

HAUSARBEIT ZUR VORLESUNG KIRBY KALKÜL

# Homologie und Henkelzerlegungen

*Laura Maria Poreschack*

17.07.2018

MATHEMATISCHES INSTITUT

FAKULTÄT FÜR MATHEMATIK UND NATURWISSENSCHAFTEN

UNIVERSITÄT ZU KÖLN

Marc Kegel

# Zusammenfassung

In dieser Hausarbeit werden wir die Homologie einer orientierten, geschlossenen Mannigfaltigkeit über eine Henkelzerlegung einführen und die Invarianz der Homologie mittels des Satzes von Cerf beweisen.

## Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Henkelzerlegungen und Invarianten</b>	<b>2</b>
2.1	Henkelzerlegungen . . . . .	2
2.2	Invarianten . . . . .	3
<b>3</b>	<b>Homologie und Henkel</b>	<b>5</b>
	Literatur . . . . .	13

# 1 Einleitung

Üblicherweise wird der Begriff der Homologie anhand von Simplicial- oder Zellkomplexen eingeführt (vgl. Hatcher [4] für detaillierte Definitionen). Nach Smale lässt sich jeder kompakten, glatten Mannigfaltigkeit eine Henkelzerlegung zuordnen, so dass wir die Kettengruppen einer Mannigfaltigkeit auch über die Henkel einer Henkelzerlegung einer Mannigfaltigkeit definieren können. Um sinnvoll einen Randoperator definieren zu können, benötigen wir weiterhin, dass die Mannigfaltigkeit orientiert ist. Da solche Zerlegungen jedoch nicht eindeutig sind und sich mit Hilfe von Henkelbewegungen und dem Einführen bzw. Entfernen von aufhebenden Paaren ineinander überführen lassen (Cerf, [1]), muss die Invarianz dieser Definition unter solchen Bewegungen noch überprüft werden. Zu Beginn der Hausarbeit werden wir grundlegende Begriffe der Henkeltheorie erläutern und auf einige wichtige Resultate und Sätze verweisen. Anschließend geben wir eine kurze Beschreibung der Fundamentalgruppe über die Henkelzerlegung und illustrieren diese anhand einiger Beispiele. Im Hauptteil der Hausarbeit definieren wir Homologie über Henkelzerlegungen und geben eine kurze Beweisidee, warum diese Definition der Homologie äquivalent zur Definition über Simplicialkomplexe ist.

In der gesamten Arbeit werden wir uns auf glatte Mannigfaltigkeiten, Untermannigfaltigkeiten und Abbildungen beschränken.

## 2 Henkelzerlegungen und Invarianten

Einführend werden wir zunächst eine kurze Definition einer Henkelzerlegung geben, sowie einige wichtige Resultate aus der Henkeltheorie.

### 2.1 Henkelzerlegungen

*Definition 2.1.* Ein  $n$ -dimensionaler  **$k$ -Henkel**  $h_k$ , wobei  $k$  den „Index“ des Henkels bezeichnet, ist eine Kopie von  $D^k \times D^{n-k}$  angeheftet an den Rand einer Mannigfaltigkeit  $M^n$  mittels einer Einbettung, d.h. mittels einer Abbildung, die eingeschränkt auf ihr Bild ein Diffeomorphismus ist

$$\phi : \partial D^k \times D^{n-k} \hookrightarrow \partial M.$$

Die **Anklebesphäre** des Henkels ist gegeben durch  $A_k := \partial D^k \times \{0\}$  und die **Gürtelsphäre** durch  $G_k := \{0\} \times \partial D^{n-k}$ .

*Beispiel.* Für  $n = 3$  und  $k = 1$  erhalten wir Abbildung 1:

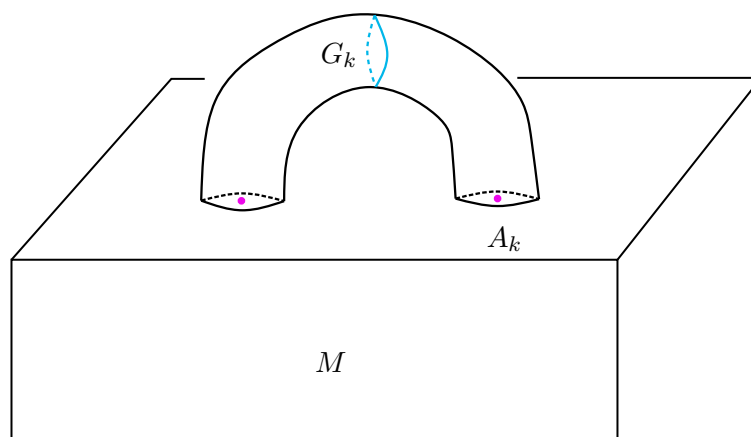


Abbildung 1: Ein 3-dimensionaler 1-Henkel mit Anklebe- und Gürtelsphäre.

Die Existenz von Henkelzerlegungen, d.h. die Zerlegung einer Mannigfaltigkeit in Henkel, bewies Smale 1960 mit folgendem Satz, vgl. [5].

**Satz 2.2.** *Jede glatte, kompakte Mannigfaltigkeit besitzt eine Henkelzerlegung.*

Des Weiteren ist das folgende Umordnungslemma für Henkelzerlegungen aus der Vorlesung bekannt.

