Table des matières

1 Cours 11 - 24/10

Dans une première partie de ce cours, on revient sur certaines constructions de suites spectrales et on définit notamment la suite spectrale d'hypercohomologie, ainsi que la suite spectrale associée à un foncteur et à un objet filtré utilisée au cours précédent. Dans une deuxième partie, on démontre le critère de transversalité de Griffiths sur la connexion de Gauss-Manin.

1.1 Encore des suites spectrales

Notre but est ici de définir la suite spectrale d'hypercohomologie. Pour cela, on introduit les résolutions de Cartan-Eilenberg, qui sont des résolutions particulières d'un complexe $K^\bullet$ par un bicomplexe $L^{\bullet,\bullet}$.

1.1.1 Résolutions de Cartan-Eilenberg

Soit $\mathcal{A}$ une catégorie abélienne, $K^\bullet \in C^\bullet(\mathcal{A})$ un complexe d'objets de A.

Définition 1.1. Une *résolution de Cartan-Eilenberg* de $K^\bullet$ est la donnée d'un bicomplexe $L^{\bullet,\bullet}$ et d'une augmentation $\epsilon : K^\bullet \to L^{\bullet,0}$ envoyant les cobords et les cocycles de $K^\bullet$ sur les cobords et les cocycles de $(L^{\bullet,0}, D_1)$ et telle que :

– Les suites

$$0 \longrightarrow K^i \xrightarrow{\epsilon} L^{i,0} \xrightarrow{D_2} L^{i,1} \xrightarrow{D_2} \cdots \tag{1}$$

$$0 \longrightarrow B^i(K^\bullet) \xrightarrow{\epsilon} B^i_I(L^{\bullet,0}) \xrightarrow{D_2} B^i_I(L^{\bullet,1}) \xrightarrow{D_2} \cdots$$

$$0 \longrightarrow Z^i(K^\bullet) \xrightarrow{\epsilon} Z^i_I(L^{\bullet,0}) \xrightarrow{D_2} Z^i_I(L^{\bullet,1}) \xrightarrow{D_2} \cdots$$

$$0 \longrightarrow H^i(K^\bullet) \xrightarrow{\overline{\epsilon}} H^i_I(L^{\bullet,0}) \xrightarrow{\overline{D_2}} H^i_I(L^{\bullet,1}) \xrightarrow{\overline{D_2}} \cdots$$

  induites de ϵ sont exactes.

– Les suites exactes courtes naturelles

$$0 \longrightarrow B^i_I(L^{\bullet,j}) \longrightarrow Z^i_I(L^{\bullet,j}) \longrightarrow H^i_I(L^{\bullet,j}) \longrightarrow 0 \tag{2}$$

$$0 \longrightarrow Z^i_I(L^{\bullet,j}) \longrightarrow L^{i,j} \longrightarrow B^{i+1}_I(L^{\bullet,j}) \longrightarrow 0$$

sont scindées.

On montre facilement les résultats suivants, à l'aide des constructions standards déjà vues :

Proposition 1.2. *Si $\mathcal{A}$ a suffisamment d'injectifs, alors $K^\bullet$ admet une résolution de Cartan-Eilenberg injective (i.e. avec les $L^{i,j}$ injectifs).*

Remarque 1.3. Remarquons alors que, grâce à (2), toutes les résolutions de (1) sont injectives. En effet, un facteur direct d'un objet injectif est un objet injectif.

Proposition 1.4.
- *Pour toute $f : K^\bullet \to K'^\bullet$ et toutes résolutions de Cartan-Eilenberg $L^{\bullet,\bullet}$ de $K^\bullet$ et $L'^{\bullet,\bullet}$ de $K'^\bullet$, avec $L'^{\bullet,\bullet}$ injective, il existe $F : L \to L'$ étendant f.*
- *Si $f, g : K^\bullet \to K'^\bullet$ sont homotopes, alors $F, G : L^{\bullet,\bullet} \to L'^{\bullet,\bullet}$ aussi.*

1.1.2 Suite spectrale d'hypercohomologie

Soit $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ un foncteur exact à gauche, $\mathcal{A}$ ayant suffisamment d'injectifs.

