Table des matières

1 Cours 16 - 22/11

Dans ce cours, on démontre un autre cas particulier du théorème général de Deligne énoncé au cours 14, affirmant l'existence d'une structure de Hodge mixte sur tout schéma séparé sur $\mathbb{C}$. Dans le cours précédent, on a montré ce théorème dans le cas des variétés à croisements normaux ; nous nous intéressons maintenant au cas des variétés algébriques lisses quasi-projectives.

Théorème 1.1. *Soit U une variété algébrique lisse quasi-projective sur $\mathbb{C}$. Alors $H^k(U,\mathbb{Z})$ admet une structure de Hodge mixte entière fonctorielle. Les poids de $H^k(U,\mathbb{Z})$ varient entre k et $2k$ et $h^{p,q}(H^k(U,\mathbb{Z})) = 0$ sauf si $0 \leq p,q \leq k$.*

1.1 Stratégie de preuve

La preuve est similaire à celle du cours précédent ; on peut la découper en 4 étapes.

- D'abord, le théorème de Hironaka sur la résolution des singularités montre que, si U est une variété quasi-projective, U peut se réaliser comme ouvert d'une variété projective lisse X avec $D = X - U$ une variété globalement à croisements normaux, i.e. D peut s'écrire comme l'union $D = \cup_i D_i$, où D_i est une variété projective lisse et, localement, $D = \{|z_i| < \epsilon, z_1 \times \cdots \times z_k = 0 \text{ dans } \mathbb{C}^{k+1}\}$, $z_i = 0$ étant une équation locale d'un unique D_{j_i}.
  Notant j l'inclusion de U dans X, la première étape consiste à construire un complexe de faisceaux $S^\bullet$ sur X tel que $S^\bullet$ soit quasi-isomorphe à $j_*\mathbb{C}_U$. Ce complexe $S^\bullet$ sera muni de deux filtrations $W_\bullet$ et $F^\bullet$ et la suite spectrale du complexe filtré $(S^\bullet, W_\bullet)$ converge vers la cohomologie de U.
- Ensuite, on montre que $F^\bullet$ induit une structure de Hodge pure sur ${}_WE_2^{p,q}$.
- La troisième étape consiste à montrer que la suite spectrale pour $(S^\bullet, W_\bullet)$ dégénère en E_2, de sorte que la cohomologie de U est munie d'une structure de Hodge mixte.
- Enfin, il reste à prouver que cette construction est indépendante du plongement ouvert $U \hookrightarrow X$ et qu'elle est fonctorielle par rapport aux morphismes entre variétés lisses.

1.2 Preuve

Première étape On considère un plongement de U dans X comme précédemment.

Définition 1.2. Avec les notations précédentes, on définit le *complexe logarithmique (lisse)* sur X par : pour tout ouvert V de X, $A_X^k(V, \log D) \subset A^k(U \cap V)$ est le sous-espace des k formes ϕ sur $U \cap V$ telles que $z_1\phi, \ldots, z_l\phi, z_1 d\phi, \ldots, z_l d\phi$ s'étendent en des formes lisses sur V, où $D \cap V$ s'écrit localement $\{|z_i| < \epsilon, z_1 \times \cdots \times z_l = 0\}$.

On définit aussi un *complexe logarithmique holomorphe* par

$$\Omega_X^k(V, \log D) = \Omega_X^k(U \cap V) \cap A_X^k(V, \log D).$$

Par définition, $dA_X^k(V, \log D) \subset A_X^{k+1}(V, \log D)$ et $d\Omega_X^k(V, \log D) \subset \Omega_X^{k+1}(V, \log D)$. On a donc bien deux complexes, $\mathcal{A}_X^\bullet(\log D) \subset j_*\mathcal{A}_U^\bullet$ et $\Omega_X^\bullet(\log D) \subset j_*\Omega_U^\bullet$.

