Table des matières

1 Cours 17 - 24/11

Dans ce cours, on donne quelques applications de la théorie de Hodge. On montre notamment la dégénerescence en E_2 de la suite spectrale de Leray d'un morphisme projectif lisse, le théorème de la partie fixe et le théorème de semi-simplicité, ces théorèmes étant dus à Deligne.

1.1 Suite spectrale de Leray

Théorème 1.1 (Leray)**.** *Soit $f : X \to Y$ une application continue entre espaces topologiques. Soit F un faisceau en groupes abéliens sur X. Il existe une suite spectrale*

$$E_2^{p,q} = H^p(Y, R^q f_* F) \Longrightarrow H^{p+q}(X, F).$$

Démonstration. En notant Γ_X et Γ_Y les foncteurs de sections globales sur X et Y, on a $\Gamma_X = \Gamma_Y \circ f_*$ et il suffit alors d'appliquer la suite spectrale d'un foncteur composé (cf. cours 11). □

Exemple 1.2. Considérons la fibration de Hopf $f : S^3 \to S^2$ et prenons pour F le faisceau constant $\mathbb{Z}$. Les fibres de f sont des cercles S^1 et, comme S^2 est simplement connexe, le système local $R^q f_* \mathbb{Z}$ est trivial, égal à $H^q(S^1, \mathbb{Z})$. Donc

$$E_2^{p,q} = H^p(S^2, H^q(S^1, \mathbb{Z})).$$

Avec p en abscisse, q en ordonnée, la page E_2 est :

$$\begin{array}{cccc}
H^0(S^2, H^1(S^1, \mathbb{Z})) = \mathbb{Z} & 0 & \mathbb{Z} & 0 \\
\mathbb{Z} & 0 & \mathbb{Z} & 0
\end{array}$$

Les flèches d_2 vont de $E_2^{p,q}$ dans $E_2^{p+2,q-1}$. La seule éventuellement non nulle va donc de $E_2^{0,1}$ dans $E_2^{2,0}$ et on peut vérifier qu'il s'agit bien d'un isomorphisme. La page E_3 est donc

$$\begin{array}{cccc}
0 & 0 & \mathbb{Z} & 0 \\
\mathbb{Z} & 0 & 0 & 0
\end{array}$$

et la suite spectrale de Leray dégénère en E_3.

Remarque 1.3. Vu la deuxième page, il est clair que la suite spectrale dégénère au maximum en E_3. Connaissant la cohomologie de S^3, on peut affirmer *a priori* que $d_2 : E_2^{0,1} \to E_2^{2,0}$ est un isomorphisme.

En particulier, la fibration de Hopf donne un exemple où la suite spectrale de Leray ne dégénère pas en E_2. Le résultat suivant est donc très fort.

Théorème 1.4 (Dégénerescence en E_2 de la suite spectrale de Leray pour les morphismes projectifs lisses, Deligne)**.** *Soit f un morphisme projectif lisse entre variétés analytiques. Alors la suite spectrale de Leray*

$$E_2^{p,q} = H^p(Y, R^q f_* \mathbb{Q}) \Longrightarrow H^{p+q}(X, \mathbb{Q})$$

dégénère en E_2. On a donc

$$H^n(X,\mathbb{Q}) = \oplus_{p+q=n} H^p(Y, \underline{H^q}(F,\mathbb{Q})),$$

où $\underline{H^q}(F,\mathbb{Q})$ désigne le système local de fibre $H^q(F_y,\mathbb{Q})$ en $y \in Y$.

Démonstration. Cet énoncé purement topologique est une conséquence du théorème de Lefschetz difficile. Pour simplifier, on suppose X et Y projectives lisses. Comme f est une fibration $\mathcal{C}^\infty$ localement triviale, $R^q f_*\mathbb{Q}$ est localement constant de fibre $H^q(X_Y,\mathbb{Q})$. On dispose sur X d'une classe de Kähler $c_1(\mathcal{O}_X(1))$ et d'un morphisme de Lefschetz $L = c_1(\mathcal{O}_X(1)) \cup \vdots H^\bullet(X,\mathbb{Q}) \to H^{\bullet+2}(X,\mathbb{Q})$.

