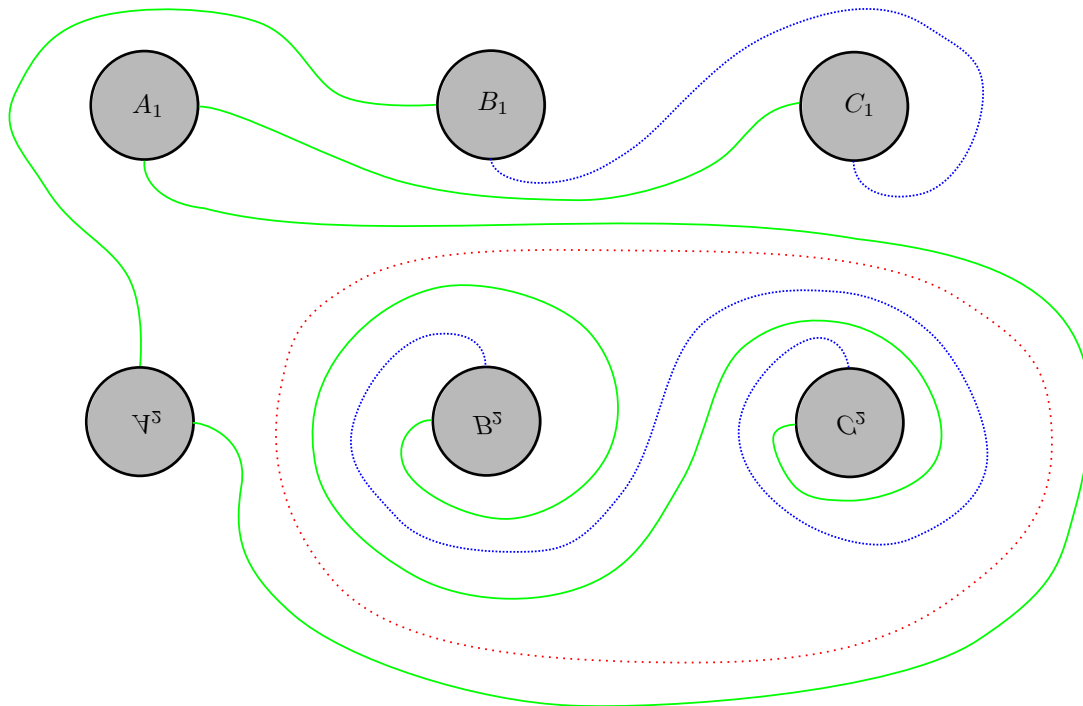


Abbildung 1: Die Ankelebescheiben der 1-Henkel sind paarweise mittels einer Spiegelung entlang einer horizontalen Mittellinie identifiziert.

Aufgabe 2.

Zeichnen Sie ein planares Heegaard-Diagramm von T^3 .

Hinweis: Nutzen Sie dazu die Henkelzerlegung, die wir auf Blatt 5 konstruiert haben.

Knobelaufgabe: Zeichnen Sie ein planares Heegaard-Diagramm von $S^1 \times \Sigma_g$.

Aufgabe 3.

Sei M eine zusammenhängende, geschlossene, orientierbare 3-Mannigfaltigkeit, welche durch ein planares Heegaard-Diagramm dargestellt wird.

- Beschreiben Sie eine Präsentation der Homologiegruppen von M ausgehend von dem planaren Heegaard-Diagramm.
- Berechnen Sie die Homologiegruppen von Linsenräumen und T^3 aus ihren Heegaard-Diagrammen.

Aufgabe 4.

- (a) Eine 3-Mannigfaltigkeit hat Heegaard-Geschlecht 0 genau dann, wenn sie diffeomorph zu S^3 ist.
- (b) Eine 3-Mannigfaltigkeit hat Heegaard-Geschlecht 1 genau dann, wenn sie diffeomorph zu einem Linsenraum ist (und nicht S^3 ist).
Hinweis: Nutzen Sie dafür (ohne Beweis) den nicht-trivialen Satz, dass jede nicht-triviale einfach geschlossene Kurve auf dem Rand eines Volltorus V isotop ist zu einer Kurve der Form $p\mu + q\lambda$ für $p, q \in \mathbb{Z}$ teilerfremd.
- (c) Das Heegaard-Geschlecht von T^3 ist 3.
- (d) Konstruieren Sie für jede natürliche Zahl g eine 3-Mannigfaltigkeit mit Heegaard-Geschlecht g .
- (e) Zeigen Sie, dass das Heegaard-Geschlecht sub-additiv unter verbundener Summe ist, d.h. zeigen Sie

$$g(M\#N) \leq g(M) + g(N).$$

Beschreiben Sie dazu, wie man ein Heegaard-Diagramm von $M\#N$ aus Heegaard-Diagrammen von M und N konstruiert.

- (f) **Knobelaufgabe:** Zeigen Sie, dass sogar $g(M\#N) = g(M) + g(N)$ gilt.
Hinweis: Nutzen Sie dafür (ohne Beweis) den Satz von Schönflies (Jede glatte 2-Sphäre in S^3 zerteilt die 3-Sphäre in zwei 3-Bälle.) um zu zeigen, dass ein Henkelkörper prim ist.

Bonusaufgabe 1.

Zeigen Sie, dass man für $p \neq 0$ den Linsenraum $L(p, q)$ als Quotient von S^3 erhalten kann.

Bonusaufgabe 2.

Welche Bedingungen muss ein System von einfach-geschlossenen Kurven auf Σ_g erfüllen um als Heegaard-Diagramm einer geschlossenen 3-Mannigfaltigkeit aufzutreten?