Table des matières

1 Cours 10 - 20/10

Dans ce cours, on démontre le théorème de Voisin discuté dans le cours précédent.

Théorème 1.1. *Il existe des variétés kähleriennes compactes dont l'algèbre de cohomologie (qui est une algèbre de Hodge réellement polarisée) n'admet pas de polarisation rationnelle.*

On débute ensuite la théorie variationnelle des structures de Hodge, d'un point de vue plutôt faisceautique. L'approche originale de Griffiths *via* la géométrie différentielle se trouve dans [1], chapitres 9 et 10.

1.1 Preuve du théorème de Voisin

À partir d'un tore complexe non projectif, on construit une variété kählérienne compacte X qui n'a pas l'anneau de cohomologie rationnelle d'une variété projective lisse.

Soit Γ un $\mathbb{Z}$-module libre de rang $2n$ et soit $\phi : \Gamma \to \Gamma$ un automorphisme de Γ. On suppose que les valeurs propres de ϕ sont distinctes et non réelles. Fixons n valeurs propres $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ telles que $\lambda_i \neq \overline{\lambda_j}$. On pose $\Gamma^{1,0} \subset \Gamma_{\mathbb{C}}$ la somme des espaces propres associés aux λ_i.

Alors $\Gamma_{\mathbb{C}} = \Gamma^{1,0} \oplus \overline{\Gamma^{1,0}}$ et on considère $T = \Gamma_{\mathbb{C}}/(\Gamma^{1,0} \oplus \Gamma)$. Comme ϕ conserve Γ et $\Gamma^{1,0}$, ϕ passe au quotient et on note ϕ_T l'application induite.

Lemme 1.2. *Si $n \geq 2$ et si le groupe de Galois de $\mathbb{Q}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n, \overline{\lambda_1}, \ldots, \overline{\lambda_n})$ agit de façon 2-transitive sur les valeurs propres de ϕ, alors $\mathrm{Hdg}^2(T) := H^{1,1}(T) \cap H^2(T, \mathbb{Q}) = 0$. En particulier, T n'est pas projectif.*

Démonstration. L'espace $H^{1,1}(T)$ est égal à $\Gamma^* \otimes \overline{\Gamma}^*$ et les valeurs propres de ϕ_T^* sur $H^{1,1}(T)$ sont les $\lambda_i\overline{\lambda_j}$. Mais $\mathrm{Hdg}^2(T) \otimes \mathbb{C} \subset H^{1,1}(T)$ est laissé stable par ϕ_T^* et il lui correspond donc un ensemble S de valeurs propres parmi les $\lambda_i\overline{\lambda_j}$. Comme le groupe de Galois de $\mathbb{Q}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n, \overline{\lambda_1}, \ldots, \overline{\lambda_n})$ est défini sur $\mathbb{Q}$, il laisse stable cet ensemble S. Mais l'hypothèse de l'énoncé implique qu'il agit transitivement sur les produits de deux éléments distincts dans l'ensemble $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_n, \overline{\lambda_1}, \ldots, \overline{\lambda_n}\}$. Comme $n \geq 2$, le produit $\lambda_1\lambda_2$ est bien défini et n'est pas dans S, ce qui implique que S est vide. $\square$

Soit (T, ϕ_T) comme ci-dessus. Dans le tore produit $T \times T$, on considère quatre tores : $T_1 = T \times \{0\}$, $T_2 = \{0\} \times T$, $T_3 = \{(x, x), x \in T\}$ et $T_4 = \{(x, \phi_T(x)), x \in T\}$. Pour $i \neq j$, T_i et T_j se coupent transversalement en un nombre fini de points $x_1, \ldots, x_n$. En effet, seules les transversalités de T_4 et T_1 et T_4 et T_2 ne sont pas immédiates ; on utilise que ϕ_T est linéaire donc égale à sa différentielle et que 0 et 1 ne sont pas valeurs propres de ϕ_T.

On considère $\hat{T} = \widehat{(T \times T)}_{x_1,\ldots,x_n}$ et on note $\tilde{T}_i$ la transformée propre de T_i, i.e. $\tilde{T}_i$ est l'éclatement $\widetilde{T_i}_{\{x_1,\ldots,x_n\}\cap T_i}$ qui se plonge naturellement dans $\hat{T}$. Les $\tilde{T}_i$ sont lisses et disjoints deux à deux. Notons enfin $X = \widehat{\hat{T}}_{\tilde{T}_1,\ldots,\tilde{T}_4}$ l'éclatement de $\hat{T}$ en les $\tilde{T}_i$.

