Table des matières

1 Cours 12 - 03/11

L'objectif de ce cours est l'étude des domaines de périodes, espaces classifiants pour les variations de structure de Hodge. On étudie la géométrie de ces objets et on donne quelques exemples simples. Finalement, on démontre le théorème de monodromie locale de Borel en utilisant des résultats sur la courbure d'une métrique hermitienne privilégiée sur ces domaines.

1.1 Variations de structure de Hodge

Si $f : X \to S$ est une famille de variétés kählériennes compactes, on a décrit dans les cours 10 et 11 les variations de structure de Hodge de $H^\bullet(X_s, \mathbb{R})$. En fait, on s'intéresse surtout à des structures de Hodge polarisées, en se restreignant à la cohomologie primitive $H^\bullet_{\text{prim}}(X_s, \mathbb{R})$. Dans la définition suivante, on rassemble les résultats démontrés sur ces variations pour définir les variations de structures de Hodge dans un cadre abstrait.

Définition 1.1.
- Une $\underline{\mathbb{R}}$-*variation de structures de Hodge* (ou $\underline{\mathbb{R}} - VHS$) de poids n sur un espace analytique S est la donnée suivante :
  - un système local de $\underline{\mathbb{R}}$-espaces vectoriels $\underline{H_\mathbb{R}}$ sur S,
  - une filtration décroissante holomorphe finie $F^\bullet$ de faisceaux localement libres $H_{\mathcal{O}_S} := \underline{H_\mathbb{R}} \otimes_\mathbb{R} \mathcal{O}_S$ tels que
  - si ∇ est la connexion de Gauss-Manin sur $H_{\mathcal{O}_S}$, $\nabla F^p H_{\mathcal{O}_S} \subset \Omega^1_S \otimes F^{p-1} H_{\mathcal{O}_S}$,
  - pour tout s dans S, F définit sur $(\underline{H_\mathbb{R}})_s$ une structure de Hodge de poids n.
- Une *polarisation* de $\underline{H_\mathbb{R}}$ est une forme bilinéaire localement constante Q sur $\underline{H_\mathbb{R}}$ induisant, pour tout s dans S, une polarisation de $(\underline{H_\mathbb{R}})_s$

Remarque 1.2. On peut remplacer les coefficients réels par des coefficients rationnels ou entiers. On parle alors de $\underline{\mathbb{Q}}$-VHS ou de $\underline{\mathbb{Z}}$-VHS.

1.2 Domaines de périodes

Il est naturel de se demander si le foncteur qui à un espace analytique S associe les variations de structures de Hodge sur S est représentable. Autrement dit, existe-t-il un espace universel U muni d'une variation de structures de Hodge, universelle au sens ou toute variation de structure de Hodge sur S s'obtiendrait en tirant en arrière par une morphisme analytique $f : S \to U$ la variation sur U ? La réponse à cette question est presque positive.

Dans la suite, on va réaliser les fibrés $\{F^p\}$ d'une $\underline{\mathbb{R}}$-VHS comme pullbacks de certains fibrés universels sur un espace classifiant. On cherche donc à paramétrer les $\underline{\mathbb{R}}$-VHS polarisées sur un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. Notons $H_\mathbb{R}$ un espace vectoriel réel et $H := H_\mathbb{R} \otimes_\mathbb{R} \mathbb{C}$ son complexifié. Fixons $n \in \mathbb{N}$; $\{h^{p,q}\}$ dans $\mathbb{N}$ vérifiant $p + q = n$ et soumis aux conditions $h^{p,q} = h^{q,p}$ et $\sum h^{p,q} = \dim_\mathbb{C} H$; Q une forme bilinéaire non dégénérée sur $H_\mathbb{R}$ qui est $(-1)^n$-symétrique.

Définition 1.3. On note $\check{D}$ l'ensemble des filtrations décroissantes $0 \subset \cdots \subset F^{p+1} \subset F^p \subset \cdots \subset F^0 = H$ telles que
- $\dim F^p = \sum_{i \geq p} h^{i,n-i}$,
- $Q_\mathbb{C}(F^p, F^{n-p+1}) = 0$

L'espace $\check{D}$ est une variété de drapeaux. Notons $G_{\mathbb{C}} = G(Q_{\mathbb{C}}) = \{T \in GL(H) \,|\, Q(T.x, T.y) = Q(x,y), \forall x, y \in H\}$ le groupe des automorphismes de H préservant $Q_{\mathbb{C}}$. C'est un groupe orthogonal ou symplectique suivant que n est pair ou impair.

