Table des matières

1 Cours 14 - 10/11

Dans ce cours, on introduit la catégorie des structures de Hodge mixtes et on passe par des considérations générales sur les 3-filtrations opposées pour montrer que cette catégorie est abélienne et dispose de bonnes propriétés. On précise ensuite le lien entre structures de Hodge mixtes et structures de Hodge semi-simples.

1.1 Structures de Hodge mixtes

On a déjà défini la catégorie $\mathcal{MHS}_{\mathbb{R}}^{\mathrm{ss}}$ des structures de Hodge réelles semi-simples. Une telle structure consiste en la donnée d'un espace vectoriel réel H et d'une bigraduation de son complexifié $H_{\mathbb{C}} = \oplus H^{p,q}$ avec $H^{p,q} = \overline{H^{q,p}}$. On a vu que cette catégorie est équivalente à celle des représentations de $\mathcal{S} = \mathrm{Res}_{\mathbb{C}/\mathbb{R}} G_m$ le tore de Deligne.

Si H est une structure de Hodge réelle semi-simple, on dispose de deux filtrations :
– une filtration décroissante (dite *de Hodge*) $F^\bullet$ sur $H_{\mathbb{C}}$: $F^p H_{\mathbb{C}} = \oplus_{p' \geq p} H^{p',q}$,
– une filtration croissante (dite *par le poids*) sur $H_{\mathbb{C}}$, qui provient d'une filtration sur $H_{\mathbb{R}}$: $W_n H_{\mathbb{C}} = \oplus_{p+q \leq n} H^{p,q}$.

Avec ces notations, on a $H^{p,q} = W_{p+q} \cap F^p \cap \overline{F^q}$ et $H = \oplus_n \mathrm{Gr}_n^W H$, $\mathrm{Gr}_n^W H$ étant muni d'une structure de Hodge réelle de poids n. On va retenir cette propriété des gradués de $W_\bullet$ pour définir les structures de Hodge mixtes.

Définition 1.1.
– Une *structure de Hodge mixte réelle*, ou $\mathbb{R}$-$\mathcal{MHS}$, est un espace vectoriel réel H muni d'une filtration décroissante $F^\bullet$ sur son complexifié et d'une filtration croissante $W_\bullet$ sur H lui-même, telles que la filtration $F^\bullet$ induise, pour tout n, une structure de Hodge réelle pure de poids n sur le gradué $\mathrm{Gr}_n^W H$.
– Un *morphisme* de $\mathbb{R}$-$\mathcal{MHS}$ est une application linéaire $f : H \to H'$, compatible aux deux filtrations, au sens où

$$f(W_n H) \subset W_n H' \; ; \; f_{\mathbb{C}}(F^p H_{\mathbb{C}}) \subset F^p H'_{\mathbb{C}}.$$

– Si H est une $\mathbb{R}$-$\mathcal{MHS}$, on note $H^{p,q} := (\mathrm{Gr}_{p+q}^W H)^{p,q}$ et $h^{p,q} = \dim_{\mathbb{C}} H^{p,q}$.

Remarque 1.2. On peut remplacer $\mathbb{R}$ par $\mathbb{Z}$ ou $\mathbb{Q}$: pour $\mathbb{Q}$, on demande que H soit un $\mathbb{Q}$-espace vectoriel et que $W_\bullet$ soit définie sur $\mathbb{Q}$; pour $\mathbb{Z}$, on demande que H soit un $\mathbb{Z}$-module de type fini et que $H_{\mathbb{Q}}$ soit une $\mathbb{Q}$-$\mathcal{MHS}$.

Le résultat suivant motive l'étude des structures de Hodge mixtes.