**Lemma 2.3.** *Die Henkel können nach aufsteigendem Index sortiert werden, d.h. für  $l \leq k$  gilt  $(M \cup h_k) \cup h_l \cong (M \cup h_l) \cup h_k$ .*

Vergleiche hierzu Lemma 3 in [5]. Die Henkelzerlegung können wir nun ändern, indem wir Henkel bewegen oder bestimmte Henkelpaare aufheben.

*Definition 2.4.* Eine **Henkelbewegung** von  $h_k^1$  über  $h_k^2$  ist eine Isotopie der Anklebesphäre  $A_k^1$  in  $\partial(M \cup h_k^2)$  durch die Gürtelsphäre  $G_k^2$  von  $h_k^2$ .

**Lemma 2.5.** Die Anklebesphäre des Henkels  $h_k$  und die Gürtelsphäre von  $h_{k-1}$  schneiden sich genau dann transversal in genau einem Punkt, wenn

$$M \cup h_{k-1} \cup h_k \cong M$$

gilt, d.h. wenn die Henkel sich gegenseitig aufheben.

Eines der wichtigsten Resultate und Sätze in der Henkeltheorie ist der Satz von Cerf, vgl. [1].

**Satz 2.6.** Zwei Henkelbewegungen (nach aufsteigendem Index geordnet) einer kompakten Mannigfaltigkeit  $M$  lassen sich durch Henkelbewegungen und das Einführen und Entfernen von aufhebenden Paaren ineinander überführen.

## 2.2 Invarianten

Um Mannigfaltigkeiten zu unterscheiden, gibt es verschiedene Invarianten, wie zum Beispiel die Anzahl der Henkel *mod* 2 und die Eulercharakteristik.

**Lemma 2.7.** Sei  $M$  eine glatte, kompakte,  $n$ -dimensionale Mannigfaltigkeit mit einer Henkelzerlegung. Dann ist

$$h := \text{die Anzahl der Henkel in der Henkelzerlegung von } M \text{ mod } 2$$

eine Invariante von  $M$ .

*Beweis.* Seien  $H_1$  und  $H_2$  zwei Henkelzerlegungen von  $M$ . Nach Satz 2.6 von Cerf lassen sich die beiden Zerlegungen mit Hilfe von Henkelbewegungen und Einführen bzw. Entfernen von aufhebenden Paaren ineinander überführen. Wir überprüfen also die Invarianz von  $h$  unter diesen Aktionen.

- \* Henkelbewegungen ändern die Anzahl der Henkel nicht und somit bleibt die Parität von  $h$  erhalten.
- \* Bei Einfügen/ Entfernen von aufhebenden Paaren nimmt die Anzahl der Henkel entweder um zwei ab (Entfernen) oder um zwei zu (Einfügen). Auch dies ändert die Parität nicht.

Es folgt, dass  $h :=$  Anzahl der Henkel in der Henkelzerlegung von  $M$  *mod* 2 eine Invariante der Mannigfaltigkeit ist. □

Analog erfolgt der Beweis des folgenden Lemmas:

**Lemma 2.8.** Sei  $M$  eine glatte, kompakte,  $n$ -dimensionale Mannigfaltigkeit mit einer Henkelzerlegung. Dann ist

$$\chi(M) := \sum_{i=0}^m (-1)^i (\text{Anzahl der } i - \text{Henkel in der Henkelzerlegung von } M)$$

eine Invariante von  $M$ .

Die obige Definition der Invariante entspricht der üblichen Definition der Eulercharakteristik, wie man wie folgt sieht:

Es gilt die Verklebeformel

$$\chi(M \cup h_k) = \chi(M) + \chi(h_k) - \chi(M \cap h_k).$$

Ein  $k$ -Henkel

$$h_k = D^k \times D^{n-k}$$

hat Eulercharakteristik 1, da ein Henkel homotopieäquivalent zu einem Punkt ist. Für den Schnitt der Mannigfaltigkeit mit dem Henkel gilt

$$M \cap h_k = \partial D^k \times D^{n-k}.$$

Wir können den  $D^{n-k}$  Faktor zusammenziehen und somit ist der Schnitt der Mannigfaltigkeit mit dem Henkel homotopieäquivalent zu  $S^{k-1}$ , wobei die Eulercharakteristik der  $(k-1)$ -Sphäre von der Parität von  $k$  abhängt

$$\chi(S^{k-1}) = \begin{cases} 2 & \text{falls } k \text{ ungerade} \\ 0 & \text{falls } k \text{ gerade.} \end{cases}$$

Insgesamt folgt

$$\chi(M \cup h_k) = \chi(M) + 1 - \begin{cases} 2 & \text{falls } k \text{ ungerade} \\ 0 & \text{falls } k \text{ gerade} \end{cases} = \chi(M) + \begin{cases} -1 & \text{falls } k \text{ ungerade} \\ +1 & \text{falls } k \text{ gerade.} \end{cases}$$

Mit der üblichen Definition der Ketten- und Homologiegruppen gilt

$$\chi(M) = \sum_{i=0}^m (-1)^i \dim(C_i(M; \mathbb{Z})) = \sum_{i=0}^m (-1)^i \dim(H_i(M; \mathbb{Z})).$$

Da wir oben gesehen haben, dass wir die Eulercharakteristik auch über die alternierende Summe der Anzahlen der  $i$ -Henkel definieren können, werden wir im nächsten Kapitel die Kettengruppen ebenfalls über die Henkel einer Henkelzerlegung einer Mannigfaltigkeit definieren. Der Randoperator wird mittels der algebraischen Schnittzahl definiert, weshalb wir uns im folgenden Text auf orientierte, kompakte Mannigfaltigkeiten beschränken.

