Table des matières

1 Cours 15 - 17/11

Le but de ce cours est d'associer une structure de Hodge mixte à la cohomologie de variétés présentant un certain type de singularités. C'est un exemple important du théorème de Deligne énoncé au cours précédent qui affirme l'existence d'une structure de Hodge mixte fonctorielle sur tout schéma séparé X sur $\mathbb{C}$.

1.1 Un exemple

Considérons deux cubiques génériques C_1, C_2 dans $\mathbb{C}P^2$. Topologiquement, C_i est difféomorphe au tore $S^1 \times S^1$. Par le théorème de Bezout, l'intersection $C_1 \cap C_2$ se compose de neuf points $p_1, \ldots, p_9$. On s'intéresse à la cohomologie de l'union $C = C_1 \cup C_2$. Notons i_1, i_2, i_{12} les inclusions de $C_1, C_2, C_1 \cap C_2$ dans C.

On a une suite exacte de faisceaux (sur C) de Mayer-Vietoris :

$$0 \to \mathbb{C}_C \to i_{1*}\mathbb{C}_{C_1} \oplus i_{2*}\mathbb{C}_{C_2} \to i_{12*}\mathbb{C}_{C_1 \cap C_2} \to 0.$$

La suite exacte longue de cohomologie associée est :

$$\begin{aligned} 0 \to H^0(C,\mathbb{C}) \to H^0(C_1,\mathbb{C}) \oplus H^0(C_2,\mathbb{C}) &\overset{\alpha}{\to} H^0(C_1 \cap C_2,\mathbb{C}) \\ \to H^1(C,\mathbb{C}) \to H^1(C_1,\mathbb{C}) \oplus H^1(C_2,\mathbb{C}) &\to H^1(C_1 \cap C_2,\mathbb{C}) \\ \to H^2(C,\mathbb{C}) \to H^2(C_1,\mathbb{C}) \oplus H^2(C_2,\mathbb{C}) &\to H^2(C_1 \cap C_2,\mathbb{C}). \end{aligned}$$

Des annulations $H^1(C_1 \cap C_2) = H^2(C_1 \cap C_2) = 0$, il vient

$$H^2(C_{\mathbb{C}}) = H^2(C_1,\mathbb{C}) \oplus H^2(C_2,\mathbb{C})$$

et une suite exacte courte

$$0 \to \operatorname{Coker}\alpha \to H^1(C,\mathbb{C}) \to H^1(C_1,\mathbb{C}) \oplus H^1(C_2,\mathbb{C}) \to 0.$$

L'égalité pour les H^2 munit $H^2(C,\mathbb{C})$ d'une structure de Hodge pure de poids 2 tandis que la suite exacte permet de voir $H^1(C,\mathbb{C})$ comme extension de $H^1(C_1,\mathbb{C}) \oplus H^1(C_2,\mathbb{C})$ qui a une structure de Hodge pure de poids 1 et de $\operatorname{Coker}\alpha$ qui a une structure de Hodge pure de poids 0.

Mais une telle extension n'est pas uniquement définie et il est donc délicat de munir $H^1(C,\mathbb{C})$ d'une structure de Hodge mixte.

On rencontre le même genre de problèmes dans un cadre plus général. Considérons X une variété propre sur $\mathbb{C}$. Par le théorème d'Hironaka, on peut résoudre les singularités de X : il existe $\tilde{X}$ une variété propre et lisse et π un morphisme de $\tilde{X}$ dans X tel que si S est le lieu des singularités de X et

$E = \pi^{-1}(S) \subset \tilde{X}$ le diviseur exceptionnel, on a un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, hook, "i"'] \arrow[d] & \tilde{X} \arrow[d, "\pi"] \\ S \arrow[r, hook, "j"'] & X \end{tikzcd}$$

et π réalise un isomorphisme $\tilde{X} - E \cong X - S$.

