Théorie de Hodge abélienne et non-abélienne

Bruno Klingler

15 septembre 2011

Table des matières

1 Cours 1 - 13/09 **1**

1.1 Cohomologie . . . 1

1.2 Théorie de Hodge d'une variété riemannienne compacte . . . 3

1.3 Variétés complexes . . . 4

1.4 Variétés kähleriennes . . . 5

1 Cours 1 - 13/09

Ce premier cours donne un aperçu motivé de la théorie de Hodge classique pour les variétés kählériennes compactes. Les idées sont mises en avant, les preuves squelettiques voires absentes. On reviendra plus tard sur les notions obscures.

1.1 Cohomologie

Soit X une variété différentielle lisse. Un invariant algébrique utile de X est la cohomologie de de Rham.

Définition 1.1. Notons $A^i(X,\mathbb{C})$ les formes de degré i à coefficients complexes sur X. On a un opérateur $d : A^i(X,\mathbb{C}) \to A^{i+1}(X,\mathbb{C})$ vérifiant $d^2 = 0$. Le i-ème *groupe de cohomologie (complexe) de de Rham* de X est le i-ème groupe de cohomologie de ce complexe :

$$H^i_{dR}(X,\mathbb{C}) = \frac{\mathrm{Ker}(d : A^i(X,\mathbb{C}) \to A^{i+1}(X,\mathbb{C}))}{\mathrm{Im}(d : A^{i-1}(X,\mathbb{C}) \to A^i(X,\mathbb{C}))}.$$

La *cohomologie (complexe) de de Rham* de X est l'espace vectoriel gradué complexe $H^\bullet_{dR}(X,\mathbb{C}) = \oplus_{i\in\mathbb{N}} H^i(X,\mathbb{C})$. On définit de même les groupes de cohomologie réels de de Rham de X et $H^\bullet_{dR}(X,\mathbb{C}) = H^\bullet_{dR}(X,\mathbb{R}) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$.

Si X et Y sont deux variétés différentielles lisses difféomorphes, on a par définition $H^i_{dR}(X,\mathbb{C}) = H^i_{dR}(Y,\mathbb{C})$. En fait la cohomologie de de Rham est même un invariant homotopique.

Définition 1.2. Deux espaces topologiques X et Y sont *homotopiquement équivalents* s'il existe f et g deux applications continues, respectivement de X dans Y et de Y dans X tels que $g \circ f$ et $f \circ g$ soient respectivement homotopes à l'identité de X et à l'identité de Y.

Proposition 1.3. *Si les variétés différentielles (lisses) X et Y sont homotopiquement équivalentes, leur cohomologie de de Rham est isomorphe.*

Exemple 1.4. $X = \mathbb{R}^n$ est homotope à l'espace réduit à un point de cohomologie de de Rham égale à $\mathbb{C}$ en degré 0 et nulle sinon. Donc, $H^\bullet_{dR}(X,\mathbb{C}) = \mathbb{C}$, concentrée en degré 0.

Pour prouver la proposition 1.3. on montre que la cohomologie d'une variété peut se définir de manière purement topologique.

Définition topologique de la cohomologie.

Définition 1.5.
- Un *n-symplexe* $\sigma \subset \mathbb{R}^N$ est l'enveloppe convexe de $n+1$ points $v_0, \ldots, v_n$ de $\mathbb{R}^N$ affinement indépendants.
- Les *faces* de σ sont les $n-1$-symplexes dont les sommets sont ceux de σ.
- Une *orientation* de σ est un ordre sur les sommets de σ modulo l'action du groupe alterné.
- Un *polyèdre* P dans $\mathbb{R}^N$ est un sous-espace topologique de $\mathbb{R}^N$ de la forme $\bigcup_{\sigma\in\mathcal{N}} \sigma$ où $\mathcal{N}$ est un ensemble de symplexes de $\mathcal{R}^N$ vérifiant les conditions suivantes :
  - Si un symplexe est dans $\mathcal{N}$, ses faces aussi.
  - Si deux symplexes σ et τ de $\mathcal{N}$ sont d'intersection non vide, alors leur intersection est un symplexe dont les sommets sont sommets de σ et de τ.
  - Tout point de P admet un voisinage ne rencontrant qu'un nombre fini de symplexes.