### 3 Homologie und Henkel

Beginnen wir zunächst mit der Berechnung der Fundamentalgruppe aus einer Henkelzerlegung. Die Fundamentalgruppe wird über Schleifen eingeführt, wobei betrachtet wird, ob diese sich zusammenziehen lassen. Schleifen, die homotop zueinander sind, können wir dann in Homotopieklassen zusammenfassen, welche die Elemente der Fundamentalgruppe bilden.

**Satz 3.1.** *Eine Henkelzerlegung einer  $n$ -dimensionalen, kompakten, glatten Mannigfaltigkeit  $M$  mit genau einem 0-Henkel liefert folgende Darstellung der Fundamentalgruppe  $\pi_1(M)$ , wobei die Orientierung auf den Kernscheiben der Henkel gewählt wird.*

\* Jeder 1-Henkel mit gegebener Orientierung bestimmt einen Erzeuger.

\* Durch Anheften eines 2-Henkels an den 1-Henkelkörper  $M_1$  mittels des Homöomorphismus

$$\phi : \partial D^2 \times D^{n-2} \hookrightarrow \partial M_1$$

berandet  $\beta = \partial D^2 \times \{0\}$  eine Scheibe in  $M_2$ . Nach dem Satz von Seifert und van Kampen (vgl. [2]) gilt also, dass die Fundamentalgruppe gegeben ist durch

$$\pi_1(M) = \pi_1(M_2) = \langle k_i \mid \beta_j \rangle,$$

wobei die erste Gleichung gilt, da Henkel von höherem Index die Darstellung der Fundamentalgruppe nicht beeinflussen, weil ihre Anklebesphären einfach zusammenhängend sind, vgl. [4] für Details.  $k_i$  sind hierbei die Kurven, die über den jeweiligen 1-Henkel  $h_1^i$  laufen, also der Kern des Henkels vereinigt mit einem Intervall, vgl. Abbildung 2.

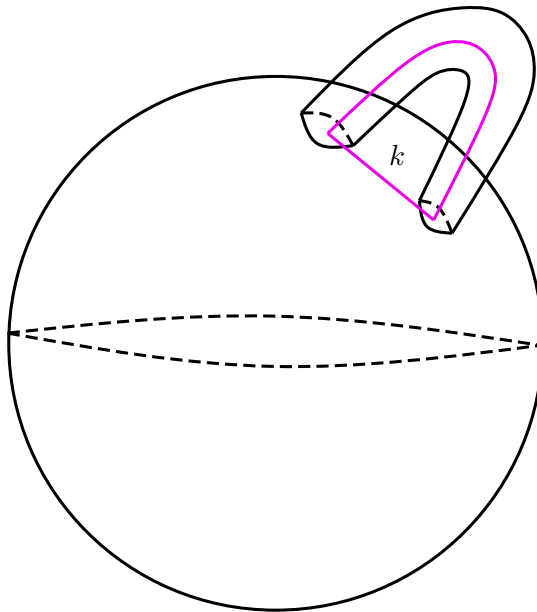


Abbildung 2: 3-dimensionales Beispiel einer Kurve  $k$  über einem 1-Henkel.

*Beispiel.* Mit Hilfe des obigen Satzes können wir nun die Fundamentalgruppe der folgenden Mannigfaltigkeiten bestimmen.

- \* Eine Mannigfaltigkeit ohne 2-Henkel, also von der Form

$$M = h_0 \cup h_1^1 \cup \dots \cup h_1^g,$$

hat Fundamentalgruppe

$$\pi_1(M) = \langle k_1, \dots, k_g \mid \emptyset \rangle,$$

wobei  $k_i$  für  $i = 1, 2, \dots, g$  die Kurve ist, die über den Henkel  $h_1^i$  läuft. Da keine 2-Henkel angeheftet werden, gibt es keine Relationen.

- \* Die 3-Sphäre  $S^3$  hat triviale Fundamentalgruppe

$$\pi_1(S^3) = \langle k \mid 1 = \beta = k \rangle,$$

wie man in folgendem Heegaard-Diagramm (Abb. 3) erkennen kann.

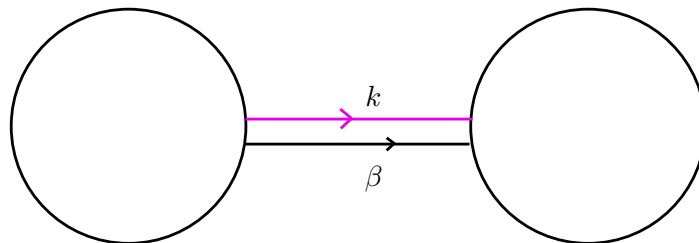


Abbildung 3: Heegaard-Diagramm der 3-Sphäre.

- \* Analog können wir die Fundamentalgruppe von  $S^1 \times S^2$  bestimmen und erhalten

$$\pi_1(S^1 \times S^2) = \langle k \mid 1 = \beta \rangle = \langle k \rangle \cong \mathbb{Z},$$

wie man in Abbildung 4 erkennt.

