SS 2018 Marc Kegel

Kirby-Kalkül

Übungsblatt 12

Aufgabe 1.
Beschreiben Sie die Beispiele der Dreiteilungen von S^4, $S^1 \times S^3$ und $\pm\mathbb{C}P^2$ aus der Vorlesung im Detail. Beschreiben Sie insbesondere auch die zugehörigen Morse-2-Funktionen.

Aufgabe 2.
Sei W eine 4-Mannigfaltigkeit mit einer (g,k)-Dreiteilung $W = X_1 \cup X_2 \cup X_3$.

(a) Wie berechnet man die Eulercharakteristik $\chi(W)$ von W aus der obigen Dreiteilung?

(b) Falls $k = 0$ ist, so ist W einfach zusammenhängend.

(c) Falls $k = g$ ist, so ist W diffeomorph zu $\#_k S^1 \times S^2$.

(d) Stabilisierung dieser (g,k)-Dreiteilung liefert eine $(g+3, k+1)$-Dreiteilung derselben 4-Mannigfaltigkeit.

Aufgabe 3.
Beschreiben Sie eine Geschlecht-2-Dreiteilung von $S^2 \times S^2$.
Hinweis: Betrachten Sie dazu die Funktion $S^2 \times S^2 \to I \times I$, die auf beiden S^2-Faktoren die Höhenfunktion darstellt.

Aufgabe 4.

(a) Das Dreiteilungsgeschlecht einer 4-Mannigfaltigkeit W ist 0 genau dann, wenn W diffeomorph zu S^4 ist.

(b) Zeigen Sie, dass das Dreiteilungsgeschlecht subadditiv unter der verbundenen Summe ist, d.h. zeigen Sie, dass
$$g(W_1 \# W_2) \leq g(W_1) + g(W_2)$$
gilt. Überlegen Sie sich dazu wie man ein Dreiteilungsdiagramm von $W_1 \# W_2$ aus Dreiteilungsdiagrammen von W_1 und W_2 erhalten kann.
Hinweis: Siehe Aufgabe 2 von Blatt 3.

(c) Zeigen Sie, dass die glatte 4-dimensionale Poincaré-Vermutung richtig ist, falls das Dreiteilungsgeschlecht additiv unter der verbundenen Summe ist.

Bonusaufgabe 1.
Beweisen Sie Lemma 9.5 aus der Vorlesung:
Jede dreigeteilte Morse-2-Funktion $W \to D^2$ auf einer 4-Mannigfaltigkeit W induziert eine Dreiteilung $W = X_1 \cup X_2 \cup X_3$. Wie erhält man g und k?

Bonusaufgabe 2.
Zeigen Sie, dass das Diagramm aus Abbildung 1 ein Dreiteilungsdiagramm einer 4-Mannigfaltigkeit W ist. Was ist die Fundamentalgruppe von W?

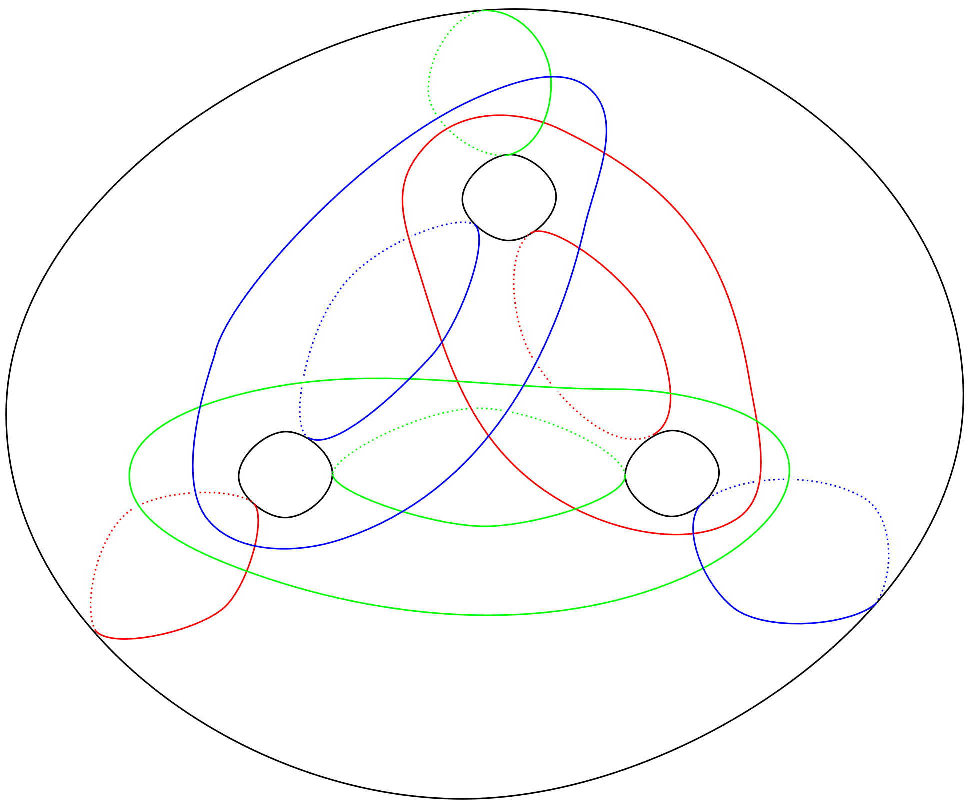

Abbildung 1: Ein Dreiteilungsdiagramm einer 4-Mannigfaltigkeit W.

Abgabe: Montag, 9.7.18 **vor** der Vorlesung.