Si P est un polyèdre, on note $\mathcal{N}^{(i)}$ l'ensemble de ses i-symplexes et C_i le groupe abélien libre de base $\mathcal{N}^{(i)}$. Pour chaque symplexe σ de $\mathcal{N}^{(i)}$, on fixe une orientation. On a un opérateur naturel $\delta_i : C_i \to C_{i-1}$ qui à un symplexe associe la somme orientée de ses faces :

$$\sigma \mapsto \sum_{\tau \text{ face de } \sigma} \pm\tau,$$

où le signe $\pm$ vaut 1 quand l'orientation de τ est obtenue de l'orientation de σ en ôtant un sommet en position paire et -1 sinon.

On vérifie que $\delta^2 = 0$. On définit ainsi l'homologie (entière) de P comme l'homologie de Betti du complexe (C_i, δ) et la cohomologie (entière) de Betti de P comme la cohomologie du complexe dual (C^i, d), où C^i est le dual de C et $d^i : C^i \to C^{i+1}$ est l'application duale de δ_{i+1}.

On a donc $H^i_B(P, \mathbb{Z}) = \frac{\operatorname{Ker} d^i}{\operatorname{Im} d^{i-1}}$.

Proposition 1.6.
- *Deux polyèdres homotopiquement équivalents ont même cohomologie de Betti.*
- *Toute variété différentielle est homéomorphe à un polyèdre.*

Ce résultat permet de définir la cohomologie de Betti d'une variété différentielle X comme la cohomologie de Betti d'un polyèdre qui lui est homéomorphe.

Remarque 1.7. On peut aussi définir l'homologie et la cohomologie de Betti d'un polyèdre, à coefficients dans un corps k. On obtient alors $H^i_B(X, \mathbb{C}) = H^i_B(X, \mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}$, et de même pour les coefficients réels.

Théorème 1.8. *Si X est une variété différentielle, $H^i_{dR}(X, \mathbb{C}) \cong H^i_B(X, \mathbb{C})$.*

Le théorème 1.8 peut se montrer de différentes façons :
- comme $H^\bullet_B(X, \mathbb{C})$ est dual à l'homologie $H^B_\bullet(X, \mathbb{C})$ du complexe $(C_\bullet(X), \delta)$, il suffit de réaliser un pairing parfait $H^i_{dR}(X, \mathbb{C}) \times H^B_i(X, \mathbb{C}) \longrightarrow \mathbb{C}$. Intuitivement ce pairing s'obtient en « intégrant »les formes sur les simplexes. Reste à montrer que c'est possible bien que les simplexes soient des espaces singuliers.
- une méthode plus conceptuelle consiste à montrer un double isomorphisme

$$H^\bullet_{dR}(X, \mathbb{C}) \simeq H^\bullet(X, \mathbb{C}_X) \simeq H^\bullet_B(X, \mathbb{C}) \ ,$$

  où le terme du milieu désigne la cohomologie du faisceau constant $\mathbb{C}_X$ sur X. L'isomorphisme de gauche provient du quasi-isomorphisme de complexe de faisceaux de groupes abéliens $\mathbb{C}_X \simeq \mathcal{A}^\bullet_X$, où $\mathcal{A}^i_X$ désigne le faisceau fin des formes différentielles complexes de degré i sur X, de sections globales $A^i(X)$. L'isomorphisme de droite s'obtient lui aussi via un quasi-isomorphisme $\mathbb{C}_X \simeq \mathcal{C}^\bullet_{B,X}$, où $\mathcal{C}^i_{B,X}$ désigne le faisceau mou obtenu par faisceautisation du préfaisceau $U \longrightarrow C^i_B(U)$ (après passage à la limite sur toutes les triangulations possibles).

Exemple 1.9. Soit C_g une surface de Riemann de genre g. Alors $H^i(C_g, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$ en degré 0 et 2 ; $\mathbb{Z}^{2g}$ en degré 1.

Structure d'algèbre.
- $H_B(X,\mathbb{Z})$ est une $\mathbb{Z}$-algèbre graduée ; i.e. il existe un produit interne sur $H_B(X,\mathbb{Z})$ et la restriction de ce *cup-produit* à $H_B^i(X,\mathbb{Z}) \times H_B^j(X,\mathbb{Z})$ est à valeurs dans $H_B^{i+j}(X,\mathbb{Z})$.
- Pour une variété différentiable X, le cup-produit est donné, en cohomologie de de Rham, par passage au quotient du wedge $\wedge$ sur les formes différentielles.