Lemme 1.1. *Notons $g = \pi \circ i$. Si F est un faisceau sur X, on a une suite de Mayer-Vietoris*

$$F \to j_*j^*F \oplus R\pi_*\pi^*F \to Rg_*g^*F \overset{+1}{\to}$$

qui est un triangle distingué dans $D^+(X)$.

Démonstration. On doit le vérifier sur les germes.

Si $x \notin S$, on a

$$F_x \to 0 \oplus F_x \to 0 \overset{+1}{\to} .$$

Si $x \in S$, on a

$$F_x \to F_x \oplus R\Gamma(E_x, F_{|E_x}) \to R\Gamma(E_x, F_{|E_x}) \overset{+1}{\to},$$

où $E_x = g^{-1}(x)$. □

Corollaire 1.2. *On a une suite exacte longue*

$$\cdots \to H^i(X, F) \overset{\pi^*+j^*}{\to} H^i(\tilde{X}, F) \oplus H^i(S, j^*F) \overset{i^*-p^*}{\to} H^i(E, g^*F) \to \dots$$

En considérant le faisceau $F = \mathbb{C}$ sur X, cette suite exacte permet par récurrence d'exprimer $H^i(X, \mathbb{C})$ comme extension de structures de Hodge mais on ne sait toujours pas de quelle extension il s'agit.

1.2 Structures de Hodge mixtes sur les variétés à croisements normaux

On s'intéresse à des variétés dont les singularités sont assez bien contrôlées.

Définition 1.3. Une *variété à croisements normaux* V est une union $V = D_1 \cup \cdots \cup D_N$ de variétés kählériennes compactes (lisses) et qui s'écrit localement $V = \{z_1, \dots, z_{n+1} \in \mathbb{C}^{n+1} \mid z_1 \cdot \dots \cdot z_k = 0, |z_i| < \epsilon, \forall i\}$, où pour tout $1 \le i \le k$, $z_i = 0$ est l'équation locale d'un unique D_{j_i}.

Théorème 1.4. *Sur $H^\bullet(V, \mathbb{R})$, il existe une structure de Hodge mixte réelle canonique et fonctorielle pour les morphismes entre telles variétés.*

Remarque 1.5.

- La fonctorialité n'est pas difficile à établir une fois précisée les morphismes à considérer. Nous en omettrons la preuve.
- On verra dans la preuve que la filtration par le poids satisfait

  $$W_{-1} = 0 \subset W_0 \subset \cdots \subset W_n = H^n(V),$$

  donc $h^{p,q}(H^n(V, \mathbb{C}))$ est nul sauf si $p, q \ge 0$ et $p + q \le n$.

1.2.1 Première étape

La première étape de la preuve consiste à définir un double complexe, dit *de Rham-simplicial*, qui utilise la structure particulière de V pour calculer sa cohomologie.

Pour $I = \{i_1, \dots, i_q\} \subset \{1, \dots, N\}$, on pose $D_I = D_{i_1} \cap \cdots \cap D_{i_q}$ et $D^{[q]} = \coprod_{1 \le i_1 < \cdots < i_q \le N} D_I$. C'est une variété kählérienne compacte, éventuellement vide.

On définit $A^{p,q} := A^p(D^{[q+1]})$ l'espace des p-formes complexes globales sur $D^{[q+1]}$. Une forme $\phi \in A^{p,q}$ s'écrit $\phi = \sum_{|I|=q+1} \phi_I$, où ϕ_I est une p-forme sur D_I.

Les $A^{p,q}$ forment un double complexe : on a

- la différentielle de de Rham $d : A^{p,q} \to A^{p+1,q}$,
- la différentielle simpliciale $\delta : A^{p,q} \to A^{p,q+1}$ définie par

$$(\delta\phi)_{j_1,\dots,j_{q+2}} = \sum_{l=1}^{q+2} (-1)^l \phi_{j_1,\dots,\hat{j_l},\dots,j_{q+2}|D_{j_1}\cap\dots D_{j_{q+2}}}$$

et les différentielles commutent.

