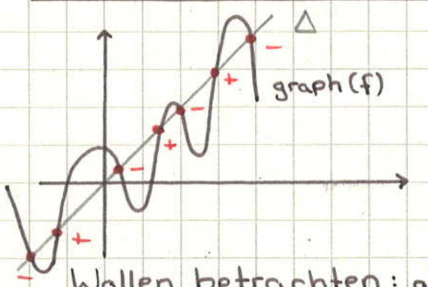
Fixpunktformel von Lefschetz

08.01.2019

Der Fixpunktsatz von Lefschetz besagt, dass bei bestimmten stetigen Abbildungen die Existenz eines Fixpunktes gesichert ist.

Motivation aus der Analysis: (z.B. Iterierte Abb., DGLs)



$\Delta = \{(x,x)\}$ Diagonale

$\mathrm{graph}(f) = \{(x, f(x))\}$

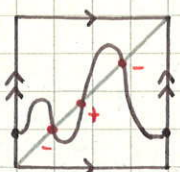
FP $\Rightarrow L(f) = -1$

Wollen betrachten: glatte Abb. $f: X \to X$, X top. Raum, auf einer kompakten, orientierten MF

Def. 1: x FP von f, wenn für $(x, f(x)) \in X \times X$ gilt: $(x, f(x)) \in \mathrm{graph}(f) \cap \Delta$

Def. 2: $I(\Delta, \mathrm{graph}(f))$ heißt globale Lefschetz-Zahl von f.
Notation: $L(f)$ „Orientierte Schnittzahl"

Beispiel: Torus $T^2 := S^1 \times S^1$



x=0 x=1

$f(x=0) = f(x=1)$

$\Rightarrow L(f) = -1$

Wir dürfen hier einfach zählen, weil hier nur transversale Schnitte auftreten.

Lefschetz Fixpunkt Satz: f Abb. auf MF wie oben
Es gilt: $L(f) \neq 0 \Rightarrow \exists$ FP
(Die Umkehrung des Satzes gilt nicht!)

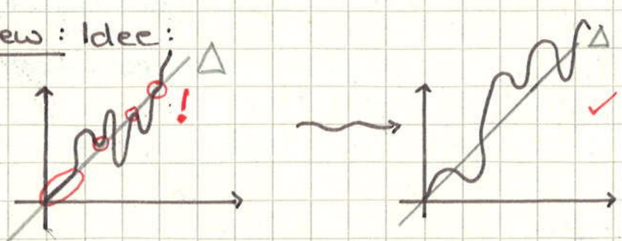
Bew.: f kein FP $\Rightarrow \Delta$ und $\mathrm{graph}(f)$ disjunkt $\Rightarrow$ transversal
$\Rightarrow L(f) = I(\Delta, \mathrm{graph}(f)) = 0$ $\square$

Proposition: $L(f)$ ist homotopieinvariant.
D.h. die Eigenschaft einen FP zu haben ist keine Eigenschaft der Abb., sondern der Homotopieklasse

Def. 3: f mit $\mathrm{graph}(f) \pitchfork \Delta$ heißt Lefschetz-Abb.
Eine Lefschetz-Abb. hat nur endlich viele FP.
Die „meisten" Abb. sind Lefschetz.

Proposition: Jede Abb. f ist homotop zu einer Lefschetz-Abb.

Bew: Idee:



wollen Transversalität erreichen

$\Rightarrow$ Nutze Transversalitäts-Theorem, aber muss Vorüberlegung machen:
$\mathrm{graph}(f) = \mathrm{im}(x \mapsto (x, f(x))) = \mathrm{im}(F)$ Transv. Hom. Th.: $\exists G: F \sim G$ s.d. $\mathrm{Im}(G) \pitchfork \Delta$
Wollen: $\mathrm{Im}(G) = \mathrm{graph}(g)$ s.d. $g \sim f$

homotop

Def. 4: $f: X \to X$, $f \sim Id$

$\Rightarrow$ (i) $L(Id) =: \chi(X)$

(ii) Falls f keinen FP $\Rightarrow \chi(X) = 0$

$I(\Delta, \Delta)$ schneiden sich nicht transversal, ist nicht wohldef., also stören wir ein bisschen

$\rightsquigarrow$ Wie prüfen wir, ob eine Abb. eine Lefschetz-Abb. ist?

Def. 5: x heißt Lefschetz-FP von f, falls $d_x f$ kein FP $\neq 0$ hat
(d.h. alle EW von $d_x f$ sind $\neq +1$)
f Lefschetz-Abb. $\Leftrightarrow$ alle FP von f sind Lefschetz-FP

Def. 6: lokale Lefschetz-Zahl: $L(f) = \sum_{f(x)=x} L_x(f)$
x Lefschetz-FP, $L_x(f)$ Orientierung von (x,x) in $\Delta \cap \text{graph}(f)$
$\hookrightarrow$ immer ± 1

(wollen Zahl, die nur von f in x abhängt, so wie wir es bei den VF gemacht haben $\rightsquigarrow$ haben summiert über NST und Indizes)

Proposition:

$L_x(f) = +1$, falls $d_x f - I$ die Orientierung erhält
$L_x(f) = -1$, falls $d_x f - I$ die Orientierung ändert
$\Rightarrow L_x(f) = \text{sign}(\det(d_x f - I))$