Dualité de Poincaré. Soit X une variété topologique compacte connexe orientée de dimension n. Le n-ème groupe de cohomologie rationnelle (de Betti) $H_B^n(X,\mathbb{Q})$ est isomorphe à $\mathbb{Q}$. On a de plus la dualité de Poincaré.

Théorème 1.10 (Dualité de Poincaré)**.** *L'accouplement* $H_B^i(X,\mathbb{Q}) \times H_B^{n-i}(X,\mathbb{Q}) \to H_B^n(X,\mathbb{Q}) \cong \mathbb{Q}$ *est parfait.*

Remarque 1.11. Ce théorème est faux pour des espaces plus singuliers.
- $X = S^2 \vee S^2$. On a $H^0(X) = \mathbb{Z}$, $H^1(X) = 0$ et $H^2(X) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$.
- $X = \Sigma(S^1 \times S^1)$ la suspension de $S^1 \times S^1$: on considère l'espace $S^1 \times S^1 \times I$ et on identifie les points de $S^1 \times S^1 \times \{0\}$ puis les points de $S^1 \times S^1 \times \{1\}$. On a $H^0(X) = \mathbb{Z}$, $H^1(X) = 0$, $H^2(X) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ et $H^3(X) = \mathbb{Z}$.

Classe d'une sous-variété. Soit Y une sous-variété de codimension r de X compacte orientée de dimension n. Sur $\mathbb{C}$, on a une application

$$\begin{aligned} H^{n-r}(X,\mathbb{C}) &\to \mathbb{C} \\ [\alpha] &\mapsto \int_Y \alpha \end{aligned}$$

Cette application est un élément du dual de $H^{n-r}(X,\mathbb{C})$, identifié à $H^r(X,\mathbb{C})$ par dualité de Poincaré. On note $\mathrm{cl}(Y)$ ou $[Y] \in H^r(X,\mathbb{C})$ la *classe de la sous-variété* Y ainsi construite. On montre qu'en fait cette classe appartient à $H_B^r(X,\mathbb{Z})$ en cohomologie de Betti.

1.2 Théorie de Hodge d'une variété riemannienne compacte

Soit (X,g) une variété riemannienne compacte orientée. On considère $[\alpha] \in H^\bullet(X,\mathbb{C})$ et on cherche un meilleur représentant de $[\alpha]$, grâce à la structure géométrique mise sur X. Ici on minimise une certaine fonction d'énergie E.

On définit $E(\gamma)$ l'énergie d'une forme différentielle γ par $E(\gamma) = \int_X ||\gamma_x||_g^2 \, d\mu_g$, où $||.||$ est la norme sur $\Lambda^\bullet T^*X$, déduite de la structure riemannienne de X et $d\mu_g$ est la forme volume canoniquement associée à la métrique et à l'orientation de X. On cherche à minimiser E sur l'ensemble des formes fermées γ cohomologues à α.

Notons $\gamma = \alpha + d\beta$. Alors, naïvement,

$$\begin{aligned} d_\alpha E.d\beta &= \int_X g(\alpha, d\beta)\, d\mu_g \\ &= \int_X g(d_g^*\alpha, \beta)\, d\mu_g \\ &= 0, \forall \beta \text{ si } \alpha \text{ minimise } E \end{aligned}$$

Ceci implique $d_g^*\alpha = 0$ en plus de $d\alpha = 0$. En définissant le Laplacien Δ_g par $dd_g^* + d_g^*d : A^i(X,\mathbb{C}) \to A^i(X,\mathbb{C})$, on obtient la condition équivalente $\Delta_g\alpha = 0$. En effet, si $d_g^*\alpha = d\alpha = 0$, il est clair que le Laplacien de α s'annule ; et réciproquement, si $\Delta\alpha = 0$, alors par adjonction $(\Delta\alpha, \alpha) = (d\alpha, d\alpha) + (d_g^*\alpha, d_g^*\alpha) = 0$ ce qui implique $d_g^*\alpha = d\alpha = 0$.