Exercice 1.4. Le groupe $G_{\mathbb{C}}$ agit transitivement sur $\check{D}$.

Fixons $o \in \check{D}$ un point-base, correspondant à une filtration de référence $F_o^\bullet$. Notons P le fixateur (dans $G_{\mathbb{C}}$) de o, i.e. le stabilisateur de $F_o^\bullet$. C'est un sous-groupe parabolique de $G_{\mathbb{C}}$ et on a $\check{D} = G_{\mathbb{C}}/P$.

Le stabilisateur $\mathrm{Stab}_{GL(H)} F_o^\bullet$ s'identifie à l'ensemble des matrices triangulaires supérieures par blocs, avec des blocs diagonaux de taille $h^{n,0}, h^{n-1,1}, \ldots, h^{0,n}$. Alors, $G_{\mathbb{C}}/P = G_{\mathbb{C}}.o$ est une orbite fermée de $G_{\mathbb{C}}$ dans $GL(H)/\mathrm{Stab}_{GL(H)} F_o^\bullet$.

Définition 1.5. On note $D \subset \check{D}$ l'ensemble

$$D = \{F^\bullet \in \check{D} \,|\, i^{2p-n} Q_{\mathbb{C}}(v, \bar{v}) > 0, \forall v \in F^p \cap \overline{F^{n-p}}, v \neq 0\}.$$

C'est un ouvert de Hausdorff (par opposition à ouvert de Zariski) de $\check{D}$ donc une variété complexe.

Exemple 1.6. Si $n = 1$ et $\dim_{\mathbb{C}} H = 2$, une structure de Hodge réelle sur H est entièrement déterminée par la donnée d'une droite de $H \cong \mathbb{C}^2$. Donc $\check{D}$ s'identifie à $\mathbb{C}P^1$. La forme symplectique Q s'écrit $de_1 \wedge de_2$ pour une certaine base (e_1, e_2) de $H_{\mathbb{R}}$; si $v \in H$ a pour coordonnées $(1, b)$ dans (le complexifié de) cette base, on a $iQ(v, \bar{v}) = -2\Im(\bar{b})$ qui est strictement positif si et seulement si b est dans le demi-plan supérieur de Poincaré $\mathbb{H}^+$. Donc $\mathbb{H}^+ = D \subset \check{D} = \mathbb{C}P^1$.

On a enfin $G_{\mathbb{C}} = SL_2(\mathbb{C})$ et P est l'ensemble des matrices triangulaires supérieures dans $SL_2(\mathbb{C})$.

L'espace $D(H_{\mathbb{R}}, \{h^{p,q}\}, Q)$ paramètre les $\mathbb{R}$-structures de Hodge de poids n, de type $\{h^{p,q}\}$ et polarisées par Q. On l'appelle un *domaine de périodes*. L'espace $\check{D}$ est quant à lui son *espace dual*.

Notons $G_{\mathbb{R}} \subset G_{\mathbb{C}}$ le groupe des points réels : $G_{\mathbb{R}} = \{T \in G_{\mathbb{C}} \,|\, TH_{\mathbb{R}} \subset H_{\mathbb{R}}\}$. Alors, $G_{\mathbb{R}}$ agit sur D, car il préserve la conjugaison complexe. Par des arguments d'algèbre linéaire (du type théorème de Witt), on montre que G_R agit transitivement sur D. Donc :

$$D = G_{\mathbb{R}}/V \overset{\text{ouvert}}{\hookrightarrow} G_{\mathbb{C}}/P = \check{D},$$
$$V = G_{\mathbb{R}} \cap P.$$

Notons C_o l'opérateur de Weil sur la filtration privilégiée $F_o^\bullet$. Comme V commute à la conjugaison complexe et préserve la décomposition de Hodge (car il préserve la filtration et la conjugaison), V préserve $(x, y) := Q(Cx, \bar{y})$, forme hermitienne puisque $Q(Cx, \bar{x}) > 0$. Donc V est compact.