Bew.: $A = d_x f$, $\beta = \{v_1, \dots, v_k\}$ pos. orient. geordn. Basis von $T_x(X)$.
$\Rightarrow \{(v_1, v_1), \dots, (v_k, v_k)\}$ —— " —— von $T_{(x,x)}(\Delta)$
$\{(v_1, Av_1), \dots, (v_k, Av_k)\}$ —— " —— von $T_{(x,x)}(\text{graph}(f))$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \text{sign}(L_x(f)) &= \text{sign}(\{(v_1,v_1),\dots,(v_k,v_k),(v_1,Av_1),\dots,(v_k,Av_k)\}) \\
&= \text{sign}(\{(v_1,v_1),\dots,(v_k,v_k),(0,(A-I)v_1),\dots,(0,(A-I)v_k)\}) \\
&= \text{sign}(\{(v_1,0),\dots,(v_1,0),(0,(A-I)v_1),\dots,(0,(A-I)v_k)\}) \\
&= \text{sign}(\{\beta \times 0, 0 \times (A-I)\beta\}) \\
&= \text{sign}(\beta) \cdot \text{sign}((A-I)\beta)
\end{aligned}$$

Subtr. von lin. Komb. ändert die Orientierung nicht.

wird $+1$ falls $A-I$ Or. erhält, wird -1 falls $A-I$ Or. ändert

Beispiel: $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $A = d_0 f$, $f(x) = Ax + \mathcal{E}(x)$ mit $\mathcal{E}(x) \to 0$
A habe zwei unabh. reelle EV, also $A = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 \\ 0 & \alpha_2 \end{pmatrix}$, $\alpha_1, \alpha_2 > 0$
$\Rightarrow L_0(f) = \text{sign}((\alpha_1 - 1)(\alpha_2 - 1))$

1. Fall: $\alpha_1, \alpha_2 > 1 \Rightarrow L_0(f) = +1$


Quelle

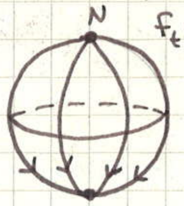
2. Fall: $\alpha_1, \alpha_2 < 1 \Rightarrow L_0(f) = +1$


Senke

3. Fall: $\alpha_1 < 1 < \alpha_2 \Rightarrow L_0(f) = -1$


Sattel

Beispiel: $f: S^2 \to S^2$, $f(x) = \pi(x + (0,0,-\frac{1}{2}))$ mit $\pi: \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \to S^2$, $x \longmapsto \frac{x}{|x|}$
f ist Lefschetz-Abb., da $f \sim Id$ via
$f_t(x) = \pi(x + (0,0,-\frac{t}{2}))$

N

S

N Quelle, S Senke
$L_N(f) = L_S(f) = +1$ $\leftarrow$ lokal wie im Bsp. zuvor

f bewegt jeden Punkt (außer Pole) nach Süden

$\Rightarrow L(f) = L_N(f) + L_S(f) = 2$

$\Rightarrow L(f) = 2 = \chi(S^2)$ (vgl. Vortrag zu VF)

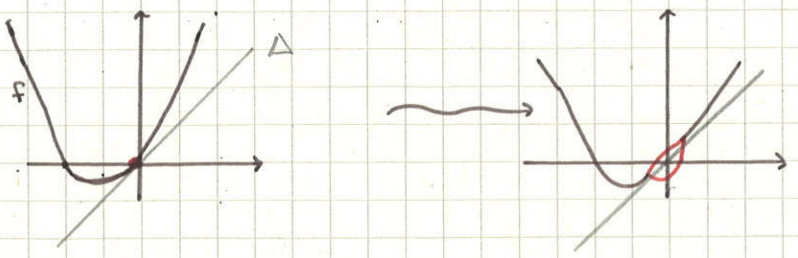
$\Rightarrow$ Allgemein: genus k:

Q +1
Sattel −1

S +1

$\Rightarrow \chi(X) = 2 - 2k$ Euler-Charakteristik!

Beispiel: Abb., die nicht Lefschetz ist: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$x \mapsto x^2 + x$



- Werden sehen: „komplizierte" FP sind aus Lefschetz-FP zusammen gesetzt

  $\Rightarrow$ Mit einer bel. kleinen Störung zerfällt der FP jeder Abb. f in Lefschetz-FP
  $\rightsquigarrow$ wie in der Physik bei instabilen Teilchen

Splitting Proposition: U Umgebung vom FP x und enthalte keinen weiteren FP von f. Dann ex. Homotopie f_t von f, s.d. f_1 nur Lefschetz-FP in U besitzt und jedes $f_t = f$ außerhalb einer komp. Teilmenge von U.

- Zahl der „Lefschetz-Teilchen" variiert, aber Summe der lokalen Lefschetz-Zahlen der resultierenden FP immer konstant
- ± 1 ~~im~~ ist vergleichbar mit elektrischer Ladung eines Teilchens und die Eigenschaft „homotopie invariant" der globalen Lefschetz-Zahl ist vergleichbar mit der Ladungserhaltung
- Lefschetz-FP können unterschiedliche Vorzeichen haben und in Paaren auftreten $\rightsquigarrow$ Materie und Antimaterie löschen sich aus

Wollen nun unsere „Teilchen" anschauen, ohne sie zuvor zu zerstören:

Motivation: im Euklid. Raum: $x \mapsto f(x) - x$ $\rightsquigarrow$ NST liefert FP

Def. 7: x isolierter FP in $\mathbb{R}^k$ und B Ball (abgeschl.) um x, der keinen weiteren FP enthält.

$$z \longmapsto \frac{f(z)-z}{|f(z)-z|} \text{ def. glatte Abb. } F: \partial B \to S^{k-1}$$

Der Grad dieser Abb. heißt lokale Lefschetz-Zahl von f in x.

Proposition: Def. 6 und Def. 7 stimmen überein in Lefschetz-FP.

Haben insgesamt:

$$L_x(f) = \deg\Big(\underbrace{z \longmapsto \frac{f(z)-z}{|f(z)-z|}}_{\text{Vektorfeld}}\Big) = \operatorname{ind}_x(V) = \chi(X)$$

Vortrag zu Vektorfelder

Euler-Charakteristik!