Définition 1.12. Une forme $\alpha \in A^i(X,\mathbb{C})$ est *harmonique* si $\Delta_g\alpha = 0$. On note $\mathcal{H}^\bullet(X,\mathbb{C}) = \oplus \mathcal{H}^i(X,\mathbb{C})$ l'espace vectoriel complexe gradué des formes harmoniques complexes sur X.

On a alors le théorème de Hodge.

Théorème 1.13. *Soit X une variété riemannienne compacte orientée. Alors l'application naturelle $\mathcal{H}^i(X,\mathbb{C}) \to H^i(X,\mathbb{C})$ est un isomorphisme.*

Remarque 1.14. En général, $\mathcal{H}^\bullet(X,\mathbb{C})$ n'admet pas de structure d'algèbre : le wedge de deux formes harmoniques n'est pas nécessairement harmonique. C'est le cas sur les tores munis d'une structure riemannienne plate, ou plus généralement sur les espaces localement symétriques.

1.3 Variétés complexes

Définition 1.15. Une *variété complexe* X de dimension n est la donnée d'un espace topologique séparé X, d'un recouvrement ouvert de X par les U_i et d'homéomorphismes $\phi_i : U_i \to V_i$ où V_i est un ouvert de $\mathbb{C}^n$ tels que les changements de cartes $\phi_i \circ \phi_j^{-1} : \phi_j(U_i \cap U_j) \to \phi_i(U_i \cap U_j)$ soient des biholomorphismes.

Autour de chaque point de X, on a localement des coordonnées holomorphes $z_1, \ldots, z_n$. En notant x_k et y_k la partie réelle et la partie imaginaire de z_k, on obtient des coordonnées $(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n)$ pour la variété différentielle sous-jacente à X. Définissons les formes différentielles (à valeurs complexes) dz_k et $\overline{dz_k}$ sur la variété différentielle sous-jacente à X par $dz_k = dx_k + idy_k$ et $\overline{dz_k} = dx_k - idy_k$. Alors toute forme différentielle sur (la variété différentielle sous-jacente à) X s'écrit localement

$$\sum f(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n) dz_{i_1} \wedge \cdots \wedge dz_{i_p} \wedge \overline{dz_{j_1}} \wedge \cdots \wedge \overline{dz_{j_q}},$$

où f est une fonction à valeurs complexes et i_k, j_l sont des indices compris entre 1 et n.

On dénote par $A^{p,q}(X)$ les formes de type (p,q), engendrées par les $f dz_{i_1} \wedge \cdots \wedge dz_{i_p} \wedge \overline{dz_{j_1}} \wedge \cdots \wedge \overline{dz_{j_q}}$ et on a la décomposition $A^i(X,\mathbb{C}) = \oplus_{p+q=i} A^{p,q}(X)$.

La restriction de l'opérateur d à $A^{p,q}(X)$ est à valeurs dans $A^{p+1,q}(X) \oplus A^{p,q+1}(X)$ et on note $\partial, \bar\partial$ les projections de d sur le premier et le second facteurs.

Définition 1.16. On définit l'espace $H^{p,q}(X)$ par

$$H^{p,q}(X) = \frac{\text{formes différentielles d-fermées de type (p,q)}}{\text{formes différentielles d-exactes de type (p,q)}}.$$

Remarque 1.17. On a un morphisme naturel $\oplus_{p+q=i} H^{p,q}(X) \to H^i(X,\mathbb{C})$. En général, ce morphisme n'est ni injectif, ni surjectif.

Exemples.

L'espace projectif $\mathbb{C}P^n$. C'est l'ensemble des droites complexes de $\mathbb{C}^{n+1}$. Topologiquement, on peut le voir comme l'ensemble quotient de $\mathbb{C}^{n+1} - \{0\}$ par l'action de $\mathbb{C}^*$ par homothétie sur cet espace. On munit cet espace d'une structure de variété complexe.