On note $D = d + (-1)^p\delta$ la différentielle sur le complexe total $\mathrm{Tot}\, A^{\bullet,\bullet}$ associé.

Lemme 1.6. *On a un isomorphisme* $H^\bullet(\mathrm{Tot}\, A^{\bullet,\bullet}, D) \cong H^\bullet(V, \mathbb{C})$.

Cet isomorphisme peut se montrer au niveau des faisceaux. On construit $\mathcal{A}^{p,q}$ un faisceau sur V tel que $\Gamma(V, \mathcal{A}^{p,q}) = A^{p,q}$. En notant π_q l'application naturelle $\pi_q : D^{[q]} \to V$, on pose $\mathcal{A}^{p,q} = (\pi_{q+1})_* \mathcal{A}^p_{D^{[q+1]}}$, où $\mathcal{A}^p_{D^{[q+1]}}$ est le faisceau des p-formes complexes sur $D^{[q+1]}$, et on munit les $\mathcal{A}^{p,q}$ des différentielles d, δ, définies au niveau des faisceaux.

Enfin, on note $\mathcal{A}^\bullet = (\mathrm{Tot}\, \mathcal{A}^{\bullet,\bullet}, D)$ le complexe total associé dans $C^+(V)$. Comme les faisceaux $\mathcal{A}^{p,q}$ sont flasques, le lemme (1.6) est impliqué par

Lemme 1.7. $0 \to \mathbb{C}_V \to \mathcal{A}^\bullet$ *est une résolution.*

Démonstration. On se place dans un ouvert $U \subset V$ de la forme $\{z_1.\dots.z_k = 0, |z_i| < \epsilon\}$. On pose $A^{p,q} = \Gamma(U, \mathcal{A}^{p,q})$ et on s'intéresse à la suite spectrale du complexe $(A^{p,q}, d, \delta)$ par rapport à la filtration sur le deuxième indice $G^q A^n = \sum_{s\geq q, p+s=n} A^{p,s}$.

On a $E_1^{p,q} = H^q(A^{\bullet,p}(U), d)$, la cohomologie en degré q du complexe de de Rham de

$$\coprod_{1\leq i_1<\dots<i_{p+1}\leq k} U \cap \{z_{i_1} = 0\} \cap \dots \cap \{z_{i_{p+1}} = 0\}.$$

Chaque terme de cette somme disjointe est un espace contractile donc $E_1^{p,q} = 0$ si $q \geq 1$ et $E_1^{p,0} = \mathbb{C}^{\binom{k}{p+1}}$.

Comme E_1 n'a qu'une ligne non nulle, $E_2 = E_\infty$. De plus $d_1 : E_1^{p,0} \to E_1^{p+1,0}$ est égal à $\delta : H^0(A^{\bullet,p}(U), d) \to H^0(A^{\bullet,p+1}(U), d)$ et on est simplement en train de calculer la cohomologie d'un simplexe.

Donc $E_\infty^{p,q} = E_2^{p,q} = 0$ si $(p,q) \neq (0,0)$ et $E_\infty^{0,0} = \mathbb{C}$. Comme la suite spectrale calcule la cohomologie de $(A^\bullet(U), D)$, on a $H^n(A^\bullet(U), D) = 0$ pour $n \geq 1$ et $H^0(A^\bullet(U), D) = \mathbb{C}$. Donc $\mathbb{C}_V \cong_{q.i} (\mathcal{A}^\bullet, D)$. □

1.2.2 Deuxième étape

La deuxième étape consiste à introduire une filtration de Hodge et une filtration par le poids sur le double complexe $A^{p,q} = \Gamma(V, \mathcal{A}^{p,q})$ et à montrer que les objets de la deuxième page de la suite spectrale associée à la filtration par le poids sont naturellement munis de structures de Hodge pures.