Exemple 1.7. Considérons $H_{\mathbb{R}}$ un espace vectoriel réel de dimension $2p + q$, avec $p > 1, q > 0, q \neq 2$. Soit Q une forme quadratique sur $H_{\mathbb{R}}$ de signature $(2p, q)$. Soit D le domaine des périodes des variations de structures de Hodge de $H_{\mathbb{R}}$, polarisées par Q, de poids 2 et de type $h^{0,2} = h^{2,0} = p$ et $h^{1,1} = q$.

Alors $G_{\mathbb{R}} = O(2p, q)$ et $V = U(p) \times O(q)$. En effet, un élément de $G_{\mathbb{R}}$ qui stabilise la filtration stabilise aussi la décomposition de Hodge. Sa restriction à $H^{1,1}$ est un élément de $O(q)$ et, comme il conserve la forme $Q_{\mathbb{C}}(v, \bar{v})$ (hermitienne à un facteur près) sur $H^{2,0}$, sa restriction à $H^{2,0} \oplus H^{0,2}$ est un élément de $U(p)$.

Donc $D = O(2p, q)/(U(p) \times O(q)) = PO(2p, q)/P(U(p) \times O(q))$.

Exemple 1.8. Gardons les notation précédentes et considérons plus en détail le cas $p = 2, q = 1$. Alors, une structure de Hodge polarisée sur H

$$H = H^{2,0} \oplus H^{1,1} \oplus H^{0,2},$$

est entièrement déterminée par $H^{2,0}$, un 2-plan $Q_{\mathbb{C}}$-isotrope. En effet, $H^{0,2} = \overline{H^{2,0}}$ et $H^{1,1} = (H^{0,2} \oplus H^{2,0})^{\perp Q_{\mathbb{C}}}$.

Donc $\check{D}$ s'identifie à l'espace des 2-plans $Q_{\mathbb{C}}$ isotropes de $H_{\mathbb{C}}$.

Plus explicitement, considérons

$$H = \langle e_0, e_1, \ldots, e_4 \rangle_{\mathbb{C}},$$
$$Q_{\mathbb{C}}(z) = z_0 z_3 + z_1 z_4 + z_2^2,$$
$$\sigma(z) = (\bar{z_3}, \bar{z_4}, -\bar{z_2}, \bar{z_0}, \bar{z_1}),$$

où σ est la conjugaison complexe.

Les points réels de H sont de la forme $z = (a_1 + ia_2, a_3 + ia_4, ia_5, a_1 - ia_2, a_3 - ia_4)$ (avec les a_i réels). Donc sur les points réels, $Q_{\mathbb{C}}(z) = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 - a_5^2$ qui est bien de signature $(4, 1)$.

Une structure de Hodge polarisée $F_o^\bullet$ par Q est donnée par $H^{2,0} = \langle e_0, e_1 \rangle$, $H^{0,2} = \langle e_3, e_4 \rangle$, $H^{1,1} = \langle e_2 \rangle$. Le stabilisateur $S := \mathrm{Stab}_{GL(H)}\, F_o^\bullet$ de cette structure (dans $GL(H)$) s'identifie aux matrices triangulaires supérieures par blocs dans $GL(5, \mathbb{C})$, avec blocs diagonaux de taille $2, 1, 2$ dans la base des e_i. L'espace homogène $PGL(5, \mathbb{C})/S$ est de dimension complexe 8.

L'espace $\check{D}$ est l'espace homogène $PO(5, \mathbb{C})/P$ où $P = PO(5, \mathbb{C}) \cap S$. Il est de dimension complexe 3.

Le domaine des périodes D est l'espace homogène $PO(4, 1)/PU(2)$. C'est un ouvert de $\check{D}$.