Un point de $\mathbb{C}P^n$ est noté $[z_0 : \ldots : z_n]$ s'il est l'image d'un point $(z_0, \ldots, z_n)$ par la projection canonique $\mathbb{C}^{n+1} - \{0\} \to \mathbb{C}P^n$. Les coordonnées $[z_0 : \ldots : z_n]$ ne sont donc définies qu'à un facteur multiplicatif près. Notons U_i l'ouvert de $\mathbb{C}P^n$ constitué des points $[z_0 : \ldots : z_n]$ avec z_i non nul. On a un homéomorphisme $\phi_i : U_i \to \mathbb{C}^n$, qui à $[z_0 : \ldots : z_n]$ associe le point $(\frac{z_0}{z_i}, \ldots, \frac{z_{i-1}}{z_i}, \frac{z_{i+1}}{z_i}, \ldots, \frac{z_n}{z_i})$ de $\mathbb{C}^n$. Le changement de carte $\phi_i \circ \phi_j^{-1}$ (avec $i < j$) va de V_i dans V_j où V_k est l'ouvert de $\mathbb{C}^n$ constitué des points dont la k-ème coordonnées est non nulle. On a la formule :

$$\phi_i \circ \phi_j^{-1}(z_1, \ldots, z_n) = (\frac{z_1}{z_i}, \ldots, \frac{z_{i-1}}{z_i}, \frac{z_{i+1}}{z_i}, \ldots, \frac{1}{z_i}, \ldots, \frac{z_n}{z_i}),$$

où le terme $\frac{1}{z_i}$ apparaît en j-ème position.

Les variétés projectives (lisses). Ce sont les sous-variétés analytiques complexes (lisses) des $\mathbb{C}P^n$. Par le théorème de Chow, elles peuvent être décrites par des équations polynomiales.

Les tores complexes. Soit V un espace vectoriel complexe de dimension n et Γ un réseau de V (i.e. un $\mathbb{Z}$-module libre de rang $2n$ dans V). On définit le tore complexe $X = \Gamma\backslash V$. Topologiquement, c'est simplement un produit $(S^1)^{2n}$ mais on peut se demander quand deux tores $\Gamma_1\backslash V$ et $\Gamma_2\backslash V$ sont biholomorphes.

Dans le cas $n = 1$, $\Gamma = z_1\mathbb{Z} + z_2\mathbb{Z}$ et, par multiplication par $\pm\frac{1}{z_1}$, on se ramène à $\Gamma = \mathbb{Z} + \tau\mathbb{Z}$ avec τ dans le demi-plan de Poincaré $\mathbb{H}$

Exercice 1.18. Les tores $(\mathbb{Z} + \tau_1\mathbb{Z})\backslash\mathbb{C}$ et $(\mathbb{Z} + \tau_2\mathbb{Z})\backslash\mathbb{C}$ sont biholomorphes si et seulement s'il existe A dans $SL_2(\mathbb{Z})$ telle que $A\tau_1 = \tau_2$.

Il existe ainsi une famille complexe analytique de tores complexes de dimension 1, paramétrée par l'espace $SL(2,\mathbb{Z})\backslash\mathbb{H}$. Chacun de ces tores complexes est en fait projectif : une courbe elliptique, et l'espace $SL(2,\mathbb{Z})\backslash\mathbb{H}$ s'identifie à $\mathbb{C}$.

En dimension supérieure par contre, très peu de tores complexes admettent une structure algébrique : cf. cours 4.

Les quotients. On rappelle d'abord la définition d'une action propre, dans le cadre différentiable.

Définition 1.19. Soit G un groupe de Lie agissant de façon lisse sur une variété différentiable X. L'action de G sur X est *propre* si, pour tout compact K de X, l'ensemble $\{g \in G | K \cap gK \neq \emptyset\}$ est compact dans G.

Soit X une variété complexe, G un groupe de Lie complexe agissant sur X par biholomorphismes et de manière libre et propre.

Lemme 1.20. *Sous ces hypothèses, il existe une unique structure de variété complexe sur le quotient $G\backslash X$ rendant la projection canonique $X \to G\backslash X$ holomorphe.*

Exemple 1.21. Soit $\mathbb{D}^n \subset \mathbb{C}^n$ la boule unité ouverte dans $\mathbb{C}^n$. Il peut aussi être vu comme l'ouvert de $\mathbb{C}P^n$: $\{[\omega] \in \mathbb{C}P^n \,|< w, w >< 0$, où $< w, w >= |w_0|^2 + \cdots + |w_{n-1}|^2 - |w_n|^2$ via la carte U_n de $\mathbb{C}P^n$. Les automorphismes (biholomorphes) de $\mathbb{D}^n$ s'identifient au groupe $PU(n, 1)$. Si Γ est un sous-groupe discret, cocompact et sans-torsion de $PU(n, 1)$ (de tels groupes existent), on peut considérer $X = \Gamma\backslash\mathbb{D}^n$. Ces variétés complexes sont toujours projectives.