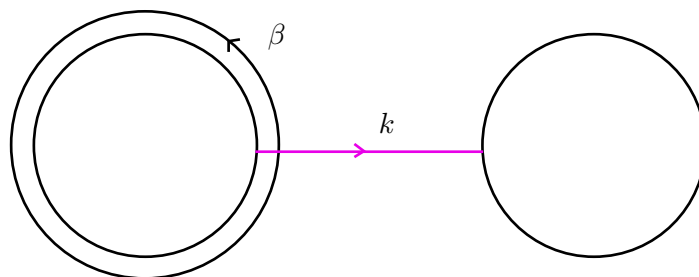


Abbildung 4: Heegaard-Diagramm von  $S^1 \times S^2$ .

Nun können wir eine Beschreibung der Homologie mittels Henkelzerlegungen geben, wobei nun notwendig ist, dass die Mannigfaltigkeit glatt und kompakt ist, da sonst die Existenz der Henkelzerlegung nicht gewährleistet ist. Außerdem nehmen wir an, dass  $M$  orientiert ist, damit wir den Randoperator sinnvoll definieren können.



*Definition 3.2.* Sei  $M$  eine geschlossene, orientierte  $n$ -dimensionale Mannigfaltigkeit. Wir betrachten zwei geschlossene, orientierte Untermannigfaltigkeiten  $N_1$  und  $N_2$  von  $M$ , so dass

$$\dim(N_1) + \dim(N_2) = n,$$

d.h.  $N_1$  und  $N_2$  schneiden sich generisch in  $\{p_1, \dots, p_l\}$ . In diesen Schnittpunkten  $p_1, \dots, p_l$  können wir nun die **algebraische Schnittzahl** bestimmen. Seien

$$T_{p_i}N_1 = \langle x_1, \dots, x_m \rangle \quad \text{und} \quad T_{p_i}N_2 = \langle x_{m+1}, \dots, x_n \rangle$$

wobei  $x_1, \dots, x_n$  so gewählt sind, dass  $\langle x_1, \dots, x_m \rangle$  und  $\langle x_{m+1}, \dots, x_n \rangle$  positiv orientierte Basen sind. Dann gilt

$$\langle x_1, \dots, x_m, x_{m+1}, \dots, x_n \rangle = T_{p_i}M.$$

Stimmen die Orientierungen von  $\langle x_1, \dots, x_m, x_{m+1}, \dots, x_n \rangle$  und  $T_{p_i}M$  überein, so ist die algebraische Schnittzahl im Punkt  $p_i$  gegeben durch  $+1$ , andernfalls durch  $-1$ . Die algebraische Schnittzahl von  $N_1$  und  $N_2$  ist dann gegeben durch die Summe der Schnittzahlen in den einzelnen Schnittpunkten  $p_1, \dots, p_l$ .

*Bemerkung.* Hier geht die Orientierung der Mannigfaltigkeit ein, weshalb wir uns in dieser Arbeit auf orientierbare Mannigfaltigkeiten beschränken.

*Definition 3.3.* Sei  $M$  eine geschlossene, orientierte  $n$ -dimensionale Mannigfaltigkeit mit einer Henkelzerlegung, wobei die Orientierung der Henkel auf den Kernscheiben gewählt wird. Wir definieren die **Kettengruppen**

$$C_k(M; \mathbb{Z}) := \langle h_k^1, \dots, h_k^l \rangle,$$

als die Gruppen, die von den  $k$ -Henkeln der Henkelzerlegung von  $M$  erzeugt werden, deren Orientierung auf den Kernscheiben gewählt wird, und den **Randoperator**  $\partial_{k+1} : C_{k+1}(M; \mathbb{Z}) \rightarrow C_k(M; \mathbb{Z})$  durch

$$\partial_{k+1}h_{k+1} = \sum_{i=1}^l (A_{k+1} \cdot G_k^i)h_k^i,$$

wobei  $() \cdot ()$  die algebraische Schnittzahl im Rand des  $k$ -Henkelkörpers  $M_k$ , d.h. der Rand des Henkelkörpers bestehend aus allen Henkeln  $h_i^j$  der Henkelzerlegung von  $M$  mit Index  $i \leq k$ , bezeichnet. Die Orientierung wird auf den Kernscheiben der Henkel gewählt, damit ist die Anklebesphäre als Rand des Kerns ebenfalls orientiert. Haben wir eine Orientierung auf den Kernscheiben gewählt, so können wir den Kokern des Henkels so orientieren, dass die Orientierung des Henkels mit der Orientierung der Mannigfaltigkeit übereinstimmt. Die Gürtelsphäre als Rand des Kokerns erbt dann diese Orientierung und ist auch orientiert. Da für die Dimensionen der Anklebe- und Gürtelsphäre der Henkel  $\dim(A_{k+1}) = \dim(S^k) = k$  und  $\dim(G_k) = \dim(S^{n-k-k}) = n - k - 1$  gilt, addieren sich die Dimensionen genau zu  $n - 1 = \dim(\partial(M_k))$  auf. Somit ist die algebraische Schnittzahl der Gürtelsphären der Henkel  $h_k^l$  mit der Anklebesphäre des  $(k + 1)$ -Henkels wohldefiniert.

