

# Differentialtopologie

## Blatt 9

### Aufgabe 1.

- (a) Sei  $D_K$  ein reguläres Diagramm eines orientierten Knotens in  $S^3$ . Die **Tafelrahmung** von  $K$  bezüglich dem Diagramm  $D_K$  ist durch den zu  $K$  parallelen Knoten  $K_{bb}$  gegeben, den man in dem Diagramm  $D_K$  durch Verschiebung von  $K$  innerhalb der Projektionsebene erhält. Zeigen Sie, dass  $\text{lk}(K, K_{bb}) = \text{writhe}(D_K)$  gilt, wobei  $\text{writhe}(D_K)$  die Summe der Selbstkreuzungen (gezählt mit Vorzeichen) von  $K$  in  $D_K$  bezeichnet.
- (b) Berechnen Sie die Verschlingungszahlen der orientierten Knoten aus den Diagrammen von  $S^1 \times S^2$  in Abbildung 1. Überlegen Sie sich dazu zuerst, wie man die Homologieklassse eines Knotens in dem Standard-Kirby-Diagramm von  $S^1 \times S^2$  berechnen kann und überprüfen Sie, dass die Knoten in Abbildung 1 alle nullhomolog sind.
- (c) Zeigen Sie anhand von Beispielen, dass die Verschlingungszahl  $\text{lk}(K_1, K_2)$  nicht wohldefiniert ist, falls einer (oder beide) der Knoten nicht-nullhomolog ist.

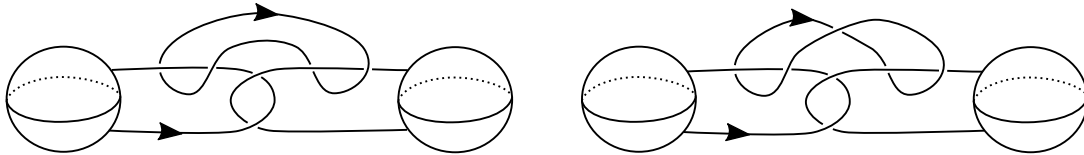


Abbildung 1: Orientierte Knoten in  $S^1 \times S^2$ .

### Aufgabe 2.

- (a) Berechnen Sie die Schnittform und die Signatur des 4-Torus  $T^4$ .
- (b) Wie erhält man die Schnittform einer verbundenen Summe aus den Schnittformen der einzelnen Summanden? Was gilt für die Signatur?
- (c) Die Schnittform einer geschlossenen, orientierten 4-Mannigfaltigkeit ist unimodular.

**Bonusaufgabe:** Die Schnittform  $Q_W$  einer kompakten orientierten 4-Mannigfaltigkeit ist unimodular genau dann, wenn jede Randkomponente von  $W$  eine Homologiesphäre ist.

### Aufgabe 3.

Zeigen Sie, dass man jede Homologieklassse  $a \in H_2(W; \mathbb{Z})$  in einer kompakten, glatten, orientierten 4-Mannigfaltigkeit  $W$  als eingebettete Fläche  $\Sigma_a$  in  $W$  realisieren kann.

*Hinweis:* Verallgemeinern Sie den Beweis aus der Vorlesung für 2-Henkelkörper.

**Bonus:** Finden Sie eine Präsentation von  $H_2(W; \mathbb{Z})$  einer 4-Mannigfaltigkeit  $W$ , bestehend aus einem 0-Henkel und beliebig vielen 1- und 2-Henkeln, ausgehend von einer Darstellung von  $W$  als Kirby-Diagramm. Wie berechnet man die darstellende Matrix der Schnittform von  $W$  bezüglich dieser Präsentation von  $H_2(W; \mathbb{Z})$ ?

**Aufgabe 4.**

- (a) Zeigen Sie, dass jede symmetrische Bilinearform  $Q: \mathbb{Z}^n \times \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}$  die Schnittform einer glatten, einfach-zusammenhängenden, kompakten 4-Mannigfaltigkeit ist. Beschreiben Sie Kirby-Diagramme dieser Mannigfaltigkeiten ohne 1-Henkel.
- (b) Finden Sie Kirby-Diagramme von einfach-zusammenhängenden, geschlossenen 4-Mannigfaltigkeiten  $W$ , deren Schnittform in einer Basis von  $H_2$  durch eine Matrix der Form

$$\begin{pmatrix} n & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

gegeben ist.

- (c) Zeigen Sie, dass diese darstellenden Matrizen nach einem Basiswechsel von  $H_2(W, \mathbb{Z})$  zu

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ oder } \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

transformieren.

**Bonusaufgabe 1.** Berechnen Sie die Schnittform der  $E_8$ -Mannigfaltigkeit und zeigen Sie, dass diese unimodular ist, Signature 8 hat und gerade ist.