Théorème 1.3 (Griffiths, 1969)**.** *Les inclusions $\Omega_X^\bullet(\log D) \hookrightarrow \mathcal{A}_X^\bullet(\log D) \hookrightarrow (j_*\mathcal{A}_U^\bullet, d) \cong_{q.i} R^\bullet j_*\mathbb{C}_U$ sont des quasi-isomorphismes.*

Démonstration. On commence par énoncer un lemme permettant de mieux comprendre les faisceaux $\mathcal{A}_X^\bullet(\log D)$ et $\Omega_X^\bullet(\log D)$.

Lemme 1.4. *Si $V \cap U = \{|z_i| < \epsilon, z_1 \times \cdots \times z_l = 0\}$, alors $\Omega_X^\bullet(\log D) \cong \Omega_X^\bullet(V)\{\frac{dz_1}{z_1}, \ldots, \frac{dz_l}{z_l}\}$. De même, $\mathcal{A}_X^\bullet(\log D) \cong \mathcal{A}_X^\bullet(V)\{\frac{dz_1}{z_1}, \ldots, \frac{dz_l}{z_l}\}$.*

Démonstration. Pour simplifier, on fait la preuve dans le cas $l = 1$, le cas général étant analogue. On a clairement l'inclusion $\Omega^\bullet_X(V)\{\frac{dz_1}{z_1}\} \subset \Omega^\bullet_X(\log D)$.

Réciproquement, soit $\alpha \in \Omega^\bullet_X(\log D)$. Par définition, $\alpha = \frac{\beta}{z_1}$, avec $\beta \in \Omega^\bullet_X(V)$. Écrivons $\beta = \gamma \wedge dz_1 + \delta$, où $\gamma, \delta \in \Omega^\bullet_X(V)$, δ étant sans dz_1. On a

$$\begin{aligned} z_1 d\alpha &= z_1[\frac{d\beta}{z_1} + \beta \wedge \frac{dz_1}{z_1^2}] \\ &= z_1[\frac{d\gamma \wedge dz_1}{z_1} + \frac{d\delta}{z_1} + \frac{\delta \wedge dz_1}{z_1^2}]. \end{aligned}$$

Nécessairement, on doit avoir $\mu := \frac{\delta}{z_1} \in \Omega^\bullet_X(V)$. Donc $\alpha = \gamma\frac{dz_1}{z_1} + \mu \in \Omega^\bullet_X(V)\{\frac{dz_1}{z_1}\}$.

L'isomorphisme $\mathcal{A}^\bullet_X(\log D) \cong A^\bullet_X(V)\{\frac{dz_1}{z_1}, \dots, \frac{dz_l}{z_l}\}$ se montre de façon similaire. □

Prouvons maintenant le théorème (1.3). Localement, $D = \{z_1 \times \cdots \times z_l = 0\}$ et $U = X - D$ est difféomorphe à $D_1^* \times \cdots \times D_l^* \times D_{l+1} \times \cdots \times D_n$, qui est homotope à $(S^1)^l$. Il s'agit de montrer que l'inclusion $\Omega^\bullet_X(\log D) \hookrightarrow j_*\mathcal{A}^\bullet_U$ induit un isomorphisme $H^k(\Gamma(X, \Omega^\bullet_X(\log D))) \overset{\phi}{\cong} H^k(U, \mathbb{C})$. De nouveau, l'isomorphisme $H^k(\Gamma(X, \mathcal{A}^\bullet_X(\log D))) \cong H^k(U, \mathbb{C})$ se montre similairement.