Théorème 1.5. *Il existe une suite spectrale dite d'*hypercohomologie II

$$E_2^{p,q} = R^p F(H^q(K^\bullet)) \Longrightarrow R^{p+q} F(K^\bullet).$$

Démonstration. Soit $(L^{\bullet,\bullet}, D_1, D_2)$ une résolution injective de Cartan-Eilenberg de $K^\bullet$. Posons $(N^{\bullet,\bullet}, \delta_1, \delta_2) := (F(L^{\bullet,\bullet}), F(D_1), F(D_2))$. Notons $(S^\bullet, D)$ le complexe total associé à $(N^{\bullet,\bullet}, \delta_1, \delta_2)$. On a donc

$$R^i F(K^\bullet) = H^i(S^\bullet, D).$$

On munit $S^\bullet$ de la filtration sur le deuxième indice : $G^r(S^n) = \oplus_{q \geq r} N^{n-q,q}$. Considérons alors la suite spectrale $E_r^{p,q}$ associée à la filtration $(S^\bullet, G)$. On a

$$E_r^{p,q} \Longrightarrow H^{p+q}(S^\bullet, D) = R^{p+q} F(K^\bullet).$$

Sur la page 0, $E_0^{p,q}$ vaut $N^{q,p}$ et la différentielle d_0 est égale à δ_1. Sur la page 1, $E_1^{p,q}$ est donc égal à $H^q(F(L^{\bullet,p}), F(D_1))$, qui est égal à $F(H^q(L^{\bullet,p}), D_1)$. En effet, comme les $Z^{q,p}$ et les $B^{q,p}$, on a $R^1 F(Z^{q,p}) = R^1 F(B^{q,p}) = 0$. On a donc que $F(Z^{q,p})$ est le noyau de $F(L^{q,p}) \to F(L^{q+1,p})$ et une égalité analogue pour $F(B^{q,p})$. L'égalité $H^q(F(L^{\bullet,p}), F(D_1)) = F(H^q(L^{\bullet,p}), D_1)$ est alors immédiate. Donc $E_1^{p,q} = F(H^q(L^{\bullet,p}, D_1))$ et on sait que la différentielle d_1 est induite par $\delta_2 = F(D_2)$. Donc, sur la page 2, $E_2^{p,q} = H^p(E^{\bullet,q}, d_1) = H^p(F(H^q(L^{\bullet,\bullet}, D_1)), F(D_2^q))$. Mais $((H^q(L^{\bullet,\bullet}), D_2^q)$ est une résolution injective de $H^q(K^\bullet, d)$ par (1).

D'où $E_2^{p,q} = R^p F(H^q(K^\bullet), d)$. □

Remarque 1.6. On peut montrer les résultats habituels sur cette construction : la suite spectrale est indépendante de $L^{\bullet,\bullet}$ et on peut considérer des résolutions de Cartan-Eilenberg F-acycliques plutôt qu'injectives.

1.1.3 Suite spectrale de Grothendieck (ou d'un foncteur composé)

Considérons $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ trois catégories abéliennes, $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ ayant assez d'injectifs, et deux foncteurs $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ et $F' : \mathcal{B} \to \mathcal{C}$ tels que F envoie les injectifs de $\mathcal{A}$ sur des F'-acycliques.

Théorème 1.7. *Il existe une suite spectrale*

$$E_2^{p,q} = R^p F'(R^q F(M)) \Longrightarrow R^{p+q}(F' \circ F)(M),$$

pour tout objet M de $\mathcal{A}$.

Démonstration. Soit $K^\bullet$ une résolution injective de M. Alors $R^i(F' \circ F)(M) = H^i(F' \circ F(K^\bullet))$ et $R^q F(M) = H^q(F(K^\bullet))$. Comme $F(K^\bullet)$ est un complexe de F'-acycliques, $H^i(F' \circ F(K^\bullet)) = R^i F'(F(K^\bullet))$. La suite spectrale d'hypercohomologie pour le foncteur F' et le complexe $F(K^\bullet)$ donne

$$E_2^{p,q} = R^p F'(H^q(F(K^\bullet))) = R^p F'(R^q F(M)) \Longrightarrow R^{p+q}(F' \circ F)(M) = R^{p+q} F'(F(K^\bullet)).$$