On peut en fait voir L au niveau faisceautique $L : R^\bullet f_*\mathbb{Q} \to R^{\bullet+2} f_*\mathbb{Q}$. En effet, la classe $c_1(\mathcal{O}_X(1))$ se restreint à $f^{-1}(U)$ pour tout ouvert U de Y ; on a donc un morphisme $L_{|f^{-1}(U)} : H^q(f^{-1}(U),\mathbb{Q}) \to H^{q+2}(f^{-1}(U),\mathbb{Q})$ et ces morphismes sont compatibles.

Comme les faisceaux $R^k f_*\mathbb{Q}$ sont localement constants, le théorème de Lefschetz difficile admet une version en famille :

$$R^k f_*\mathbb{Q} = \oplus_{2r\leq k} L^r \mathcal{P}^{k-2r}, k \leq n$$

où n est la dimension des fibres X_y et où $\mathcal{P}^{k-2r}$ est le faisceau de cohomologie primitive en degré $k-2r$, de fibre H^{k-2r}_{prim} en $y \in Y$.

On dispose aussi d'un isomorphisme de Lefschetz en famille :

$$L^{n-k} : R^k f_*\mathbb{Q} \cong R^{2n-k} f_*\mathbb{Q}, k \leq n.$$

Lemme 1.5. *L'opérateur $L : R^\bullet f_*\mathbb{Q} \to R^{\bullet+2} f_*\mathbb{Q}$ induit un endomorphisme de degré 2 de la suite spectrale de Leray,*

$$L_r : (E_r^{p,q}, d_r) \to (E_r^{p,q+2}, d_r).$$

Démonstration. Voir [2], 4.2.1. □

Revenons à la preuve de la dégénerescence en E_2 de la suite spectrale de Leray. On montre seulement que $d_2 = 0$, la preuve générale découlant alors d'une récurrence avec les mêmes arguments.

Si $q \geq n$, on a un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc}
E_2^{p,2n-q} = H^p(Y, R^{2n-q} f_*\mathbb{Q}) & \xrightarrow{L_2^{q-n}} & E_2^{p,q} = H^p(Y, R^q f_*\mathbb{Q}) \\
\downarrow d_2 & & \downarrow d_2 \\
E_2^{p+2,2n-q-1} = H^{p+2}(Y, R^{2n-q-1} f_*\mathbb{Q}) & \xrightarrow{L_2^{q-n}} & E_2^{p+2,q-1} = H^{p+2}(Y, R^{q-1} f_*\mathbb{Q})
\end{array}$$

Comme les flèches horizontales sont des isomorphismes, on se ramène à $q \leq n$. Alors

$$E_2^{p,q} = \oplus_{2r\leq q} L_2^r H^p(Y, \mathcal{P}^{q-2r})$$

et, comme d_2 et L_2^r commutent, il suffit de montrer que d_2 s'annule sur $H^p(Y,\mathcal{P}^{q-2r})$. On a le diagramme

$$\begin{array}{ccc}
H^p(Y, \mathcal{P}^{q-2r}) & \xrightarrow{L^{n-(q-2r)+1}} & H^p(Y, R^{2n-(q-2r)+2} f_*\mathbb{Q}) \\
\downarrow d_2 & & \downarrow d_2 \\
H^{p+2}(Y, R^{q-2r-1} f_*\mathbb{Q}) & \xrightarrow[L^{n-(q-2r)+1}]{} & H^{p+2}(Y, R^{2n-(q-2r)+1} f_*\mathbb{Q})
\end{array}$$