Remarque 1.22. Dans le cas $n = 1$, on construit ainsi toutes les surfaces de Riemann de genre $g \geq 2$.

Variétés de Hopf. Soit $\lambda \in]0, 1[$. Le groupe $\lambda^{\mathbb{Z}}$ agit naturellement sur $\mathbb{C}^n - \{0\}$ et l'action est propre, libre et par biholomorphismes. Notons X la variété de Hopf quotient, difféomorphe au produit $S^1 \times S^{2n-1}$.

Dans le cas $n = 2$, on calcule $H^{1,0}(X) = H^{0,1}(X) = 0$ et $H^1(X) = \mathbb{Z}$ (cf. remarque 1.2).

Variétés de drapeaux. Soit V un espace vectoriel complexe de dimension $n + 1$, $0 < k_1 < \cdots < k_l < n + 1$ des entiers. L'ensemble $\mathrm{Flag}(V, k_1, \ldots, k_l) = \{W_1 \subset \ldots W_l \subset V | \dim W_i = k_i\}$ s'identifie à l'espace homogène $P(n+1, k_1, \ldots, k_l)\backslash GL(n+1, \mathbb{C}))$, où $P(n+1, k_1, \ldots, k_l)$ est le sous-groupe parabolique des matrices triangulaires par blocs avec, sur la diagonale, des blocs carrés de taille $k_1, k_2 - k_1, \ldots, n + 1 - k_l$.

1.4 Variétés kähleriennes

Soit X une variété complexe munie d'une métrique riemannienne $g : T_{\mathbb{R}}X \times T_{\mathbb{R}}X \to \mathbb{R}$. On peut complexifier g en $g_{\mathbb{C}} : T_{\mathbb{C}}X \times T_{\mathbb{C}}X \to \mathbb{C}$. On dit que la métrique g est *compatible avec la structure complexe* sur X si $g_{\mathbb{C}}(JX, JY) = g_{\mathbb{C}}(X, Y)$, où $J : T_{\mathbb{C}}X \to T_{\mathbb{C}}X$ est le complexifié de l'endomorphisme $J : T_{\mathbb{R}}X \to T_{\mathbb{R}}X, J^2 = -1$, definissant la structure complexe de X.

Le fibré tangent complexifié admet une décomposition $T_{\mathbb{C}}X = TX \oplus \overline{TX}$ où TX désigne le fibré tangent holomorphe. Si g est compatible avec la structure complexe de X, on vérifie que $g_{\mathbb{C}}(u, v) = 0$ quand u et v appartiennent tous les deux, soit à TX, soit à $\overline{TX}$. Avec des coordonnées holomorphes locales $(z_1, \ldots, z_n)$, on définit $g_{i\bar{j}} = g(\frac{\partial}{\partial z_i}, \frac{\partial}{\partial \bar{z_j}})$ et la métrique hermitienne h sur TX par $h = g_{i\bar{j}} dz^i \otimes \overline{dz^j}$. On vérifie que $g = 2\,\Re\, h$.

Définition 1.23. Soit $\omega = -\Im h = i g_{k\bar{l}} dz^k \wedge d\overline{z_l} \in \mathbb{A}^{1,1}(X,\mathbb{R})$. On dit que (X,g) est une *variété kählerienne* si $d\omega = 0$.

Remarque 1.24. La classe de ω en cohomologie de de Rham vit ainsi dans $H^{1,1}(X)$. La positivité de h implique que $[\omega]^{\dim(X)}$ est non nulle et est donc une forme volume.

Lemme 1.25. *(X,h) est une variété kählerienne si, et seulement si, au voisinage de tout $x \in X$, il existe des coordonnées holomorphes $(z_1,\ldots,z_n)$ telles que $h = \sum_{i,j}(\delta_{i,j} + [2])\, dz_i \otimes d\bar{z_j}$, où dans $[2]$ ne figurent que des termes d'ordre au moins 2 en les coordonnées $(z_1,\ldots,z_n)$. Localement, la métrique hermitienne d'une variété kählerienne coïncide donc avec la métrique standard sur $\mathbb{C}^n$, jusqu'aux termes d'ordre 1.*

Remarque 1.26. Ainsi, ce qui est vrai pour la métrique plate sur $\mathbb{C}^n$ et qui ne fait intervenir que la métrique à l'ordre 1 doit être vrai pour les variétés kähleriennes.