- Montrons d'abord la surjectivité. À homotopie près, U est un tore donc $H^k(U, \mathbb{C}) = \Lambda^k H^1(U, \mathbb{C})$. Notons $\eta_i = \frac{dz_i}{z_i} \in \Gamma(X, \Omega^1_X(\log D))$ et $[\eta_i]$ sa classe dans $H^1(\Gamma(X, \Omega^\bullet_X(\log D)))$. On a

$$\int_{\partial D_j} \phi([\eta_i]) = \int_{\partial D_j} \eta_i = 2\pi i \delta_{ij}.$$

  Donc les $\phi([\eta_i])$ engendrent $H^1(U, \mathbb{C})$. Si $\eta_I := \Lambda_{i\in I}\eta_i$, les $\{\phi(\eta_I)\}_{|I|=k}$ engendrent donc $H^k(U, \mathbb{C})$.
- Pour l'injectivité, il est suffisant de montrer que si $\alpha \in \Gamma(X, \Omega^k_X(\log D)))$ est d-fermé, alors α est d-cohomologue à $\tilde{\alpha} = \sum_{|I|=k} a_I \eta_I$, où les a_I sont des constantes complexes. On montre cela par récurrence sur l, avec $D = \{z_1 \times \cdots \times z_l = 0\}$.
  - Si $l = 0$, le complexe considéré est simplement le complexe de de Rham holomorphe et le résultat s'ensuit.
  - Si le résultat est vrai pour $l - 1$, écrivons $\alpha = \frac{dz_l}{z_l} \wedge \beta + \gamma$, où β ne fait pas intervenir dz_l et ne dépend pas de z_l, et où γ est holomorphe en la variable z_l (i.e. n'a pas de pôle de la forme $\frac{dz_l}{z_l}$). Comme $d\alpha = 0$, on a $\frac{dz_l}{z_l} \wedge \beta + d\gamma = 0$. Mais β ne dépend pas de z_l et $d\gamma$ n'a pas de pôle en z_l, donc $d\beta = d\gamma = 0$.

    En appliquant l'hypothèse de récurrence à β et $D' = \{z_1 \times \cdots \times z_{l-1} = 0\}$, on a $\beta = \tilde{\beta} + d\phi$, où $\tilde{\beta}$ est à coefficients constants. Donc $\frac{dz_l}{z_l} \wedge \beta = \frac{dz_l}{z_l} \wedge \tilde{\beta} - d(\frac{dz_l}{z_l} \wedge \phi)$. Comme γ est holomorphe en z_l, $\gamma \in \Gamma(X, \Omega^1_X(\log D')))$. On a de plus $d\gamma = 0$, donc γ aussi s'écrit $\gamma = \tilde{\gamma} + d\psi$, où $\tilde{\gamma}$ est à coefficients constants.

    Donc $\alpha = (\frac{dz_l}{z_l} \wedge \tilde{\beta} + \tilde{\gamma}) + d(\psi - \frac{dz_l}{z_l} \wedge \phi)$, ce qui achève la preuve par récurrence et la démonstration du théorème.

□

On définit maintenant la filtration par le poids sur le complexe $\Omega^\bullet_X(\log D)$.

Définition 1.5. On définit une filtration croissante $W_\bullet$ sur $\Omega^\bullet_X(\log D)$ en posant $W_p(\Omega^\bullet_X(\log D))$ l'espace des formes logarithmiques holomorphes ayant au plus l pôles de la forme $\frac{dz_i}{z_i}$. On définit de même $W_p(\mathcal{A}^\bullet_X(\log D))$ en considérant des formes lisses.

Rappelons quelques notations utilisées dans le cours précédent : si $I = \{i_1, \dots, i_l\} \subset \{1, \dots, N\}$, on note $D_I = D_{i_1} \cap \cdots \cap D_{i_l}$. Pour tout k, $D^{[k]} := \sqcup_{|I|=k} D_I$, et i_k est l'application naturelle $D^{[k]}$ dans X. On a alors la proposition suivante.