□

1.1.4 Suite spectrale d'un foncteur relative à un objet muni d'une filtration finie.

Soient $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ deux catégories abéliennes et $T : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ un foncteur (additif comme d'habitude). On suppose que $\mathcal{A}$ a suffisamment d'injectifs. On montre encore facilement :

Proposition 1.8. *Soit $X \in \mathcal{A}$ un objet muni d'une filtration décroissante finie $(F^i(X))$. Il existe une résolution injective $X^\bullet$ de X munie d'une filtration finie $(F^i(X^\bullet))$ telle que la relation $F^i(X) = X$ (resp. $F^i(X) = 0$) implique $F^i(X^\bullet) = X^\bullet$ (resp. $F^i(X^\bullet) = 0$) et que, pour tout i, $F^i(X^\bullet)$ soit une résolution injective de $F^i(X)$.*

Proposition 1.9. *Si $Y \in \mathcal{A}$ est muni d'une filtration $(F^i(Y))$ et $u : X \to Y$ est un morphisme filtré il exist un morphisme $v^\bullet : X^\bullet \to Y^\bullet$ filtré compatible à u. En outre deux tels morphismes sont homotopes.*

On en déduit immédiatement le

Théorème 1.10. *Soit $X \in \mathcal{A}$ un objet muni d'une filtration décroissante finie $(F^i(X))$. Il existe une suite spectrale*

$$E_1^{p,q} = R^{p+q}T(\mathrm{Gr}_F^p(X)) \Longrightarrow R^{p+q}T(X) \ .$$

1.2 Transversalité de Griffiths

On rappelle les résultats établis au cours précédent sur les variations de structures de Hodge. Soit $f : X \to S$ une famille de variétés kählériennes compactes.

- Les groupes de cohomologie de Betti $H^i(X_s, \mathbb{C})$ se mettent en famille en un système local $R^i f_* \mathbb{C}_X$.
- $\mathcal{O}_s \otimes_{\mathbb{C}} R^i f_* \mathbb{C}_X \cong R^i f_* \Omega^\bullet_{X/S}$. On définit de là une connexion holomorphique plate $\nabla : R^i f_* \Omega^\bullet_{X/S} \to R^i f_* \Omega^\bullet_{X/S} \otimes \Omega^1_S$; c'est la connexion de Gauss-Manin.
- On dispose de la filtration bête $F^\bullet$ sur $\Omega^\bullet_{X/S}$. Il est associé à $(R^i f_* \Omega^\bullet_{X/S}, F^\bullet)$ une suite spectrale

$$E_1^{p,q} = R^q f_* \Omega^p_{X/S} \Longrightarrow R^{p+q} f_* \Omega^\bullet_{X/S}$$

  qui dégénère en E_1. Donc, $\mathrm{Gr}_F^p R^{p+q} f_* \Omega^\bullet_{X/S} = R^q f_* \Omega^p_{X/S}$.
- Les $F^p R^i f_* \Omega^\bullet_{X/S} \subset R^i f_* \Omega^\bullet_{X/S}$ sont des sous-fibrés holomorphes.

On montre maintenant le critère de transversalité de Griffiths. La preuve est plutôt faisceautique ; pour un point de vue plus géométrique, on pourra consulter [1].

Théorème 1.11 (Griffiths)**.** $\nabla F^p R^i f_* \Omega^\bullet_{X/S} \subset F^{p-1} R^i f_* \Omega^\bullet_{X/S} \otimes \Omega^1_S$.

Preuve de Deligne, d'après Katz et Oda. Tout d'abord, le résultat est local sur S et on peut donc supposer que S est Stein (on rappelle que les variétés de Stein sont les analogues analytiques des variétés affines de la géométrie algébrique ; la cohomologie de leurs faisceaux quasi-cohérents est nulle en degrés plus grand que 1 et ces variétés se comportent bien vis-à-vis de l'intersection).