La flèche horizontale du haut est nulle par définition de la cohomologie primitive. Celle du bas est un isomorphisme ; donc le d_2 à gauche est nul. □

Remarque sur la suite spectrale de Leray Dans le cours précédent, on a défini une suite spectrale associée à une filtration par le poids. On rappelle les notations suivantes : U est une variété lisse quasi-projective, qui se plonge dans une variété X projective lisse, le complémentaire $D = X - U$ étant à croisements normaux. On a défini un complexe logarithmique holomorphe $\Omega_X^\bullet(\log D)$, quasi-isomorphe à $j_*\Omega_U^\bullet$.

Sur le complexe $\Omega_X^\bullet(\log D)$, on dispose d'une filtration par le poids :

$$W_k\Omega_X^\bullet(\log D) = \langle \alpha \wedge \frac{dz_{i_1}}{z_{i_1}} \wedge \cdots \wedge \frac{dz_{i_l}}{z_{i_l}}, l \leq k\rangle.$$

On obtient dès lors une suite spectrale associée au complexe filtré $(\Omega_X^\bullet(\log D), W^\bullet)$ qui converge vers la cohomologie de U.

Cette suite spectrale s'identifie en fait à la suite spectrale de Leray associée à l'inclusion $j : U \to X$. Nous donnons les grandes lignes de l'argumentation, les détails sont dans [1].

- D'abord, on définit une *filtration canonique* sur un complexe $(K^\bullet, d)$ par

  $$\tau_{\leq p}K^n = K^n \text{ pour } n \leq p-1, \mathrm{Ker}(d) \text{ pour } n = p, 0 \text{ pour } n \geq p+1.$$

  Soit f une application continue entre deux espaces topologiques X et Y. Si F est un faisceau sur X, soit $F^\bullet$ une résolution f_*-acyclique de F. On a donc $R^if_*F = H^i(f_*F^\bullet)$. On considère alors le complexe $f_*F^\bullet$ muni de sa filtration canonique et le foncteur des sections globales sur Y. On montre que la suite spectrale d'hypercohomologie de ce complexe filtré (cf. cours 11) s'identifie à une renumérotation près, à la suite spectrale de Leray pour f et F.
- Ensuite, on montre que le complexe $\Omega_U^\bullet$ est une résolution j_*-acyclique du faisceau constant $\mathbb{C}$. Par le point précédent, cela montre que la suite spectrale de Leray pour l'inclusion j est calculée par la suite spectrale d'hypercohomologie du complexe filtré $(j_*\Omega_U^\bullet, \tau_\leq)$.
- Enfin, on montre que l'on a des quasi-isomorphismes filtrés $(\Omega_X^\bullet(\log D), W) \cong (\Omega_X^\bullet(\log D), \tau_\leq) \cong (j_*\Omega_U^\bullet, \tau_\leq)$.

Cela prouve alors que, dans cette situation, la suite spectrale de Leray pour l'inclusion j s'identifie à la suite spectrale du complexe filtré $(\Omega_X^\bullet(\log D), W)$. On obtient notamment que $W_0H^k(U,\mathbb{C}) = \mathrm{Im}(j^* : H^k(X,\mathbb{C}) \to H^k(U,\mathbb{C}))$ en considérant le gradué par le poids dans la suite spectrale de Leray.

1.2 Théorème de la partie fixe

Soit $f : X \to Y$ un morphisme projectif lisse.