Exemple 1.27. L'espace projectif $\mathbb{C}P^n$ muni de la métrique de Fubini-Study est une variété kählerienne. La métrique de Fubiny-Study s'obtient de la façon suivante : la sphère S^{2n+1} admet la fibration de Hopf π sur $\mathbb{C}P^n$, de fibre S^1. La métrique de Fubini-Study est l'unique métrique sur $\mathbb{C}P^n$ telle que $d\pi$ réalise une isométrie sur l'orthogonal des fibres, pour la métrique ronde usuelle sur S^{2n+1}

Exercice 1.28. Calculer la métrique de Fubini-Study dans les coordonnées usuelles et retrouver pour cet exemple le lemme 1.25.

Corollaire 1.29. *Toute variété projective lisse est kählerienne.*

Démonstration. On montre plus généralement qu'une sous-variété complexe N d'une variété kählerienne M est kählerienne. La forme hermitienne sur M induit par restriction une forme hermitienne sur N et les formes de Kähler ω_M et ω_N correspondantes vérifient $\omega_N = j^*\omega_M$, avec j l'inclusion de N dans M. La forme ω_N est fermée car l'opérateur d commute avec le pull-back, donc N munie de cette forme hermitienne est une variété kählerienne. □

Le théorème de Kodaira caractérise les variétés projectives parmi les variétés kähleriennes compactes.

Théorème 1.30 (Théorème de Kodaira)**.** *Soit X une variété kählerienne compacte. C'est une variété projective si, et seulement si, elle admet une forme de Kähler $\omega \in A^{1,1}(X)$ telle que $[\omega] \in H^{1,1}(X,\mathbb{Q})$.*

Exemple 1.31. Les tores complexes sont Kähler mais ils ne sont en général pas projectifs, en dimension ≥ 2. On appelle *variétés abéliennes complexes* les tores complexes projectifs.

Théorème 1.32. *Soit X une variété kählerienne compacte. La cohomologie $H^k(X,\mathbb{Z})$ est une $\mathbb{Z}$-structure de Hodge pure de poids k : on a la décomposition $\bigoplus_{p+q=k} H^{p,q}(X) \cong H^k(X,\mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}$ et $H^{p,q}(X) = \overline{H^{q,p}(X)}$.*

Enonçons alors la conjecture de Hodge. Soit Y un sous-espace analytique complexe (éventuellement singulier) de X une variété kählerienne compacte, de codimension $k \geq 1$ dans X. On définit la *classe* de Y par :

$$\mathrm{cl}(Y) = \mathrm{cl}(Y - Y^{\mathrm{sing}}) \in H^{2k}(X - Y^{\mathrm{sing}},\mathbb{Z}) \cong H^{2k}(X,\mathbb{Z})$$

La classe de Y appartient à $H^{k,k}(X,\mathbb{C}) \cap H^{2k}(X,\mathbb{Z})$.

Conjecture 1.33 (Conjecture de Hodge)**.** *Soit X une variété projective (lisse). L'espace $\mathrm{Hdg}^{2k}(X) := H^{k,k}(X) \cap H^{2k}(X,\mathbb{Z})$ est engendré rationnellement par les classes des sous-variétés analytiques complexes de X.*

Remarque 1.34.

- Si $k = 1$, la conjecture est vraie : par le théorème de Lefschetz sur les classes $(1,1)$, tout élément de $\mathrm{Hdg}^2(X)$ est la classe d'un diviseur de X.
- Soit X projective lisse de dimension N et considérons la diagonale $\Delta \subset X \times X$. On a un isomorphisme de structures de Hodge

  $$H^{2N}(X \times X) \cong \bigoplus_{p+q=2N} H^p(X) \otimes H^q(X).$$

  La classe de Δ appartient au terme de gauche et, si la conjecture de Hodge est vraie, la décomposition à droite doit faire intervenir les classes de sous-espaces analytiques de X. On obtient ainsi le problème dit de *décomposition de la diagonale.*