Proposition 1.6. *On a un isomorphisme canonique* $\mathrm{Gr}^W_k\, \Omega^\bullet_X(\log D) \overset{\mathrm{Res}_k}{\cong} i_{k*}\Omega^{\bullet-k}_{D^{[k]}}$, *où* Res_k *est défini dans la preuve.*

Démonstration. Considérons $\alpha \in \Gamma(V, W_k\Omega_X^\bullet(\log D))$. On a

$$\alpha = \sum_{K,L} \alpha_{K,L} dz_L \wedge \frac{dz_K}{z_K},$$

où $K \subset \{1, \ldots, N\}, |K| \leq k$. On définit $\mathrm{Res}_k\, \alpha \in \Gamma(V, i_{k*}\Omega_{D^{[k]}}^{\bullet-k})$ par

$$(\mathrm{Res}_k\, \alpha)_I = (2\pi i)^k \sum_L (\alpha_{I,L} dz_L)_{|D_I \cap V},$$

où les multi-indices I sont de cardinal k.

Il est clair que $\mathrm{Res}_k\, \alpha$ s'annule sur $W_{k-1}\Omega_X^\bullet(\log D)$ et on vérifie sans peine que la définition est indépendante du choix des coordonnées et que Res_k commute à d. Donc Res_k définit un morphisme de faisceaux

$$\mathrm{Res}_k : \mathrm{Gr}_k^W \Omega_X^\bullet(\log D) \to i_{k*}\Omega_{D^{[k]}}^{\bullet-k}.$$

Montrons que c'est un isomorphisme.

Pour la surjectivité, si des α_K holomorphes sur chaque $D_K \cap V$, $|K| = k$, sont donnés, on peut localement étendre holomorphiquement α_K en $\tilde{\alpha_K}$ dans un voisinage de $D_K \cap V$. Alors, en posant

$$\alpha = \sum_K (\frac{1}{2\pi i})^k \tilde{\alpha_K} \wedge \frac{dz_K}{z_K},$$

on a $\mathrm{Res}_k\, \alpha = (\alpha_K)_K$.

Pour l'injectivité, si $\mathrm{Res}_k\, \alpha = 0$, alors $\alpha_{K,L}$ s'annule sur $D_K \cap V$ pour tout K de cardinal k et tout L. Donc $\alpha \in W_{k-1}(\Omega_X^\bullet(\log D))$. □

Corollaire 1.7. *On considère la suite spectrale associée au complexe filtré* $(\Omega_X^\bullet(\log D), W^\bullet)$*, où* $W^\bullet = W_{-\bullet}$*. Alors, on a* ${}_WE_1^{p,q} = H^{2p+q}(D^{[-p]}, \mathbb{C})$.

Démonstration. On a

$$\begin{aligned}
{}_WE_1^{p,q} &= H^{p+q}(\mathrm{Gr}^p_{W^\bullet} \Omega_X^\bullet(\log D)) \\
&= H^{p+q}(\frac{W^{-p}\Omega_X^\bullet(\log D)}{W^{-p-1}\Omega_X^\bullet(\log D)}) \\
&= H^{p+q}(\Omega_{D^{[-p]}}^{\bullet+p}) \\
&= H^{2p+q}(\Omega_{D^{[-p]}}) \\
&= H^{2p+q}(D^{[-p]}, \mathbb{C}).
\end{aligned}$$

□

Exemple 1.8. Si X est une surface et D est une union de courbes lisses, la première page de la suite spectrale est la suivante :

$$H^0(D^{[2]}) \xrightarrow{d_1} H^2(D^{[1]}) \xrightarrow{d_1} H^4(X) \longrightarrow 0$$

$$0 \longrightarrow H^1(D^{[1]}) \xrightarrow{d_1} H^3(X) \longrightarrow 0$$

$$H^0(D^{[1]}) \xrightarrow{d_1} H^2(X) \longrightarrow 0$$

$$0 \longrightarrow H^1(X) \longrightarrow 0$$

$$0 \longrightarrow H^0(X) \longrightarrow 0$$

Deuxième étape Sur le complexe $\Omega^\bullet_X(\log D)$, on dispose de la filtration de Hodge