On pose $W_n A^\bullet = \oplus_{s\geq -n} A^{r,s}$ et $F^p A^\bullet = \oplus_{r,s} F^p(A^{r,s})$, où $F^p(A^{r,s})$ est la filtration de Hodge usuelle sur $A^r(D^{[s+1]})$. Notons que ces filtrations découlent de filtration analogues sur le complexe de faisceaux $\mathcal{A}^\bullet$ (on ne s'en servira pas dans ce cas simple mais c'est crucial pour la preuve du théorème général de Deligne).

Notons ${}_W E$ la suite spectrale associée au complexe filtré $(A^\bullet, W_\bullet)$ (c'est-à-dire la suite spectrale associée à la filtration décroissante $W^\bullet = W_{-\bullet}$). On a

$${}_W E_1^{p,q} = H^{p+q}(\mathrm{Gr}_{-p}^{W_\bullet} A^\bullet) \Longrightarrow \mathrm{Gr}_{-p}^{W_\bullet} H^{p+q}(A^\bullet).$$

Comme $\mathrm{Gr}_{-p}^{W_\bullet} A^\bullet = A^p(D^{[p+1]})[-p]$, ${}_W E_1^{p,q} = H^q(D^{[p+1]})$. C'est une structure de Hodge pure de poids q.

De plus $d_1 : {}_W E_1^{p,q} \to {}_W E_1^{p+1,q}$ est déduite de $\delta : A^{q,p} \to A^{q,p+1}$. Donc

$$d_1 : H^q(D^{[p+1]}) \xrightarrow{\delta^*} H^q(D^{[p+2]})$$

est un morphisme de structures de Hodge pures de poids q et ${}_W E_2^{p,q}$ est une structure de Hodge pure de poids q.

Si l'on montre que la suite spectrale dégénère en E_2, on a ${}_WE_2^{p,q} = {}_WE_\infty^{p,q}$ et alors $(H^k(V,\mathbb{R}), W[k], F)$ est une structure de Hodge mixte réelle. En effet, on a $W[k]_p = W_{p-k}$ et donc

$$\mathrm{Gr}_q^{W[k]} H^k(V,\mathbb{C}) = \mathrm{Gr}_{q-k}^W H^k(V,\mathbb{C}) = \mathrm{Gr}_{-(k-q)}^W H^{(k-q)+q}(V,\mathbb{C}) = {}_WE_\infty^{k-q,q} = {}_WE_2^{k-q,q}$$

est bien de poids q.

1.2.3 Troisième étape

On montre la dégénérescence de la suite spectrale ${}_WE$ en ${}_WE_2$. Pour simplifier, on montre seulement que $d_2 = 0$; la preuve de $d_i = 0$ pour $i \geq 3$ est analogue.

Soit donc $\overline{[\alpha]} \in {}_WE_2^{p,q} = \mathrm{Ker}(d_1 : E_1^{p,q} \to E_1^{p+1,q}) / \mathrm{Im}(d_1 : E_1^{p-1,q} \to E_1^{p,q})$, représenté par $[\alpha] \in {}_WE_1^{p,q} = H^q(D^{[p+1]})$. On décompose $[\alpha]$ en types et on peut supposer que $\alpha \in \mathcal{C}_\infty^{r,s}(D^{[p+1]})$ avec $r+s = q$. La condition $d_1[\alpha] = 0$ signifie $\delta\alpha = d\beta$, où $\beta \in A^{q-1}(D^{[p+2]})$.

Alors $d_2(\overline{[\alpha]}) = [\delta\beta]$ dans $E_2^{p+2,q-1}$ (et $\delta\beta \in A^{q-1}(D^{[p+3]})$). On rappelle le lemme du $\partial\bar\partial$.