Soit $\mathcal{U} = (U_i)_{1 \le i \le N}$ un recouvrement ouvert fini de X par des ouverts Stein. Pour $Q \subset \{1, \ldots, N\}$, on pose $U_Q = \cap_{i \in Q} U_i$; ce sont des ouverts Stein. On note j_Q le plongement $U_Q \hookrightarrow X$.

Si $F^\bullet$ est un complexe de $\mathcal{O}_X$-modules, on note $f_*(\mathcal{U}, F^\bullet)^{\bullet,\bullet}$ le bicomplexe

$$f_*(\mathcal{U}, F^\bullet)^{p,q} = f_* C^q(\mathcal{U}, F^p),$$

où les $C^\bullet(\mathcal{U}, F^p)$ sont les groupes intervenant dans la cohomologie de Cech du faisceau F^p, pour le recouvrement ouvert $\mathcal{U}$.

$$\begin{array}{ccccc}
f_* C^0(\mathcal{U}, F^0) & \longrightarrow & f_* C^0(\mathcal{U}, F^1) & \longrightarrow & \cdots \\
\downarrow & & \downarrow & & \\
f_* C^1(\mathcal{U}, F^0) & \longrightarrow & f_* C^1(\mathcal{U}, F^1) & \longrightarrow & \cdots \\
\downarrow & & \downarrow & & \\
\cdots & & \cdots & &
\end{array}$$

Lemme 1.12. *Sous les hypothèses précédentes, si $F^\bullet$ est un complexe de $\mathcal{O}_X$-modules quasi-cohérents, alors*

$$R^i f_* F^\bullet = \mathcal{H}^i(\operatorname{Tot} f_*(\mathcal{U}, F^\bullet)^{\bullet,\bullet}) =: \mathcal{H}^i(K^\bullet),$$

où $\mathcal{H}^i(K^\bullet)$ est le i-ème faisceau de cohomologie du complexe $K^\bullet$.

Démonstration. Soit $V \subset S$ un ouvert Stein. Le faisceau $R^i f_* F^\bullet$ est associé au préfaisceau $(V \mapsto H^i(f^{-1}(V), F^\bullet))$. Comme $f^{-1}(V) \cap U_Q$ est Stein (pour cette propriété dans le cadre affine, voir [2], proposition 5.5.10), donc $H^i(f^{-1}(V), F^\bullet)$ se calcule en cohomologie de Cech : on a $H^i(f^{-1}(V), F^\bullet) = H^i(\Gamma(V, K^\bullet))$. Mais V étant Stein, le foncteur $(G \mapsto \Gamma(V, G))$ est exact dans la catégorie des $\mathcal{O}_S$-modules quasi-cohérents ; donc $H^i(f^{-1}(V), F^\bullet) = \Gamma(H^i(V, K^\bullet))$. De plus, cette égalité est fonctorielle, i.e. compatible aux inclusions $V' \subset V$ entre ouverts Stein.

Donc $R^i f_* F^\bullet = \mathcal{H}^i(\operatorname{Tot} f_*(\mathcal{U}, F^\bullet)^{\bullet,\bullet})$. $\square$

Remarque 1.13. La filtration bête sur $F^\bullet$ correspond à la filtration par le premier indice sur le complexe total $\operatorname{Tot} f_*(\mathcal{U}, F^\bullet)^{\bullet,\bullet}$. On a donc un quasi-isomorphisme filtré.

On prend $F^\bullet = \Omega^\bullet_{X/S}$ et on calcule

$$\nabla : R^n f_* \Omega^\bullet_{X/S} = \mathcal{H}^n(\operatorname{Tot} f_*(\mathcal{U}, \Omega^\bullet_{X/S})^{\bullet,\bullet}) \to \Omega^1_S \otimes \mathcal{H}^n(\operatorname{Tot} f_*(\mathcal{U}, \Omega^\bullet_{X/S})^{\bullet,\bullet}) = \Omega^1_S \otimes R^n f_* \Omega^\bullet_{X/S}.$$

En fait, on va définir un relevé canonique de ∇ sur $f_*(\mathcal{U}, \Omega^\bullet_{X/S})$. Soit $v \in \Gamma(S, TS)$ un champ de vecteurs holomorphe. Fixons $v_i \in \Gamma(U_i, TU_i)$ des relèvements de v sur U_i quitte à raffiner le recouvrement.