*Bemerkung.* Die Definition des Randoperators lässt sich leicht mit Lemma 2.5 erklären. Wir hatten gesehen, dass für aufhebende Henkelpaare gilt, dass sich Anklebe- und Gürtelsphäre transversal in einem Punkt schneiden. Das Einfügen und Entfernen solcher aufhebenden Paare soll die Homologie nicht ändern, da wir eine Invariante der Mannigfaltigkeit definieren wollen. Wir definieren deshalb einen Randoperator, der diese algebraischen Schnittzahlen erfasst.

**Lemma 3.4.** Für den Randoperator  $\partial$  gilt  $\partial^2 = 0$ .

Man kann dieses Lemma unter Benutzung von Morse-Theorie (vgl. Kapitel 4 in [7]) oder zellulärer Homologie zeigen (siehe [4]). Ein direkter Beweis über Henkelzerlegungen soll in weiteren Arbeiten gegeben werden.

*Definition 3.5.* Die **Homologiegruppen** sind dann definiert als

$$H_k(M; \mathbb{Z}) := \text{Ker } \partial_k / \text{Im } \partial_{k+1}.$$

*Beispiel.* Die Homologiegruppen lassen sich anhand der Heegaard-Diagramme bestimmen.

- \* Um die erste Homologiegruppe des Linsenraums  $L(5, 1)$  zu bestimmen, betrachten wir zunächst folgendes Heegaard-Diagramm.

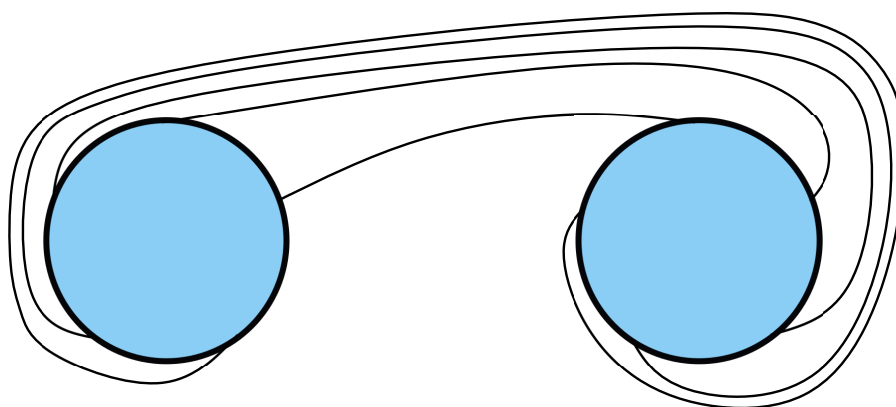


Abbildung 5: Heegaard-Diagramm von  $L(5, 1)$ .

Wie wir sehen, wird  $\mu_1 \mapsto \mu_2 - 5\lambda_2 = \beta$  geschickt, also gilt

$$H_1(L(5, 1); \mathbb{Z}) = \langle \lambda_2 \mid 5\lambda_2 \rangle \cong \mathbb{Z}_5.$$

Allgemein gilt  $H_1(L(p, q); \mathbb{Z}) = \langle \lambda_2 \mid p\lambda_2 \rangle \cong \mathbb{Z}_p$ .

- \* Wir können auch die Homologiegruppen des komplexen projektiven Raums  $\mathbb{C}P^m$  bestimmen. Es existiert eine Henkelzerlegung, die nur aus Henkeln mit geradem Index besteht, also

$$\mathbb{C}P^m = h_0 \cup h_2 \cup \dots \cup h_{2m}.$$

Dann gilt

$$H_k(\mathbb{C}P^m; \mathbb{Z}) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{falls } k \text{ gerade, } 0 \leq k \leq 2m \\ \{0\} & \text{sonst,} \end{cases}$$

da der Randoperator gegeben ist durch  $\partial_k = 0$  für alle  $0 \leq k \leq 2m$ .

- \* Außerdem können wir die Homologiegruppen des  $\mathbb{R}P^n$  bestimmen, wobei  $n$  ungerade ist, da der reelle projektive Raum sonst nicht orientierbar ist. Wir wissen, dass  $S^n$  eine Henkelzerlegung mit je zwei  $k$ -Henkeln besitzt für  $0 \leq k \leq n$ , wobei wir die Henkel so wählen können, dass  $h_k^1 = -h_k^2$ .

Diese Henkelzerlegung lässt sich wie folgt konstruieren. Für  $S^2$  erhält man Abbildung 6, in der die Schnittpunkte der Anklebe- und Gürtelsphären bereits gekennzeichnet sind.