Théorème 1.3 (Deligne, [2], 8.2)**.**
– *Pour tout schéma séparé X sur $\mathbb{C}$, pour tout entier n, il existe une $\mathbb{Z}$-$\mathcal{MHS}$ fonctorielle sur $H^n(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z})$. L'isomorphisme de Künneth et le cup-produit sont des morphismes de $\mathbb{Z}$-$\mathcal{MHS}$.*
– *Si le nombre de Hodge $h^{p,q}$ de $H^n(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z})$ est non nul, alors $0 \leq p, q \leq n$. Si N est la dimension de X et si $n \geq N$, alors on a de plus l'égalité $n - N \leq p, q \leq N$. Enfin, si X est propre (resp. lisse), on a l'inégalité $p + q \leq n$ (resp. $p + q \geq n$).*

1.2 Un détour par les objets filtrés

Malgré les apparences, la catégorie des structures de Hodge mixtes est assez sympathique : c'est une catégorie abélienne dont les morphismes se comportent bien vis-à-vis des filtrations, théorème (1.11) ci-dessous. Pour prouver ce théorème, on suit l'approche de Deligne dans [1] et on montre un résultat analogue plus général dans une catégorie d'objets filtrés, théorème (1.19). Dans cette section, nous présentons ces objets filtrés, les filtrations opposées et la preuve de (1.19).

1.2.1 Objets filtrés

Soit $\mathcal{A}$ une catégorie abélienne.

Définition 1.4. Une *filtration décroissante* de $A \in \mathcal{A}$ est une famille $(F^nA)_{n\in\mathbb{Z}}$ de sous-objets de A tels que $F^mA \subset F^nA$ si $n \leq m$.

Remarque 1.5. Il est souvent naturel de considérer des filtrations croissantes $F_\bullet$, par exemple pour la filtration par le poids. On se ramènera toujours à des filtrations décroissantes, en posant $F^n = F_{-n}$.

On définit aussi des filtrations décalées : si $F^\bullet$ est une filtration décroissante de A, on dispose pour tout n d'une filtration décroissante $F[n]$ définie par

$$F[n]^pA = F^{n+p}A.$$

Dans le cas d'une filtration croissante $W_\bullet$, cela donne $W[n]_pA = W_{p-n}A$.

Définition 1.6. La filtration $F^\bullet$ de A est *finie* s'il existe m et n tels que $F^nA = A$ et $F^mA = 0$.

Définition 1.7. Un *morphisme* f entre deux objets filtrés $(A, F^\bullet)$ et $(B, F'^\bullet)$ est *filtré* si $f(F^nA) \subset F'^nB$.

On montre aisément que la catégorie des objets filtrés (ou celle des objets munis d'une filtration finie) de $\mathcal{A}$ est additive et admet noyaux et conoyaux. Par contre, si f est un morphisme filtré, la flèche naturelle $\mathrm{Coim} f \to \mathrm{Im}\, f$ n'est en général pas un isomorphisme filtré. Ceci motive la définition suivante.

Définition 1.8. Un morphisme filtré $f : (A, F^\bullet) \to (B, F'^\bullet)$ est *strict* si la flèche $\mathrm{Coim} f \to \mathrm{Im}\, f$ est un isomorphime filtré. Dans le cas où $\mathcal{A}$ est une catégorie de modules, on vérifie qu'il est équivalent de demander l'égalité $f(F^nA) = F^nB \cap f(A)$.

Si $(A, F^\bullet)$ est un objet filtré et : $B \hookrightarrow A$ un sous-objet de A, la *filtration induite* sur B est définie par $F^nB = F^nA \cap B$. C'est l'unique filtration $F^\bullet$ sur B rendant $j : (B, F^\bullet) \to (A, F^\bullet)$ strict. De même, si $\pi : A \twoheadrightarrow A/B$ est la projection canonique, on pose $F^n(A/B) = F^nA/(F^nA \cap B)$ et cette filtration est l'unique filtration sur A/B rendant π strict.

Lemme 1.9. *Considérons deux sous-objets $X \subset Y \subset (A, F^\bullet)$ de A. Alors, sur Y/X, la filtration quotient de la filtration induite sur Y coïncide avec la filtration induite de la filtration quotient sur A/X.*

Lemme 1.10.

– *Si $f : (A, F^\bullet) \to (B, F^\bullet)$ est un morphisme filtré entre objets munis de filtrations finies, f est strict si, et seulement si, la suite*

$$0 \to \mathrm{Gr}_F^\bullet \mathrm{Ker}\, f \to \mathrm{Gr}_F^\bullet A \to \mathrm{Gr}_F^\bullet B \to \mathrm{Gr}_F^\bullet \mathrm{Coker}\, f \to 0$$

est exacte.