Théorème 1.3. *La variété kählérienne compacte X n'a pas l'anneau de cohomologie rationnelle d'une variété projective lisse.*

Démonstration. On montre que si Y est une variété kählérienne compacte et s'il existe un isomorphisme d'anneaux gradués $\gamma : H^\bullet(Y, \mathbb{Q}) \cong H^\bullet(X, \mathbb{Q})$ alors Y n'est pas projective lisse. Il suffit pour cela de montrer que $H^1(Y, \mathbb{Q}) = H^1(Y_{\mathrm{prim}}, \mathbb{Q})$ n'admet pas de polarisation rationnelle.

Considérons $e_i \in H^2(X, \mathbb{Q})$ la classe du diviseur exceptionnel E_i au-dessus de $\tilde{T}_i$ et notons $a_i = \gamma^{-1}(e_i) \in H^2(Y, \mathbb{Q})$. A priori, a_i n'est pas une classe de Hodge de $H^2(Y, \mathbb{Q})$ mais le lemme suivant permettra néanmoins de conclure.

Lemme 1.4. *L'application* $\bullet \wedge a_i : H^1(Y,\mathbb{Q}) \to H^3(Y,\mathbb{Q})$ *est un morphisme de structures de Hodge.*

Admettant provisoirement ce lemme, on finit la preuve. Notons $L_i = \mathrm{Ker}(\bullet \wedge a_i) \subset H^1(Y,\mathbb{Q})$ sous-structure de Hodge, d'après le lemme ; on a $L_i = \gamma^{-1}(\mathrm{Ker}(\bullet \wedge e_i))$. La description de la cohomologie d'un éclatement (cf. cours 8, théorème 1.32) montre que $H^1(X,\mathbb{Q}) = H^1(T\times T,\mathbb{Q}) = H^1(T,\mathbb{Q}) \oplus H^1(T,\mathbb{Q})$ en tant que structures de Hodge.

On cherche à calculer les espaces $\mathrm{Ker}(\bullet \wedge e_i)$ dans $H^1(X,\mathbb{Q})$. Plus généralement, considérons un éclatement $\tau : \tilde{Y} \to Y$ avec diviseur exceptionnel E au-dessus de Z, Z étant de codimension au moins 2. On note j_E l'inclusion de E dans $\tilde{Y}$, j_Z l'inclusion de Z dans Y et τ_E la restriction de τ à E. Alors, l'application $\cup[E] \circ \tau^* : H^\bullet(Y,\mathbb{Z}) \to H^{\bullet+2}(\tilde{Y},\mathbb{Z})$ s'écrit aussi $j_E^* \circ \tau_E^* \circ j_Z^*$. De plus, $j^* \circ \tau_E^*$ est injective et donc le noyau de $\cup[E]\circ\tau^*$ est simplement le noyau de $j_Z^* : H^\bullet(Y,\mathbb{Z}) \to H^\bullet(Z,\mathbb{Z})$.

Dans notre situation, on peut oublier les éclatements de points initiaux qui ne contribuent pas au H^1 ni au H^3. Alors, $\mathrm{Ker}(\bullet \wedge e_i)$ s'identifie à $\mathrm{Ker}\, j_{E_i}^* : H^1(E_i,\mathbb{Q}) \to H^1(T\times T,\mathbb{Q})$ (τ_{E_i} est ici égal à l'identité de $H^1(X,\mathbb{Q}) = H^1(T\times T,\mathbb{Q})$). En utilisant la définition des E_i, le calcul est alors immédiat :
- $\mathrm{Ker}(\bullet \wedge e_1) = p_2^* H^1(T,\mathbb{Q})$,
- $\mathrm{Ker}(\bullet \wedge e_2) = p_1^* H^1(T,\mathbb{Q})$,
- $\mathrm{Ker}(\bullet \wedge e_3) = \{(\alpha,-\alpha), \alpha \in H^1(T,\mathbb{Q})\}$,
- $\mathrm{Ker}(\bullet \wedge e_1) = \{(\phi_T^*\alpha,-\alpha), \alpha \in H^1(T,\mathbb{Q})\}$,

où p_1, p_2 sont les projections composées à l'application $X \to T\times T$.