$$F^p\Omega^\bullet_X(\log D) = \Omega^{\geq p}(\log D)$$

et de même sur $\mathcal{A}^\bullet_X(\log D)$,

$$F^p\mathcal{A}^\bullet_X(\log D) = \oplus_{i\geq p} A^{i,\bullet}_X(\log D).$$

Comme Res_k abaisse le degré des formes par k, il est naturel de définir une structure de Hodge pure de poids q sur ${}_W E_1^{p,q}$, en transportant celle sur $H^{2p+q}(D^{[-p]}, \mathbb{C})(p)$ *via* l'isomorphisme $\mathrm{Res}_{-p} : {}_W E_1^{p,q} \cong H^{2p+q}(D^{[-p]}, \mathbb{C})$.

Lemme 1.9. *L'application $d_1 : {}_W E_1^{p,q} \to {}_W E_1^{p+1,q}$ est un morphisme de structures de Hodge.*

Démonstration. Il s'agit d'identifier le morphisme $\tilde{d_1} : H^{2p+q}(D^{[-p]}, \mathbb{C})(p) \to H^{2p+q+2}(D^{[-p-1]}, \mathbb{C})(p+1)$ obtenu *via* les isomorphismes $\mathrm{Res}_{-p} : {}_W E_1^{p,q} \cong H^{2p+q}(D^{[-p]}, \mathbb{C})$ et $\mathrm{Res}_{-p-1} : {}_W E_1^{p+1,q} \cong H^{2p+q+2}(D^{[-p-1]}, \mathbb{C})$. On peut montrer qu'il s'agit du morphisme de Gysin mais on l'admettra (cf. [1]). □

Corollaire 1.10. *${}_W E_2^{p,q}$ admet une structure de Hodge pure réelle de poids q.*

Remarque 1.11. On peut en fait démontrer que cette structure de Hodge pure est définie sur $\mathbb{Z}$. En fait, la filtration par le poids $W_\bullet$, induit, à un changement d'indice près, la filtration de Leray sur $H^\bullet(U, \mathbb{C})$, cf. les remarques du cours suivant.

Troisième étape On admet (cf. [2]) que la suite spectrale ${}_W E^{\bullet,\bullet}$ dégénère en E_2. Comme elle converge vers la cohomologie de U, on a, d'après le corollaire précédent, l'existence d'une structure de Hodge mixte sur la cohomologie de U.

Quatrième étape Il reste à montrer que la définition de la structure de Hodge mixte sur la cohomologie de U est fonctorielle et ne dépend pas de la compactification X choisie.

Soient U et V deux variétés quasi-projectives, $f : V \to U$ un morphisme. Choisissons une compactification X de U. Alors, par le théorème d'Hironaka, on peut trouver une compactification Y de V pour laquelle il existe un morphisme $\bar{f} : Y \to X$ prolongeant f. Ceci prouvera la fonctorialité une fois démontrée l'indépendance par rapport à la compactification.

Mais si X et X' sont deux compactifications de U, on peut trouver une troisième compactification X'' et des morphismes $X'' \to X$ et $X'' \to X$ tel que le diagramme

$$\begin{tikzcd} X & X'' \arrow[l] \arrow[d] \\ U \arrow[u] \arrow[ur] \arrow[r] & X' \end{tikzcd}$$

soit commutatif. Ceci prouve que l'on a des morphismes de structure de Hodge mixtes entre les structures de Hodge mixtes sur $H^bullet(U)$ *via* les différentes compactifications. Comme au niveau vectoriel, ces morphismes sont simplement d'identité de $H^\bullet(U)$, ce sont des isomorphismes de structure de Hodge mixtes.

Références

[1] Deligne, P., Théorie de Hodge II, Publications mathématiques de l'IHÉS, 40, 1971

[2] Griffiths, P. et Schmid, W., Recent developments in Hodge theory, 1975