Lemme 1.8 (Lemme du $\partial\bar\partial$)**.** *Si $\phi \in A^{p,q}(X)$ sur X Kähler compacte est d-exacte, alors*

$$\phi = d\eta', \eta' \in A^{p-1,q}(X)(\implies \bar\partial\eta' = 0)$$
$$\phi = d\eta'', \eta' \in A^{p,q-1}(X)(\implies \partial\eta'' = 0)$$

D'après le lemme, $\delta\alpha$ s'écrit $d\beta' = d\beta''$ avec β' de type $(r-1,s)$ et β'' de type $(r, s-1)$. Donc $d_2(\overline{[\alpha]}) = [\delta\beta'] = [\delta\beta'']$ est représenté par des formes de type différent, donc $d_2(\overline{[\alpha]}) = 0$.

1.3 Exemples revisités

1.3.1 Cubiques dans $\mathbb{C}P^2$

On reprend l'exemple des cubiques développé au début du cours. Dans les pages des suites spectrales que nous écrivons ci-dessous, p est en abscisse et q en ordonnée.

$A^{p,q}$ **:**

$q=1$	$A^0\text{point}^{\oplus 9}$	0	0
$q=0$	$A^0(C_1) \oplus A_0(C_2)$	$A^1(C_1) \oplus A_1(C_2)$	$A^2(C_1) \oplus A_2(C_2)$

$E_1^{p,q}$ **:** Attention au renversement du tableau (on prend la filtration par rapport au deuxième indice) !

$$\begin{array}{llll}
q=2 & H^2(C_1) \oplus H^2(C_2) & 0 & 0 \\
q=1 & H^1(C_1) \oplus H^1(C_2) & 0 & 0 \\
q=0 & H^0(C_1) \oplus H^0(C_2) \xrightarrow{\delta} & H^0(\text{point})^{\oplus 9} & 0
\end{array}$$

$E_2^{p,q} = E_\infty^{p,q}$ **:**

$$\begin{array}{lll} q=2 & H^2(C_1)\oplus H^2(C_2) & 0 \\ \\ q=1 & H^1(C_1)\oplus H^1(C_2) & 0 \\ \\ q=0 & \mathbb{C}_\Delta \cong \mathbb{C} & \operatorname{Coker}\alpha \end{array}$$

La structure de Hodge mixte sur $H^1(C,\mathbb{R})$ est donnée par $W[1]$. Ses gradués sont $\operatorname{Gr}_0^{W[1]} H^1(C,\mathbb{C}) = \operatorname{Coker}\alpha$ et $\operatorname{Gr}_1^{W[1]} H^1(C,\mathbb{C}) = H^1(C_1)\oplus H^1(C_2)$.

1.3.2 Trois droites dans $\mathbb{C}P^2$

On considère l'union de trois droites $V = V_1 \cup V_2 \cup V_3$ en position générale dans $\mathbb{C}P^2$. On a $V^{(0)} = V_1 \coprod V_2 \coprod V_3$ et $V^{(1)} = \{p_1, p_2, p_3\}$ les points d'intersection des droites. La suite spectrale est la suivante :

$A^{p,q}$ **:**

$$\begin{array}{llll} q=1 & A^0\text{point}^{\oplus 3} & 0 & 0 \\ \\ q=0 & A^0(V_1)\oplus A^0(V_2)\oplus A^0(V_3) & A^1(V_1)\oplus A^1(V_2)\oplus A^1(V_3) & A^2(V_1)\oplus A^2(V_2)\oplus A^2(V_3) \end{array}$$

$E_1^{p,q}$ **:**

$$\begin{array}{lll} q=2 & \oplus H^2(V_i) & 0 \\ \\ q=1 & \oplus H^1(V_i)=0 & 0 \\ \\ q=0 & \oplus H^0(V_i) \xrightarrow{\delta} & H^0\text{point}^{\oplus 3} \end{array}$$

$E_2^{p,q} = E_\infty^{p,q}$ **:**

$$\begin{array}{lll} q=2 & \mathbb{C} & 0 \\ \\ q=1 & 0 & 0 \\ \\ q=0 & \mathbb{C} & \mathbb{C} \end{array}$$

En particulier, $H^1(V) = \mathbb{C}$ est muni d'une structure de Hodge pure de poids 0 !