On a donc $H^1(Y,\mathbb{Q}) = L_1 \oplus L_2$ comme structures de Hodge. De plus, L_3 définit le graphe d'un isomorphisme de structures de Hodge $L_1 \cong L_2 \cong: L$. Finalement, dans la décomposition $H^1(Y,\mathbb{Q}) = L \oplus L$, L_4 définit le graphe d'un endomorphisme ψ de L et ψ s'identifie à $-\phi^*$ *via* $\gamma : H^1(Y,\mathbb{Q}) \cong H^1(X,\mathbb{Q}) = H^1(T\times T,\mathbb{Q})$. Considerons la $\mathbb{Q}$-algèbre de Hodge $\Lambda^* L$, munie de ψ. Comme ψ s'identifie à $-\phi^*$, $(\Lambda^* L, \psi)$ vérifie la condition du lemme 1.2 et la même preuve montre que L n'admet pas de polarisation rationnelle. Donc $H^1(Y,\mathbb{Q})$ non plus. $\square$

On montre maintenant le lemme 1.4.

Démonstration. Commençons par prouver le lemme suivant dû à Deligne.

Lemme 1.5. *Soit* $A^\bullet$ *une algèbre de Hodge sur* $\mathbb{Q}$. *Soit* $Z \subset A^k_{\mathbb{C}}$ *un fermé algébrique défini par des équations homogènes utilisant uniquement la structure d'anneau de* $A^\bullet_{\mathbb{C}}$ *et soit* $Z' \subset Z$ *une composante irréductible. Si* $\langle Z' \rangle$ *est défini sur* $\mathbb{Q}$ *avec* $\langle Z' \rangle = B \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C}$*, alors* $B \subset A^k$ *est une sous-*$\mathbb{Q}$ *structure de Hodge de* A^k.

Démonstration. Il suffit de vérifier que $\langle Z' \rangle$ est $\mathcal{S}$-stable, où $\mathcal{S}$ est le tore de Deligne. Mais $z \in \mathbb{C}^* = \mathcal{S}$ agit sur $A^{p,q}$ par multiplication par $z^p\overline{z^q}$ et cette action est donc compatible à la structure d'anneau sur $A^\bullet_{\mathbb{C}}$. Comme la définition de Z ne fait intervenir que la structure d'anneaux de $A^\bullet_{\mathbb{C}}$, Z est $\mathcal{S}$-stable. Comme Z' est une composante irréductible de Z, il est également stable, donc $\langle Z' \rangle$ aussi. $\square$

Exemple 1.6. Des exemples de Z satisfaisant aux hypothèses du lemme sont :
- $Z = \{\alpha \in A^k_{\mathbb{C}} \mid \alpha^l = 0 \in A^{kl}_{\mathbb{C}}\}$,
- $Z = \{\alpha \in A^k_{\mathbb{C}} \mid \mathrm{Im}(\bullet \wedge \alpha : A^l \to A^{k+l})$ de dimension inférieure à $m\}$ (l, m fixés).

Avec le lemme de Deligne, on prouve maintenant le lemme 1.4. Considérons P l'annihilateur de $\Lambda^{4n-2} H^1(X,\mathbb{Q}) \subset H^{4n-2}(X,\mathbb{Q})$ dans $H^2(X,\mathbb{Q})$ et P' le sous-ensemble de P constitué des α tels que $\bullet \wedge \alpha : H^1(X,\mathbb{Q}) \to H^3(X,\mathbb{Q})$ est nul.

Exercice 1.7. Montrer que P est engendré par les classes de tous les diviseurs exceptionnels de $X \to T\times T$ et que P' est engendré par les classes des diviseurs exceptionnels, au-dessus des x_i. On utilisera la description de la cohomologie d'un éclatement et le calcul fait plus haut du noyau de $\cup[E]\circ\tau^*$, où E est le diviseur exceptionnel d'un éclatement $\tau : \tilde{Y} \to Y$.