On rappelle que le produit intérieur $\iota : T_{X/S} \otimes \Omega^p_X \to \Omega^{p-1}_X$ s'étend au cas relatif $\iota : T_{X/S} \otimes \Omega^p_{X/S} \to \Omega^{p-1}_{X/S}$: on a $\iota(v \otimes w_1 \wedge \cdots \wedge w_p) = \sum_{j=1}^p (-1)^{j+1} w_i(v) w_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{w_i} \wedge \cdots \wedge w_p$.

De même la dérivée de Lie $L(v) = \iota_v \circ d + d \circ \iota_v$ s'étend en $L(v) : \Omega^p_{X/S} \to \Omega^p_{X/S}$.

Définition 1.14. On définit $\theta((v_i)_i) : f_*(\mathcal{U}, \Omega^\bullet_{X/S}) \to f_*(\mathcal{U}, \Omega^\bullet_{X/S})$ par

$$\theta((v_i)_i) : f_*(U_Q, \Omega^p_{X/S}) \to f_*(U_Q, \Omega^p_{X/S}) \oplus \bigoplus_{i_0 < i_1} f_*(U_{\{i_0\} \cup Q}, \Omega^p_{X/S})$$

$$\theta((v_i)_i) = L_{v_{i_1}} \oplus \bigoplus_{i_0 < i_1} L_{v_{i_1} - v_{i_0}},$$

où $Q = \{i_1, \ldots, i_q\}$.

Exercice 1.15. Montrer que $\theta((v_i)_i)$ commute à la différentielle de $\operatorname{Tot} f_*(\mathcal{U}, \Omega^\bullet_{X/S})$.

Lemme 1.16. *L'endomorphisme $\theta((v_i)_i)$ de $\operatorname{Tot} f_*(\mathcal{U}, \Omega^\bullet_{X/S})$ induit ∇ sur $\mathcal{H}^n(\operatorname{Tot} f_*(\mathcal{U}, \Omega^\bullet_{X/S})^{\bullet,\bullet}) \cong R^n f_* \Omega^\bullet_{X/S}$.*

Démonstration. Pour prouver ce lemme, on remplace $\Omega^\bullet_{X/S}$ par $A^\bullet_{X/S}$, faisceau des formes différentielles relatives lisses. On a, *pour tout recouvrement ouvert $\mathcal{U}$*,

$$\mathcal{H}^n(\operatorname{Tot} f_*(\mathcal{U}, A^\bullet_{X/S})^{\bullet,\bullet}) \cong R^n f_* A^\bullet_{X/S}.$$

Alors,

- Si les (v'_i) sont des relèvements lisses de v sur les U_i, on a encore $\theta((v'_i)_i) \in \operatorname{End}(\operatorname{Tot} f_*(\mathcal{U}, A^\bullet_{X/S}))$.
- Si les (v'_i) et les (v''_i) sont deux systèmes de relèvement, alors $\theta((v'_i)_i) - \theta((v''_i)_i) = dH - Hd$, où $H = \iota_{v'_{i_1} - v''_{i_1}} : f_*(U_Q, A^p_{X/S}) \to f_*(U_Q, A^{p-1}_{X/S})$. Donc $\theta((v'_i)_i)$ et $\theta((v''_i)_i)$ définissent le même endomorphisme de $R^n f_* A^\bullet_{X/S}$. Et de plus, il correspond à l'endomorphisme induit par $\theta((v_i)_i)$ dans $R^n f_* \Omega^\bullet_{X/S}$ *via* l'inclusion canonique $R^n f_* \Omega^\bullet_{X/S} \hookrightarrow R^n f_* A^\bullet_{X/S}$.
- Si $\mathcal{U}$ et $\mathcal{V}$ sont deux recouvrements ouverts de X, les endomorphismes induits par $\theta((v_i)^{\mathcal{U}})$ et $\theta((v_j)^{\mathcal{V}})$ sont les mêmes dans $R^n f_* A^\bullet_{X/S}$.