– *Si $\Sigma : (A, F^\bullet) \to (B, F^\bullet) \to (C, F^\bullet)$ est une 0-suite (i.e. la composée des deux flèches est nulle), de morphismes stricts, alors*

$$H(\mathrm{Gr}_F^\bullet \Sigma) \cong \mathrm{Gr}_F H^\bullet(\Sigma),$$

où la filtration sur $H(\Sigma)$ provient de celles sur A, B et C.

1.2.2 2 et 3-filtrations opposées

On développe maintenant le formalisme des 2 et 3-filtrations opposées et on énonce le théorème (1.19) dont un corollaire est le théorème (1.11) suivant :

Théorème 1.11 (Deligne, [1], 2.3.5)**.**
- *La catégorie $\mathcal{MHS}_{\mathbb{Z}}$ est abélienne. Les noyaux et conoyaux des morphismes de $\mathcal{MHS}_{\mathbb{Z}}$ sont les noyaux et conoyaux usuels, munis des filtrations ($F^\bullet$ et $W_\bullet$) induite et quotient.*
- *Tout morphisme de $\mathcal{MHS}_{\mathbb{Z}}$ est strict pour les filtrations $F^\bullet$ et $W_\bullet$.*
- *Le foncteur $\mathrm{Gr}_n^W : \mathcal{MHS}_{\mathbb{Q}} \to HS_{\mathbb{Q}}^n$ est exact.*
- *Le foncteur $\mathrm{Gr}_F^p : \mathcal{MHS}_{\mathbb{Q}} \to \{\mathbb{C}$-espaces vectoriels$\}$ est exact.*

2-filtrations n-opposées Considérons $\mathcal{A}$ une catégorie abélienne et A un objet de $\mathcal{A}$ muni de deux filtrations (décroissantes) $F^\bullet$ et $G^\bullet$. Les gradués $\mathrm{Gr}_F^n A$ sont naturellement munis d'une filtration déduite de $G^\bullet$. On peut donc considèrer les objets

$$(\mathrm{Gr}_G^m \mathrm{Gr}_F^n A)_{m,n\in\mathbb{Z}}$$

dans $\mathcal{A}$ et on vérifie aisément le lemme suivant.

Lemme 1.12. *On a l'égalité $\mathrm{Gr}_G^m \mathrm{Gr}_F^n A = \mathrm{Gr}_F^n \mathrm{Gr}_G^m A$.*

Définition 1.13. Deux filtrations finies F et $\bar{F}$ sur $A \in \mathcal{A}$ sont dites *n-opposées* si

$$\mathrm{Gr}_F^p \mathrm{Gr}_{\bar{F}}^q A = 0 \text{ si } p+q \neq n.$$

Exemple 1.14. Si H est une structure de Hodge pure de poids n, les filtrations F et $\bar{F}$ sur $H_{\mathbb{C}}$ sont n-opposées.

Lemme 1.15 (Deligne, [1], 1.2.5)**.** *Deux filtrations F et $\bar{F}$ de A sont n-opposées si, et seulement si, pour tous $p+q=n+1$, $A = F^pA \oplus \bar{F}^qA$.*

Proposition 1.16. *On a une équivalence de catégories entre, d'une part, les objets de A munis de deux filtrations n-opposées et, d'autre part, les objets bigradués $A^{\bullet,\bullet}$ de $\mathcal{A}$ tels que $A^{p,q} = 0$ si $p+q \neq n$ et $A^{p,n-p} = 0$ sauf pour un nombre fini de p.*

Démonstration. Si $(A, F, \bar{F})$ est un objet muni de deux filtrations n-opposées, on pose $A^{p,q} = \mathrm{Gr}_F^p \mathrm{Gr}_{\bar{F}}^q A$. Réciproquement, si $A^{\bullet,\bullet}$ est un objet bigradué vérifiant les conditions de l'énoncé, on prend pour A la somme directe $\oplus A^{p,q}$, et pour F et $\bar{F}$ les filtrations naturelles sur le premier et le deuxième indice. Le lemme précédent montre qu'on obtient ainsi deux filtrations finies et n-opposées et ces opérations sont quasi-inverses l'une de l'autre. ☐

3-filtrations opposées

Définition 1.17. Trois filtrations finies $W^\bullet, F^\bullet, \bar{F}^\bullet$ sur $A \in \mathcal{A}$ sont *opposées* si $\mathrm{Gr}_F^p \mathrm{Gr}_{\bar{F}}^q \mathrm{Gr}_W^n A = 0$ dès que $p+q+n \neq 0$.