Par le lemme de Deligne, on a les inclusions de structures de Hodge $\gamma^{-1}(P') \subset \gamma^{-1}(P) \subset H^2(Y,\mathbb{Q})$. On a donc un morphisme de structures de Hodge

$$\mu : \gamma^{-1}(P)/\gamma^{-1}(P') \to \mathrm{Hom}(H^1(Y,\mathbb{Q}) \to H^3(Y,\mathbb{Q}))$$
$$\alpha \mapsto \bullet \wedge \alpha.$$

On considère alors $Z = \{\alpha \in \gamma^{-1}(P)/\gamma^{-1}(P') \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C} \mid \mu(\alpha) \text{ non injective}\}$. Un calcul dans X montre que $Z = \cup \mathbb{C}\overline{a_i}$. Les composantes irréductibles $\mathbb{C}\overline{a_i}$ sont définies sur $\mathbb{Q}$ et le lemme de Deligne implique

que les $\overline{a_i}$ sont des classes de Hodge dans ce quotient. Donc les $\mu(\overline{a_i})$ sont des morphismes de structures de Hodge. □

Remarque 1.8.
- En fait, les a_i sont des classes de Hodge.
- Le théorème est ainsi démontré en toute dimension paire supérieure ou égale à 4. Pour la dimension impaire, on fait un raisonnement similaire en considérant le produit $X \times E$, avec E une courbe elliptique.

1.2 Variations de structure de Hodge

On considère X une variété kählérienne compacte. On a donc une structure de Hodge sur l'algèbre graduée $H^\bullet(X, \mathbb{Q})$. Le problème qui nous occupe est l'étude des variations de cette structure de Hodge quand on déforme la structure complexe de X. On rend d'abord précise cette *déformation* de structure complexe.

Définition 1.9. Une *famille de variétés complexes compactes* est un morphisme analytique $f : X \to S$ entre variétés analytiques, qui est submersif, propre et surjectif.

Proposition 1.10. *Si X et S sont des variétés complexes et que f est holomorphe, f est une fibration lisse localement triviale, i.e. pour tout s dans S, il existe un voisinage ouvert U de s dans S tel que $f^{-1}(U)$ s'identifie de façon lisse avec le produit $X_s \times U$, où X est la fibre de f au-dessus de s.*

Démonstration. Par le théorème du voisinage tubulaire, il existe un voisinage W de X_s difféomorphe à un voisinage de X_s dans le fibré normal $N_{X_s/X}$. Notons r la rétraction lisse de W dans X_s. Alors, comme f est submersive, la différentielle de l'application $(r, f) : W \to X_s \times S$ est inversible le long de X_s. Comme X_s est compacte, la restriction de (r, f) à un voisinage ouvert W' de X_s dans W est un difféomorphisme. Comme enfin f est propre, il existe un voisinage ouvert U de s dans S tel que $f^{-1}(U)$ soit inclus dans W'. Alors la restriction de (r, f) à $f^{-1}(U)$ réalise un difféomorphisme entre $f^{-1}(U)$ et $U \times X_s$. □

Remarque 1.11. En général, la trivialisation $X_s \times U \to f^{-1}(U)$ ne peut pas être choisie holomorphe : les fibres de f sont difféomorphes mais non biholomorphes. En revanche, le lemme précédent permet de penser à $f^{-1}(U)$ comme une famille de structures complexes, paramétrée par U, sur une fibre privilégiée X_{s_0}.

On va maintenant étudier la déformation de la cohomologie des fibres. Pour cela, on introduit, pour tout $i \in \mathbb{N}$, le faisceau $R^i f_* \mathbb{Z}_X$ sur S.

Exercice 1.12. Le faisceau $R^i f_* \mathbb{Z}_X$ est le faisceau associé au préfaisceau $(U \mapsto H^i(f^{-1}(U), \mathbb{Z}))$.

Si s_0 est dans S et si U est un voisinage ouvert contractile et suffisamment petit de s_0, $f^{-1}(U)$ est difféomorphe à $X_{s_0} \times U$. Donc l'inclusion $i_0 : X_{s_0} \hookrightarrow f^{-1}(U)$ induit un isomorphisme $\Gamma(U, R^i f_* \mathbb{Z}_X) \cong (R^i f_* \mathbb{Z}_X)_{s_0} \cong H^i(X_{s_0}, \mathbb{Z})$. En particulier, les faisceaux $R^i f_* \mathbb{Z}_X$ sont des *systèmes locaux* (ou faisceaux localement constants) sur S.

Supposons désormais que les fibres sont des variétés kählériennes compactes. Notons qu'il suffit pour cela de supposer qu'une fibre seulement est kählérienne compacte (cf. théorème 9.23 de [1]).

