SS 2018 Marc Kegel

Kirby-Kalkül

Übungsblatt 8

Aufgabe 1.

(a) Zeigen Sie, dass man eine Chirurgie von Index k in Dimension n durch eine geeignete Chirurgie **umkehren** kann, d.h. nach ausführen einer weiteren Chirurgie erhält man die ursprüngliche Mannigfaltigkeit zurück.

(b) Skizzieren Sie Index-k-Chirurgien und deren Umkehrungen in Dimension n für $k, n \leq 2$.

(c) **Bonusaufgabe:** Wie kann man Chirurgien von Index k in Dimension 3 visualisieren?

(d) Realisieren Sie die verbundene Summe in beliebiger Dimension als eine Chirurgie.

Aufgabe 2.

Ein Kirby-Diagramm ohne 1-Henkel einer 4-Mannigfaltigkeit W mit Rand M fassen wir als ganzzahliges Chirurgiediagramm von M auf.

(a) Wie berechnet man die Homologie-Gruppen von M? Wann ist M eine Homologiesphäre?

(b) Wie berechnet man die Homologie von M, wenn auch 1-Henkel vorhanden sind?

(c) **Bonusaufgabe:** Wie berechnet man die Homologie von ∂M aus einer Henkelzerlegung einer n-Mannigfaltigkeit?

(c) Wie berechnet man die Homologie-Gruppen einer 3-Mannigfaltigkeit aus einem rationalem Chirurgie-Diagramm?

(d) Zeigen Sie, dass man den 3-Torus nicht als rationale Chirurgie entlang eines Knotes K in S^3 erhalten kann. Beschreiben Sie ein Chirurgiediagramm von T^3 entlang einer Verschlingung mit 3-Komponenten. Kann man T^3 als Chirurgie entlang einer 2-Komponentenverschlingung erhalten?

(e) Für jede natürliche Zahl k gibt es eine 3-Mannigfaltigkeit die man als rationale Chirurgie entlang einer Verschlingung L in S^3 mit k Komponenten erhalten kann, aber nicht entlang einer Verschlingung in S^3 mit weniger als k Komponenten.

Aufgabe 3.

(a) Zeigen Sie, dass man jeden Knoten K in M als Knoten im Komplement eines jeden Chirurgiediagramms von M darstelllen kann.

(b) Wie berechnet man die Homologieklassse eines solchen Knotens $[K] \in H_1(M;\mathbb{Z})$?

(c) Ein Knoten besitzt eine Seifert-Fläche genau dann, wenn er nullhomolog ist.
Hinweis: Stellen Sie dazu einen Knoten K in M in einem Chirurgiediagramm $L \subset S^3$ von M dar und benutzen Sie die Seifert-Flächen von K und den Komponenten von L in S^3 um einen zweidimensionalen Komplex in M zu konstruieren, der den Knoten K berandet. Transformieren Sie diesen Komplex durch eine geeignete zweidimensionale Chirurgie in eine eingebettet Fläche mit Rand K in M.

Aufgabe 4.

(a) Erklären Sie wie man aus einem Chirurgiediagramm einer 3-Mannigfaltigkeit M eine Heegaard-Zerlegung von M erhält.
Hinweis: Benutzen Sie dazu eine leicht abgeänderte Version von Aufgabe 1 (a) von Blatt 4.

(b) Wie erhält man aus einer Heegaard-Zerlegung von M eine Chirurgiebeschreibung von M?

Bonusaufgabe 1.

(a) Beschreiben Sie einen Algorithmus um eine Präsentation der Fundamentalgruppe eines Verschlingungskomplements $S^3 \setminus \mathring{\nu} L$ zu bestimmen.

(b) Wie bestimmt man eine Präsentation der Fundamentalgruppe einer rationalen Chirurgie entlang einer Verschlingung L in S^3?

Abgabe: Montag, 11.6.18 **vor** der Vorlesung.