Remarque 1.18. Attention, si F, G et H sont trois filtrations, H induit une filtration sur les doubles gradués $\mathrm{Gr}_F^\bullet \mathrm{Gr}_G^\bullet A$ et $\mathrm{Gr}_G^\bullet \mathrm{Gr}_F^\bullet A$ qui sont isomorphes. Mais ces deux filtrations ne sont pas compatibles à l'isomorphisme $\mathrm{Gr}_F^\bullet \mathrm{Gr}_G^\bullet A \cong \mathrm{Gr}_G^\bullet \mathrm{Gr}_F^\bullet A$.

La condition de la definition (1.17) est donc symétrique en F et $\bar{F}$ mais pas en F et W. Il est équivalent de demander que F et $\bar{F}$ induisent deux filtrations $(-n)$-opposées sur les gradués Gr_W^n.

Si A est un objet muni de trois filtrations opposées, on peut poser $A^{p,q} := \mathrm{Gr}_F^p \mathrm{Gr}_{\bar{F}}^q \mathrm{Gr}_W^{-p-q} A$, de sorte que Gr_W^n s'identifie comme précédemment à $\oplus_{p+q=-n} A^{p,q}$.

On peut maintenant énoncer le théorème (1.19) qui implique le théorème (1.11).

Théorème 1.19 (Deligne, [1], 1.2.10)**.** *Soit $\mathcal{A}$ une catégorie abélienne, $\mathcal{A}'$ la catégorie des objets de $\mathcal{A}$ munis de 3-filtrations opposées $W^\bullet, F^\bullet, \bar{F}^\bullet$ (les morphismes étant compatibles aux trois filtrations). Alors*

1. *La catégorie $\mathcal{A}'$ est abélienne.*

2. *Le noyau, resp. conoyau de $f : A \to B$ dans $\mathcal{A}'$ est le noyau, resp. conoyau, dans $\mathcal{A}$, muni des filtrations induites par celles de A, resp. quotients de celles de B.*
3. *Tout morphisme $f : A \to B$ dans $\mathcal{A}'$ est strict pour les trois filtrations. De plus, $\mathrm{Gr}_W(f) : \mathrm{Gr}_W A \to \mathrm{Gr}_W B$ est compatible aux bigraduations de $\mathrm{Gr}_W A, \mathrm{Gr}_W B$; $\mathrm{Gr}_F(f)$ et $\mathrm{Gr}_{\bar{F}}(f)$ sont stricts par rapport aux filtrations induites par W.*
4. *Les foncteurs oublis des filtrations Gr_W, Gr_F, $\mathrm{Gr}_{\bar{F}}$ et $\mathrm{Gr}_W \mathrm{Gr}_F \cong \mathrm{Gr}_F \mathrm{Gr}_W \cong \mathrm{Gr}_{\bar{F}} \mathrm{Gr}_F \mathrm{Gr}_W \cong \mathrm{Gr}_{\bar{F}} \mathrm{Gr}_W \cong \mathrm{Gr}_W \mathrm{Gr}_{\bar{F}}$ de $\mathcal{A}'$ dans $\mathcal{A}$ sont exacts.*

Pour démontrer ce théorème, on énonce d'abord un résultat qui affirme l'existence de décompositions canoniques d'un objet muni de trois filtrations opposées.

Théorème 1.20 (Deligne et Cattani-Kaplan)**.** *Soit $A \in \mathcal{A}$ muni de trois filtrations opposées. Il existe deux décompositions uniques telles que :*

$$\begin{aligned} A &= \oplus_{p,q} I_0^{p,q} = \oplus_{p,q} I_1^{p,q}, \\ F^p A &= \oplus_{p' \geq p} I_0^{p,q}, \bar{F}^q A = \oplus_{q' \geq q} I_1^{p,q'}, \\ W^n A &= \oplus_{p+q+n \leq 0} I_0^{p,q} = \oplus_{p+q+n \leq 0} I_1^{p,q}, \\ I_0^{p,q} &= I_1^{p,q} \ mod \ \oplus_{r<p,s<q} I_0^{r,s} \\ I_1^{p,q} &= I_0^{p,q} \ mod \ \oplus_{r<p,s<q} I_1^{r,s} \quad . \end{aligned}$$