On peut alors considérer le fibré lisse $R^i f_* \mathbb{C}_X \otimes_{\mathbb{C}} A^0(S)$. Chaque fibre $H^i(X_s)$ admet une décomposition $\oplus_{i=p+q} H^{p,q}(X_s)$ et on peut montrer qu'on a en fait un fibré lisse sur S de fibre $H^{p,q}(X_s)$, pour tous p et q tels que $p + q = i$.

Néanmoins, d'un point de vue faisceautique, on a vu que c'est plutôt la filtration de Hodge qui est l'objet naturel. Ce qui suit permet la construction de cette filtration ainsi que ses propriétés.

Définition 1.13. On définit le *complexe de de Rham holomorphe relatif* par $\Omega^\bullet_{X/S} = \Lambda^\bullet \Omega^1_{X/S}$ avec $\Omega^1_{X/S} = \Omega^1_X / f^* \Omega^1_S$. On pose aussi, $\Omega^0_{X/S} = \Omega_X$.

Remarque 1.14. On a $(\Omega^\bullet_{X/S})_{|X_s} = \Omega^\bullet_{X_s}$.

Lemme 1.15. *Le complexe $\Omega^\bullet_{X/S}$ est une résolution de $f^{-1}(\mathcal{O}_S)$ sur X.*

Démonstration. On peut supposer que S est contractile et que X est égal à $S \times X_0$, avec f la première projection. Alors, une application holomorphe g sur X est dans le noyau de $d : \Omega^0_X \to \Omega^1_{X/S}$ si et seulement si elle est constante sur les fibres de f et donc est dans $f^{-1}(\mathcal{O}_S)$.

Soit $i \geq 1$ et considérons une forme α dans Ω^i_X telle que $d\alpha$ s'écrive $f^*\beta$, avec β dans Ω^{i+1}_S. Alors, $d^2\alpha = f^*d\beta = 0$ et donc $d\beta = 0$ car f est submersive. Donc $\beta = d\gamma$, avec γ dans Ω^i_S. Dans X, on a donc $d(\alpha - f^*\gamma) = 0$ et α est donc d-fermée dans $\Omega^i_{X/S}$. □

On a donc :

– Un isomorphisme $R^i f_*(f^{-1}(\mathcal{O}_S)) \cong R^i f_* \Omega^\bullet_{X/S}$. Notons également que $R^i f_*(f^{-1}(\mathcal{O}_S))$ est le faisceau associé au préfaisceau $(U \mapsto H^i(f^{-1}(U), f^{-1}(\mathcal{O}_S)))$.
– Un isomorphisme canonique $R^i f_* \mathbb{C}_X \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_S \cong R^i f_*(f^{-1}\mathcal{O}_S)$.

D'où un isomorphisme $\mathcal{O}_S \otimes_{\mathbb{C}} R^i f_* \mathbb{C}_X \cong R^i f_* \Omega^\bullet_{X/S}$.

Définition 1.16. La *connexion de Gauss-Manin* ∇ sur $R^i f_* \Omega^\bullet_{X/S}$ est l'unique connexion holomorphe plate dont les sections plates sont données par $R^i f_* \mathbb{C}_X$.

Filtration de Hodge sur $\Omega^\bullet_{X/S}$. On considère la filtration bête $F^\bullet$ sur $\Omega^\bullet_{X/S}$.

Proposition 1.17.

– *La suite spectrale associée à* $(R^i f_* \Omega^\bullet_{X/S}, F^\bullet)$ *(cf. cours* 11*) vérifie* ${}_F E_1^{p,q} = R^q f_* \Omega^p_{X/S}$*, converge vers* $R^{p+q} f_* \Omega^\bullet_{X/S}$ *et dégénère en* E_1*. Donc* $R^q f_* \Omega^p_{X/S} = \mathrm{Gr}^p_F R^{p+q} f_* \Omega^\bullet_{X/S}$.
– *Cette suite spectrale est compatible au changement de base*

$$\begin{tikzcd} X \otimes_S S' \arrow[r] \arrow[d] & X \arrow[d] \\ S' \arrow[r] & S \end{tikzcd}$$

– *La filtration de Hodge induite sur* $R^i f_* \Omega^\bullet_{X/S}$ *est une filtration par des sous-fibrés holomorphes sur* S*. Pour tout* s *dans* S*, on a* $F^p R^i f_* \Omega^\bullet_{X/S} \cong F^p H^i(X_s, \mathbb{C})$.

Démonstration. Admis □

Références

[1] Voisin C., Théorie de Hodge et géométrie algébrique complexe, SMF