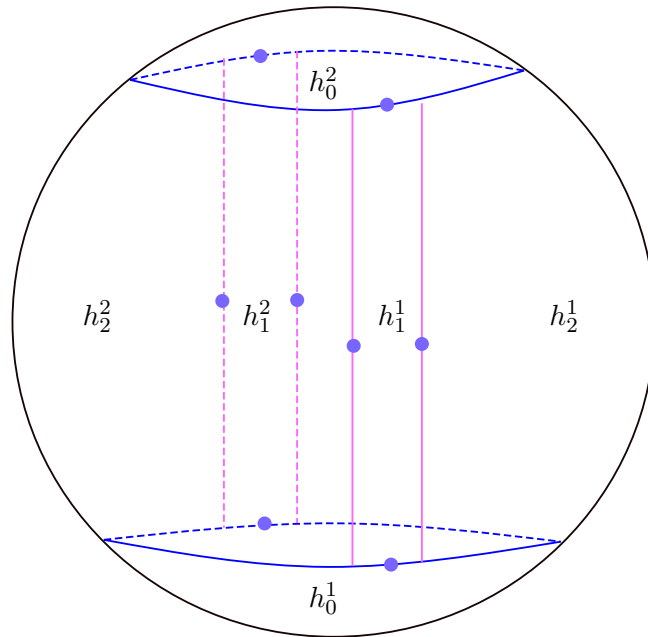


Abbildung 6: Eine Henkelzerlegung der  $S^2$ .

Allgemein lässt sich die  $n$ -Sphäre in zwei  $n$ -Henkel und eine verdickte  $S^{n-1}$  zerlegen, wie in Abbildung 7 gezeigt.

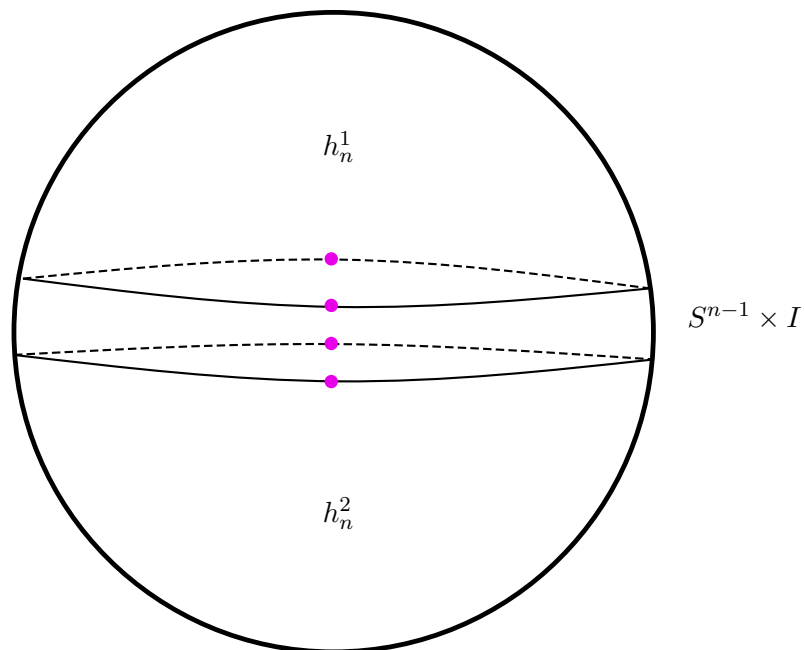


Abbildung 7: Die Zerlegung einer  $S^n$  in  $n$ -Henkel und eine verdickte  $S^{n-1}$  mit Schnittpunkten der Anklebe- und Gürtelsphären.

Induktiv können wir so die Henkelzerlegung der  $n$ -Sphäre mit je zwei  $k$ -Henkeln für  $0 \leq k \leq n$  konstruieren, wobei der Induktionsanfang bereits durch die oben abgebildete Henkelzerlegung der 2-Sphäre gegeben ist.

Nach Identifizierung der antipodalen Punkte der  $n$ -Sphäre erhalten wir mit der obigen Konstruktion eine Henkelzerlegung des  $\mathbb{R}P^n$  mit je einem  $k$ -Henkel für  $0 \leq k \leq n$ . Somit gilt

$$C_k(\mathbb{R}P^n; \mathbb{Z}) = \langle h_k \rangle \cong \mathbb{Z}.$$

Für den Randoperator  $\partial_k : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$  bestimmen wir die algebraische Schnittzahl der Anklebesphäre des  $k$ -Henkels mit der Gürtelsphäre des  $(k-1)$ -Henkels zunächst in der Henkelzerlegung von  $S^n$ . Wir erhalten

$$\begin{aligned} A_k &= \partial D^k \times \{0\} \cong S^{k-1} \times \{0\} \\ G_{k-1} &= \{0\} \times \partial D^{n-k} \cong \{0\} \times S^{n-k-1}. \end{aligned}$$

Aus der Konstruktion der Henkelzerlegung der  $S^n$  geht hervor, dass

$$A_k \cdot G_{k-1} = 1.$$

Allgemein gilt für den algebraischen Schnitt von zwei  $n$ -dimensionalen Mannigfaltigkeiten  $M$  und  $N$ , dass  $-M \cdot N = (-1)^{n+1} M \cdot N$ . Damit erhalten wir für den Schnitt des zweiten  $k$ -Henkels mit dem selben  $(k-1)$ -Henkel im  $\mathbb{R}P^n$

$$A'_k \cdot G_{k-1} = -A_k \cdot G_{k-1} = (-1)^k,$$

da  $h_k^2 = -h_k^1$ . Es genügt, die Gürtelsphäre des einen  $(k-1)$ -Henkels zu betrachten, da diese miteinander identifiziert werden. Es folgt, dass

$$A_k \cdot G_{k-1} = \begin{cases} 2 & \text{falls } k \text{ gerade} \\ 0 & \text{falls } k \text{ ungerade,} \end{cases}$$