Démonstration. On se contente de donner les formules

$$\begin{aligned} I_0^{p,q} &= W^n \cap F^p \cap (\bar{F}^q + \sum_{i \geq 2} W^{n+i} \cap \bar{F}^{q-i+1}) \\ I_1^{p,q} &= W^n \cap \bar{F}^q \cap (F^p + \sum_{i \geq 2} W^{n+i} \cap F^{p-i+1}). \end{aligned}$$

□

Notons que dans le cas des structures de Hodge mixte réelles, cela donne le théorème suivant

Théorème 1.21. *Soit $(H_{\mathbb{R}}, W_\bullet, F^\bullet) \in \mathcal{MHS}_{\mathbb{R}}$. Il existe une unique décomposition $H_{\mathbb{C}} = \oplus_{p,q} I^{p,q}$ telle que*

$$\begin{aligned} F^p H_{\mathbb{C}} &= \oplus_{p' \geq p} I^{p',q} \\ W_n H_{\mathbb{C}} &= \oplus_{p+q \leq n} I^{p,q} \\ I^{p,q} &= \overline{I^{q,p}} \ mod \ \oplus_{r<p,s<q} I^{r,s} \end{aligned}$$

On a la formule

$$I^{p,q} = W_{p+q} \cap F^p \cap (\bar{F}^q + W_{n-2} \cap \bar{F}^{q-1} + W_{n-3} \cap \bar{F}^{q-2} + \dots).$$

1.2.3 Preuve du théorème 1.19

Soit $f : A \to B$ dans $\mathcal{A}'$.

3. On note A_i et B_i, $i = 0, 1$ les décompositions données par le théorème (1.20). Le morphisme f laisse stable ces décompositions : $f(A_i^{p,q}) \subset B_i^{p,q}$. Comme les $A_i^{p,q}$, resp. $B_i^{p,q}$ sont en somme directe dans A, resp. B, on a l'égalité $f(A_i^{p,q}) = f(A) \cap B_i^{p,q}$. Les W^n, F^p et $\bar{F}^q$ étant sommes directes de $I^{r,s}$, le morphisme f est strict pour les trois filtrations.

2. On fait la preuve pour le noyau. Notons $K = \ker f$ et munissons-le des filtrations induites de celles de A. Comme $A = \oplus A_i^{p,q}$ et $W^n = \oplus_{p+q+n \leq 0} A_i^{p,q}$, on a l'inclusion de gradués $\mathrm{Gr}_W K \hookrightarrow \mathrm{Gr}_W A$. Les filtrations F et $\bar{F}$ sur K induisent sur $\mathrm{Gr}_W K$ les filtrations induites de F et $\bar{F}$ sur $\mathrm{Gr}_W A$. On a

$$\mathrm{Gr}_W K = \oplus_{p+q} \mathrm{Gr}_W K \cap A^{p,q}.$$

Ceci implique que $\mathrm{Gr}_F^p \mathrm{Gr}_{\bar{F}}^q \mathrm{Gr}_W K$ s'injecte dans $\mathrm{Gr}_F^p \mathrm{Gr}_{\bar{F}}^q \mathrm{Gr}_W^n A$. En particulier, les filtrations F et $\bar{F}$ sur $\mathrm{Gr}_W^n K$ sont $-n$-opposées, donc $F, \bar{F}$ et W sont opposées sur K.

1. Si $f : A \to B$ dans $\mathcal{A}'$, on a un isomorphisme $\mathrm{Coim}\, f \to \mathrm{Im}\, f$ dans la catégorie abélienne $\mathcal{A}$. Comme $\mathrm{Coim}\, f$ et $\mathrm{Im}\, f$ correspondent à la coimage et à l'image de f dans $\mathcal{A}'$ par 2., la flèche $\mathrm{Coim}\, f \to \mathrm{Im}\, f$ est aussi un morphisme dans $\mathcal{A}'$ et c'est un isomorphisme dans $\mathcal{A}'$ car les morphismes sont stricts pour les trois filtrations d'après 3. Donc $\mathcal{A}'$ est abélienne.