On peut aussi s'intéresser uniquement à la structure hermitienne donnée par $h(z) = Q_{\mathbb{C}}(z, \bar{z}) = |z_0|^2 + |z_1|^2 + |z_2|^2 + |z_3|^2 - |z_4|^2$ et considérer l'espace $D(H, h, \{2, 1, 2\})$ classifiant les filtrations de Hodge sur H de type $(2, 1, 2)$ et *polarisées* par h. C'est un espace homogène égal à $PU(4, 1)/P(U(2) \times U(1) \times U(2))$, qui est ouvert dans $PGL(5, \mathbb{C})/S$.

Finalement, on obtient le diagramme commutatif suivant, où les flèches verticales sont des inclusions d'ouverts :

$$\begin{tikzcd} \check{D} \arrow[r, hook] & PGL(5,\mathbb{C})/S \\ D \arrow[u, hook, "\text{ouvert}"] \arrow[r, hook] & D(H, h, \{2,1,2\}) \arrow[u, hook, "\text{ouvert}"'] \end{tikzcd}$$

1.3 Fibré tangent horizontal

On note $H_{\mathcal{O}} = \check{D} \times H$ le fibré trivial sur $\check{D}$ de fibre H. On a une filtration tautologique $F^\bullet$ sur ce fibré : au-dessus d'un point $d \in \check{D}$, la filtration de H est celle que représente d. Les sous-fibrés $F^p H_{\mathcal{O}}$ sont des fibrés holomorphes. On munit le fibré $H_{\mathcal{O}} \to \check{D}$ de la connexion plate triviale ∇.

Définition 1.9. Un vecteur $X \in T\check{D}$ est *horizontal* si $\nabla_X(F^p H_{\mathcal{O}}) \subset F^{p-1} H_{\mathcal{O}}$.

L'action de $G_{\mathbb{C}}$ sur $\check{D}$ s'étend, d'une part, en une action sur $H_{\mathcal{O}}$ qui préserve la filtration $F^\bullet H_{\mathcal{O}}$ et, d'autre part, en une action de $G_{\mathbb{C}}$ sur $T\check{D}$ qui envoie vecteurs horizontaux sur vecteurs horizontaux. On note $T_h\check{D}$ l'ensemble des vecteurs horizontaux et on va montrer que c'est un sous-fibré holomorphe de $T\check{D}$.

On a $\check{D} = G_{\mathbb{C}}/P$. Donc, $T_{eP} G_{\mathbb{C}}/P = \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}/\mathfrak{p}$ et $T\check{D} = G_{\mathbb{C}} \times_P (\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}/\mathfrak{p})$, où P agit sur $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}/\mathfrak{p}$ par la représentation adjointe ; cf. [1], chapitre 12.

Si $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ est l'algèbre de Lie de $G_{\mathbb{R}}$, la structure de Hodge $F_o^\bullet$ détermine une $\mathbb{R}$-structure de Hodge de poids 0 polarisée (par la forme de Killing, voir la dernière section) sur $\mathfrak{g}$:

$$\mathfrak{g}^{p,-p} = \{\xi \in \mathfrak{g}_{\mathbb{C}} \mid H_0^{r,s} \subset H_0^{r+p,s-p}\}.$$

On a les égalités $P = F^0\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ et $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}} = F^{-\infty}\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$. Donc

$$T\check{D} = G_{\mathbb{C}} \times_P F^{-\infty}\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}/F^0\mathfrak{g}_{\mathbb{C}},$$
$$T_h\check{D} = G_{\mathbb{C}} \times_P F^{-1}\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}/F^0\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}.$$

La deuxième égalité montre en particulier que $T_h\check{D}$ est un sous-fibré holomorphe de $T\check{D}$. On s'intéresse naturellement aux applications holomorphes dont la différentielle prend ses valeurs dans ce fibré.

Définition 1.10. Une application holomorphe $\phi : S \to \check{D}$ est *horizontale* si $\phi_*(TS) \subset T_h\check{D}$.