Il suffit alors de montrer que $\theta((v_i)_i) = \nabla v$ sur $R^n f_* A^\bullet_{X/S}$ pour un recouvrement quelconque $\mathcal{U}$ de X. Prenons $\mathcal{U} = \{X\}$. Alors $\operatorname{Tot} f_*(\mathcal{U}, A^\bullet_{X/S}))$ est simplement égal à $f_* A^\bullet_{X/S}$. Si $v' \in A^0(TX)$ relève $v \in \Gamma(S, TS)$, $\theta(v') = L_{v'} = \nabla v$. Cette dernière égalité résulte de la formule de Cartan-Lie : voir [1], proposition 9.14. $\square$

Finalement, vu la définition de $\theta((v_i)_i)$, le critère de transversalité de Griffiths est prouvé. $\square$

1.3 Application de Kodaira-Spencer

Par le critère de transversalité de Griffiths, on a $\nabla : F^p R^n f_* \Omega^\bullet_{X/S} \to \Omega^1_S \otimes F^{p-1} R^n f_* \Omega^\bullet_{X/S}$. Sur les gradués pour $F^\bullet$, ∇ induit donc :

$$\bar{\nabla} : \mathrm{Gr}^p_F\, R^n f_* \Omega^\bullet_{X/S} = R^q f_* \Omega^p_{X/S} \to \Omega^1_S \otimes R^{q+1} f_* \Omega^{p-1}_{X/S} = \Omega^1_S \otimes \mathrm{Gr}^{p-1}_F\, R^n f_* \Omega^\bullet_{X/S}.$$

De plus, $\bar{\nabla}$ est $\mathcal{O}_S$-linéaire, car dans l'égalité, $\nabla(f\sigma) = df \otimes \sigma + f\nabla\sigma$, seul le premier terme n'est pas $\mathcal{O}_S$-linéaire et il est tué dans Gr^{p-1}_F.

Notre but est de comprendre $\bar{\nabla}$. Considérons la suite exacte courte de faisceaux sur X

$$0 \to f^*(\Omega^1_S) \to \Omega^1_X \to \Omega^1_{X/S} \to 0$$

En dérivant le foncteur $\mathrm{Hom}(\Omega^1_{X/S}, \bullet)$, on obtient une classe $c \in \mathrm{Ext}^1(\Omega^1_{X/S}, f^*(\Omega^1_S)) := R^1\,\mathrm{Hom}(\Omega_{X/S}, \bullet)(f^*(\Omega^1_S))$. Comme $\Omega^1_{X/S}$ est localement libre, on a $\mathrm{Ext}^1(\Omega^1_{X/S}, f^*(\Omega^1_S)) = H^1(X, \mathcal{H}om(\Omega^1_{X/S}, f^*\Omega^1_S)$.

Donc $c \in H^1(X, T_{X/S} \otimes f^*\Omega^1_S)$. On dispose d'une application naturelle $H^1(X, T_{X/S} \otimes f^*\Omega^1_S) \to H^0(S, R^1 f_* T_{X/S} \otimes \Omega^1_S)$ et l'image de c par cette application est notée $\rho \in H^0(S, R^1 f_* T_{X/S} \otimes \Omega^1_S)$.

Définition 1.17. On appelle $\rho : TS \to R^1 f_* T_{X/S}$, de fibre $\rho_s : T_s S \to H^1(X_s, T_{X_s})$ *l'application de Kodaira-Spencer* de la famille $X \to S$.

On a alors la proposition suivante :

Proposition 1.18. *L'application $\mathcal{O}_S$-linéaire*

$$\bar{\nabla} : R^q f_* \Omega^p_{X/S} \to \Omega^1_S \otimes R^{q+1} f_* \Omega^{p-1}_{X/S}$$

est égale au cup-produit par $\rho \in H^0(S, R^1 f_* T_{X/S} \otimes \Omega^1_S)$.

Exercice 1.19. La formule $\nabla_v = \theta((v_i)_i)$ donne le résultat en comprenant le cup-produit par ρ en cohomologie de Cech.

Références

[1] Voisin C., Théorie de Hodge et géométrie algébrique complexe, SMF

[2] Grothendieck A., Éléments de géométrie algébrique I, Publications mathématiques de l'IHÉS, 4, 1960