4. laissé en exercice.

1.3 Structures de Hodge mixtes et structures de Hodge semi-simples

Étant donnée une structure de Hodge mixte $(H{\cdot}F^\bullet, W_\bullet)$, on utilise la décomposition $H_\mathbb{C} = \oplus_{p,q} I^{p,q}$ pour établir un critère de semi-simplicité.

Définition 1.22. Soit $(H, F^\bullet, W_\bullet)$ une structure de Hodge mixte réelle. On définit $Y_{F,W} \in \mathrm{End}(H_\mathbb{C})$ par $Y_{F,W}.v = (p+q)v$ si $v \in I^{p,q}$.

Lemme 1.23. *La structure de Hodge mixte réelle $(H, F^\bullet, W_\bullet)$ est semi-simple si, et seulement si, $Y_{F,W} \in \mathrm{End}(H_\mathbb{R})$*

Démonstration. Si $(H, F^\bullet, W_\bullet)$ est semi-simple, on a $I^{p,q} = H^{p,q} = \overline{H^{q,p}} = \overline{I^{q,p}}$ et $Y_{F,W}$ est un endomorphisme réel.

Réciproquement, remarquons que $Y_{F,W}$ préserve les filtrations (sur $H_\mathbb{C}$) $F^\bullet$ et $W_\bullet$. Donc si $Y_{F,W}$ est défini sur $\mathbb{R}$, c'est un morphisme de structures de Hodge mixtes réelles et donc ses espaces propres sont aussi des structures de Hodge mixte réelles. Mais ces espaces propres sont les sommes directes $\oplus_{p+q=n} I^{p,q} = \mathrm{Gr}_n^W H_\mathbb{C}$, donc des structures de Hodge pures. Donc, $(H, F^\bullet, W_\bullet)$ est semi-simple. ☐

Remarque 1.24. Attention, le résultat analogue est faux pour les structures entières.

Soit $(H, F^\bullet, W_\bullet)$ une structure de Hodge mixte réelle. On pose

$$L^{-1,-1}(W,F) = \{X \in \mathfrak{gl}(H_\mathbb{C}) \mid X(I^{p,q}_{W,F}) \subset \oplus_{r<p,s<q} I^{r,s}_{W,F}\}.$$

C'est une algèbre de Lie nilpotente sur $\mathbb{C}$. Comme $I^{p,q} = \overline{I^{q,p}}$ modulo $\oplus_{r<p,s<q} I^{r,s}$, $\overline{L^{-1,-1}} = L^{-1,-1}$. On note $L_\mathbb{R}^{-1,-1} := L^{-1,-1} \cap \mathfrak{gl}(H_\mathbb{R})$ sa forme réelle.

Proposition 1.25 (Cattani-Kaplan)**.**

- *Étant donnée $(H, F^\bullet, W_\bullet)$ une structure de Hodge mixte réelle, il existe un unique $\delta \in L_\mathbb{R}^{-1,-1}$ telle que $(H, e^{-i\delta}F^\bullet, W_\bullet)$ soit une structure de Hodge semi-simple.*
- *Tout morphisme de $(H, F^\bullet, W_\bullet)$ commute à δ et les morphismes de $(H, F^\bullet, W_\bullet)$ sont exactement les morphismes de $(H, e^{-i\delta}F^\bullet, W_\bullet)$ qui commutent à δ.*
- *On a un foncteur $(H, e^{-i\delta}F^\bullet, W_\bullet) \to ((H, e^{-i\delta}F^\bullet, W_\bullet), \delta)$, défini de la catégorie des structures de Hodge mixte réelles dans la catégories des paires $((V, F^\bullet, W_\bullet) \in \mathcal{MHS}_\mathbb{R}^{ss}, \delta \in L_\mathbb{R}^{-1,-1}(V, F, W))$ (avec morphismes les morphismes de structures de Hodge mixtes commutant à δ).*

Références

[1] Deligne P., Théorie de Hodge II, Publications mathématiques de l'IHES, 1971

[2] Deligne P., Théorie de Hodge III, Publications mathématiques de l'IHES, 1974