1.4 Application des périodes

Soit S une variété analytique connexe, munie d'une $\underline{\mathbb{R}}$-VHS $(\underline{H}_{\mathbb{R}}, F^\bullet, \underline{Q})$ polarisée de poids n. Notons $\pi : \tilde{S} \to S$ le revêtement universel de S. Le fibré $\pi^*\underline{H}_{\mathbb{R}}$ sur $\tilde{S}$ est trivial car $\tilde{S}$ est simplement connexe : on a donc $\pi^*\underline{H}_{\mathbb{R}} = \tilde{S} \times H_{\mathbb{R}}$, pour un $\mathbb{R}$-espace vectoriel $H_{\mathbb{R}}$. De plus, $\underline{Q} : \underline{H}_{\mathbb{R}} \otimes \underline{H}_{\mathbb{R}} \to \underline{\mathbb{R}}(-n)$ induit une polarisation $Q : H_{\mathbb{R}} \otimes H_{\mathbb{R}} \to \mathbb{R}(-n)$. Enfin, la filtration $F^\bullet \underline{H}_{\mathcal{O}_S} \subset \underline{H}_{\mathcal{O}_S} = \underline{H}_{\mathbb{R}} \otimes \mathcal{O}_S$ induit une filtration

$F^\bullet \underline{H}_{\mathcal{O}_{\tilde{S}}} \subset \underline{H}_{\mathcal{O}_{\tilde{S}}} = H_\mathbb{R} \otimes \mathcal{O}_{\tilde{S}}$.

Notons D le domaine des périodes avec les mêmes caractéristiques que la variation de structures de Hodge $(H_\mathbb{R}, F^\bullet \underline{H}_{\mathcal{O}_{\tilde{S}}}, Q)$. Alors, on a une application

$$\begin{aligned} F : \tilde{S} &\to D \\ \tilde{s} &\mapsto (H_\mathbb{R}, (F^\bullet \underline{H}_{\mathcal{O}_{\tilde{S}}})_{\tilde{s}}, Q). \end{aligned}$$

Cette application est holomorphe, par définition d'une $\underline{\mathbb{R}}$-VHS et horizontale par le critère de transversalité de Griffiths. Si on note $\rho : \pi_1(S) \to GL(H_\mathbb{R})$ la monodromie de $\underline{H}_\mathbb{R}$, on a aussi que F est ρ-équivariante car, Q étant plate, ρ prend en fait ses valeurs dans $G_\mathbb{R}(Q)$. On a ainsi :

$$\forall \gamma \in \pi_1(S), \forall \tilde{s} \in \tilde{S}, F(\gamma.\tilde{s}) = \rho(\gamma).F(\tilde{s}).$$

Finalement on voit que la donnée de la $\underline{\mathbb{R}}$-VHS $(\underline{H}_\mathbb{R}, F^\bullet, \underline{Q})$ polarisée de poids n est équivalente à la donnée d'un représentation de monodromie $\rho : \pi_1(S) \to G_\mathbb{R}(Q)$ et d'une application holomorphe horizontal ρ-équivariante $F : \tilde{S} \to D$.

Notons que si l'on part d'une $\underline{\mathbb{Z}}$-VHS polarisée, ρ prend ses valeurs dans $G_\mathbb{Z}$, groupe des automorphismes de H préservant $H_\mathbb{Z}$. Comme $G_\mathbb{Z}$ est discret dans $G_\mathbb{R}$, $F : \tilde{S} \to D$ passe au quotient en $\bar{F} : S \to D/G_\mathbb{Z}$.

1.5 Théorème de monodromie locale

Dans cette section, on définit une métrique hermitienne sur D, on calcule sa courbure et on démontre le théorème de monodromie locale de Borel suivant :

Théorème 1.11. *Soit $(\underline{H}_\mathbb{R}, F^\bullet, \underline{Q})$ une $\underline{\mathbb{Z}}$-VHS polarisée de poids n sur Δ^* (disque unité épointé). On considère la monodromie $\rho : \pi_1(\Delta^*) = \mathbb{Z} \to G_\mathbb{Z} \subset GL(H_\mathbb{Z})$ et on note T l'image du générateur 1 par ρ (T est appelée la transformation de Picard-Lefschetz). Alors T est quasi-unipotente : $\exists N, M \geq 1$: $(T^N - Id)^M = 0$.*

Pour démontrer ce théorème, on va utiliser certaines propriétés métriques sur les domaines de périodes $D = G/V$. Si G est un groupe de Lie semi-simple, son algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ est munie d'une $\mathbb{R}$-structure de Hodge de poids 0, dont on vérifie qu'elle est polarisée par la forme de Killing (non dégénérée pour G semi-simple) $\langle X, Y \rangle = \mathrm{Tr}(\mathrm{ad}(X) \circ \mathrm{ad}(Y))$ où $\mathrm{ad} : \mathfrak{g} \ni X \mapsto (V \mapsto [X, V]) \in \mathrm{End}\, \mathfrak{g}$.