also ist der Randoperator für  $k$  ungerade durch die Nullabbildung gegeben und für  $k$  gerade durch Multiplikation mit 2. Wir erhalten

$$\text{Ker}(\partial_k) = \begin{cases} 0 & \text{falls } k \text{ gerade} \\ \mathbb{Z} & \text{falls } k \text{ ungerade} \end{cases}$$

und

$$\text{Im}(\partial_k) = \begin{cases} 2\mathbb{Z} & \text{falls } k \text{ gerade} \\ \mathbb{Z} & \text{falls } k \text{ ungerade,} \end{cases}$$

somit sind die Homologiegruppen gegeben durch

$$H_k(\mathbb{R}P^n; \mathbb{Z}) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{falls } k = 0 \text{ oder } k = n \\ \mathbb{Z}_2 & \text{falls } 0 < k < n \text{ und } k \text{ ungerade} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

**Satz 3.6.** *Diese Definition von Homologie ist unabhängig von der Wahl der Henkelzerlegung, d.h. eine Invariante der Mannigfaltigkeit.*

*Beweis.* Wir nutzen wie im Beweis von Lemma 2.7 den Satz von Cerf (Satz 2.6) und überprüfen die Invarianz unter Henkelbewegungen und dem Einfügen bzw. Entfernen von aufhebenden Paaren. Sei  $h_{k+1}$  ein  $(k+1)$ -Henkel, der den Henkel  $h_k^i$  aufhebt. Dann folgt mit Lemma 2.5, dass sich Anklebe- und Gürtelsphäre transversal in einem Punkt schneiden, also

$$A_{k+1} \cdot G_k^i = \pm 1.$$

Nutzen wir die obige Definition, folgt direkt

$$\partial_{k+1} h_{k+1} = \pm h_k^i + \sum_{i \neq j} (A_{k+1} \cdot G_k^j) h_k^j.$$

Heben wir nun die Henkel miteinander auf, werden die Erzeuger  $h_{k+1}$  und  $h_k^i$  durch die Relationen  $h_{k+1} = 0$  und  $h_k^i = \mp \sum_{i \neq j} a_j h_j$  aus ihrer zugehörigen Kettengruppe entfernt. Das ändert die Homologie jedoch nicht. Dazu betrachtet man die Homologiegruppen  $H_{k+1}(M; \mathbb{Z})$  und  $H_k(M; \mathbb{Z})$ :

$$H_{k+1}(M; \mathbb{Z}) = \text{Ker } \partial_{k+1} / \text{Im } \partial_{k+2}$$

Da  $\partial_{k+1} h_{k+1} = \pm h_k^i + \sum_{i \neq j} a_j h_k^j$ , gilt  $h_{k+1} \notin \text{Ker } \partial_{k+1}$ , also auch  $h_{k+1} \notin H_{k+1}(M; \mathbb{Z})$ . Genauso ändert sich die  $k$ -te Homologie nicht, da  $h_k^i \in \text{Im } \partial_{k+1}$  und deshalb direkt in der Definition rausgeteilt wird. Somit gilt  $h_k^i \notin H_k(M; \mathbb{Z})$ .

Nun zur Henkelbewegung: Bewegen wir einen  $k$ -Henkel  $h_k$  über einen anderen  $k$ -Henkel  $h'_k$ , so ändert sich die kanonische Basis von  $C_k(M; \mathbb{Z})$ . Explizit ersetzen wir das Basiselement  $h_k$  durch  $h_k \pm h'_k$ , wobei das Vorzeichen von der Orientierung der Kernscheiben der Henkel abhängt. Basiswechsel ändern jedoch ebenfalls nichts an der Homologie der Mannigfaltigkeit, sondern lediglich an der Darstellung der Kettengruppen. □

*Bemerkung.* Die verschiedenen Definitionen von Homologie über Simplicialkomplexe und Henkelzerlegungen sind äquivalent. Betrachten wir einen Simplicialkomplex  $K$ , sind die Kettengruppen  $C_q(K; \mathbb{Z})$  definiert als die freien abelschen Gruppen erzeugt von den  $q$ -Simplizes für  $0 \leq q \leq \dim(K)$ . In einer Henkelzerlegung einer Mannigfaltigkeit der Dimension  $n$  ist der größtmögliche Index für einen Henkel ebenfalls  $n = \dim(M)$ . Jeder  $q$ -Simplex entspricht dann einem  $q$ -Henkel. Dafür betrachtet man eine Triangulierung der Mannigfaltigkeit, wie zum Beispiel in Abbildung 8. Um jede Ecke, d.h. um jeden 0-Simplex, wählen wir einen Ball und erhalten somit für jeden 0-Simplex einen  $n$ -dimensionalen 0-Henkel. Des Weiteren können wir für jeden 1-Simplex einen 1-Henkel definieren, indem wir die Bälle durch  $n$ -dimensionale 1-Henkel miteinander verbinden. So erhalten wir für jede  $q$ -Kettengruppe eine Basis aus  $q$ -Henkeln, wobei jeder Henkel einem  $q$ -Simplex, also einem Basiselement von  $C_q(K; \mathbb{Z})$  entspricht. Diese Basis ist genau die Basis der Kettengruppen aus Definition 3.3. Der Randoperator der simplicialen Homologie bildet einen  $q$ -Simplex auf die alternierende Summe seiner Seitenflächen ab, wobei die  $i$ -te Seitenfläche ausgelassen wird

$$\partial_q \sigma = \sum_{i=0}^q (-1)^i (x_0, \dots, \hat{x}_i, \dots, x_q),$$

also auf einen  $(q-1)$ -Simplex. Mit Hilfe des folgenden Beispiels erkennt man nun, dass die Definitionen der Randoperatoren äquivalent sind.