On rappelle les égalités

$$\begin{aligned} T\check{D} &= G_\mathbb{C} \times_P F^{-\infty}\mathfrak{g}_\mathbb{C}/F^0\mathfrak{g}_\mathbb{C}, \\ T_h\check{D} &= G_\mathbb{C} \times_P F^{-1}\mathfrak{g}_\mathbb{C}/F^0\mathfrak{g}_\mathbb{C}. \end{aligned}$$

On a une décomposition $F^{-\infty}\mathfrak{g}_\mathbb{C}/F^0\mathfrak{g}_\mathbb{C} = \oplus_{p<0}\mathfrak{g}^{p,-p} \subset \mathfrak{g}_\mathbb{C}$. La forme $(X, Y) \mapsto \langle X, \bar{Y} \rangle$ définit une métrique G-invariante pseudo-kählérienne sur TD. Sa signature est $(\sum_{p<0 \text{ impair}} \dim \mathfrak{g}^{p,-p}, \sum_{p<0 \text{ pair}} \dim \mathfrak{g}^{p,-p})$. On considère plutôt la métrique hermitienne (mais non-kählerienne en général), G-invariante :

$$X, Y \mapsto -\langle X, C\bar{Y} \rangle =: (X, \bar{Y}).$$

Pour $X, Y \in \mathfrak{g}^{-1,1}$, on a $(X, \bar{Y}) = -\mathrm{Tr}(XY^*)$ où Y^* est la transconjuguée de Y pour Q et la conjugaison complexe sur $\mathfrak{g}_\mathbb{C}$. Dorénavant on identifiera $\overline{Y}$ le conjugué du champ de vecteur tangent holomorphe horizontal Y sur D) à Y^* le conjugué du vecteur $Y \in \mathfrak{g}^{-1,1}$ (relativement à la structure réelle sur $\mathfrak{g}_\mathbb{C}$ définie par $G_\mathbb{R}$).

Lemme 1.12. *Pour $X, Y \in \mathfrak{g}^{-1,1}$, la courbure $\Theta \in A^{1,1}(\mathrm{End}\, T\check{D})$ de $(\bullet, \bullet)$ est donnée par $\Theta(X, Y^*) = -\mathrm{ad}[X, Y^*]$.*

Démonstration. Admis, cf. [1], chapitre 13. □

Corollaire 1.13.

– *La courbure bisectionnelle holomorphe pour X, Y horizontaux (i.e. dans $\mathfrak{g}^{-1,1}$) qui commutent est*

$$K_{X,Y} = -\frac{\langle [X, Y^*], [X, Y^*]^* \rangle}{\langle X, X^* \rangle \langle Y, Y^* \rangle} \leq 0.$$

– *La courbure sectionnelle holomorphe $K_X := K_{X,X}$ est strictement négative et est donc bornée supérieurement par une constante < 0 sur D.*

Démonstration. On rappelle que la courbure sectionnelle $K_{X,Y}$ est égale à

$$K_{X,Y} = \frac{(\Theta(X, X^*).Y, Y)}{(X, X)(Y, Y)}.$$

Par le lemme précédent, on a $(\Theta(X, X^*).Y, Y) = -\operatorname{Tr}([[X, X^*], Y].Y^*) = ([X, Y], [X, Y]) - ([X^*, Y], [X^*, Y])$ par l'identité de Jacobi. Comme X et Y commutent, le premier terme est nul et le résultat s'ensuit.

Pour la courbure sectionnelle, on a $K_X = -\frac{([X,X^*],[X,X^*])}{(X,X)(X,X)} < 0$ car on vérifie aisément que $[X, X^*] = 0$ implique $X = 0$ □

Références

[1] Carlson, J., Müller-Stach S., Peters C., Period mappings and Period Domains, Cambridge studies in advanced mathematics, 2003