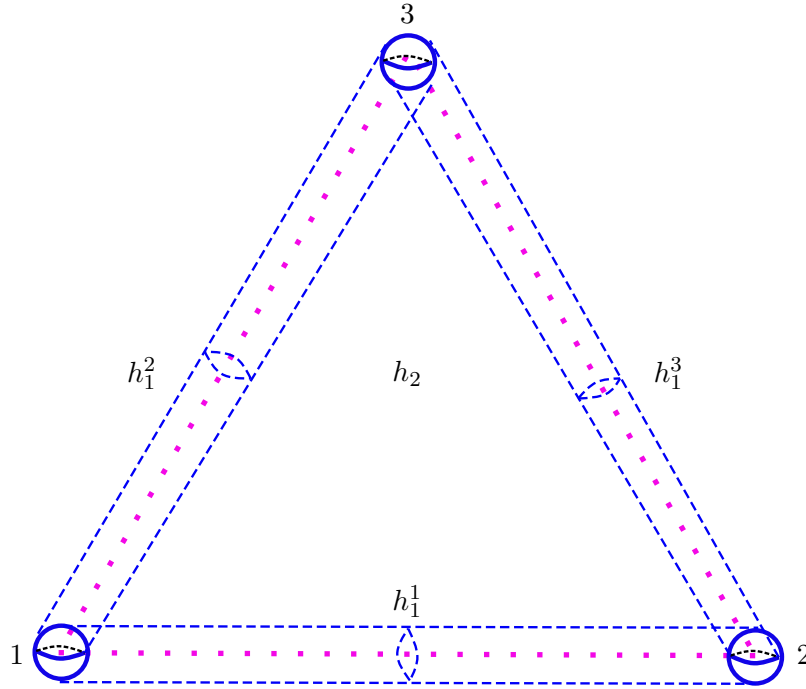


Abbildung 8: Übergang einer Triangulierung zu einer Henkelzerlegung.

Wie oben erklärt liefert die Triangulierung eine Henkelzerlegung. Für den Randoperator der Simplicialhomologie gilt nun

$$\begin{aligned} \partial_2(1, 2, 3) &= (-1)^0(2, 3) + (-1)^1(1, 3) + (-1)^2(1, 2) \\ &= (2, 3) - (1, 3) + (1, 2) \end{aligned}$$

In Abbildung 8 sind die Gürtelsphären bereits eingezeichnet, somit können wir ablesen, dass die Definition des Randoperators über eine Henkelzerlegung folgendes Ergebnis liefert.

$$\partial_2 h_2 = \sum_{i=1}^3 (A_2 \cdot G_1^i) h_1^i = h_1^1 - h_1^2 + h_1^3,$$

wobei die Vorzeichen durch die Orientierung der Kernscheiben bestimmt werden. Da zum Beispiel der 1-Simplex  $(2,3)$  dem 1-Henkel  $h_1^3$  entspricht, sind die Ergebnisse äquivalent. Sowohl die Kettengruppen als auch die Randoperatoren der beiden verschiedenen Definitionen sind äquivalent, somit sind die Definitionen von Homologie ebenfalls äquivalent.

## Literatur

- [1] J. CERF, La stratification naturelle des espaces de fonctions différentiables réelles et le théorème de la pseudo-isotopie, *Publications Mathématiques de l'Institut des Hautes Études Scientifiques*, **39** (1970), 7—170.
- [2] H. GEIGES, *Topologie*, Manuskript der Vorlesung im WS 2009/10.
- [3] R.E. GOMPF, A.I. STIPSICZ, *4-Manifolds and Kirby-Calculus*, Grad. Studies in Math. **20**, American Mathematical Society, Providence (1999).
- [4] A. HATCHER, *Algebraic topology*, Cambridge University Press, Cambridge (2002).
- [5] M. KEGEL, *Kirby-Kalkül*, Persönliche Mitschrift der Vorlesung im SS 2018.
- [6] Y. MATSUMOTO, *An Introduction to Morse Theory*, Transl. Math. Monogr. **208**, American Mathematical Society, Providence (2001).
- [7] M. SCHWARZ, *Morse Homology*, Progress in Mathematics **111**, Birkhäuser Verlag, Basel (1993).

## **Eigenständigkeitserklärung**

Hiermit versichere ich an Eides statt, dass ich die vorliegende Arbeit selbstständig und ohne die Benutzung anderer als der angegebenen Hilfsmittel angefertigt habe. Alle Stellen, die wörtlich oder sinngemäß aus veröffentlichten und nicht veröffentlichten Schriften entnommen wurden, sind als solche kenntlich gemacht. Die Arbeit ist in gleicher oder ähnlicher Form oder auszugsweise im Rahmen einer anderen Prüfung noch nicht vorgelegt worden. Ich versichere, dass die eingereichte elektronische Fassung der eingereichten Druckfassung vollständig entspricht.

Köln, 17. Juli 2018

Laura Maria Poreschack