Proposition 1.6. *Notons $\iota_y : X_y \hookrightarrow X$. Alors $H^k(X,\mathbb{Q}) \xrightarrow{\iota_y^*} H^k(X_y,\mathbb{Q})$ a pour image $H^k(X_y,\mathbb{Q})^\rho$, où $\rho : \pi_1(Y,y) \to GL(H^k(X_y,\mathbb{Q}))$ est la monodromie du système local $R^kf_*\mathbb{Q}$.*

Démonstration. On a une surjection $H^k(X,\mathbb{Q}) \twoheadrightarrow \mathrm{Gr}^0 H^k(X,\mathbb{Q}) = E_\infty^{0,k}$, où le gradué correspond à la suite spectrale de Leray pour f. En général, $E_\infty^{0,k}$ est inclus dans $E_2^{0,k}$ (comme $p = 0$, il n'y a pas de quotients) et $E_2^{0,k} = H^0(Y, R^kf_*\mathbb{Q}) = H^k(X_y,\mathbb{Q})^\rho$ (cf. lemme 4.17 dans [2] pour cette dernière égalité).

Ici, la suite spectrale dégénère en E_2 donc $E_2^{0,k} = E_\infty^{0,k}$, on a donc une surjection $H^k(X,\mathbb{Q}) \twoheadrightarrow H^k(X_y,\mathbb{Q})^\rho$ et on peut vérifier que cette surjection s'identifie à $H^k(X,\mathbb{Q}) \xrightarrow{\iota_y^*} H^k(X_y,\mathbb{Q})$. □

Proposition 1.7. *Soient $Y \subset X$ deux variétés projectives lisses, U un ouvert de Zariski de X contenant Y. Alors*

$$\mathrm{Im}(H^\bullet(U,\mathbb{Q}) \to H^\bullet(Y,\mathbb{Q})) = \mathrm{Im}(H^\bullet(X,\mathbb{Q}) \to H^\bullet(Y,\mathbb{Q})).$$

Démonstration. On rappelle que tout ouvert de Zariski U d'une variété projective lisse X admet sur sa cohomologie $H^k(U,\mathbb{Q})$ une structure de Hodge mixte telle que $W_iH^k(U,\mathbb{Q}) = 0$ si $iXXX0$ telle que $W_0H^k(U,\mathbb{Q}) = \mathrm{Im}(j^* : H^k(X,\mathbb{Q}) \to H^k(U,\mathbb{Q}))$ (on ne l'a démontré que dans le cas d'un ouvert dont le complémentaire est à croisements normaux).

En notant i, j les inclusions, $Y \overset{j}{\hookrightarrow} U \overset{j}{\hookrightarrow} X$, on a

$$\begin{aligned}\operatorname{Im} j^* &= \operatorname{Im} j^* \cap W_0 H^\bullet(Y) \text{ car } W_0 H^\bullet(Y) = H^\bullet(Y)\\ &= j^*(W_0 H^\bullet(U)) \text{ car les morphismes de structures de Hodge mixte sont stricts}\\ &= (i \circ j)^* H^\bullet(X).\end{aligned}$$

□

On peut maintenant prouver le théorème de la partie fixe.

Théorème 1.8 (Théorème de la partie fixe, Deligne)**.** *Soit $\phi : X \to Y$ un morphisme propre lisse et dominant entre variétés projectives lisses. Soit U un ouvert de Zariski de Y au-dessus duquel ϕ est une submersion. Alors, pour $y \in U$, l'image de l'application de restriction $H^k(X, \mathbb{Q}) \to H^k(X_y, \mathbb{Q})$ est égal à $H^k(X_y, \mathbb{Q})^\rho$, où ρ est la monodromie $\pi_1(U, y) \to GL(H^k(X_y, \mathbb{Q}))$.*

Démonstration. On note $X_U = \phi^{-1}(U) \subset X$. Par la proposition (1.6), l'image de l'application de restriction $H^k(X_U, \mathbb{Q}) \to H^k(X_y, \mathbb{Q})$ est $H^k(X_y, \mathbb{Q})^\rho$. Il suffit alors d'appliquer la proposition précédente pour les inclusions $X_y \subset U \subset X$. □

Corollaire 1.9. *Soit $\phi : X \to Y$ un morphisme projectif lisse, avec X et Y lisses et quasi-projectifs. Alors, pour $y \in Y$, l'espace $H^k(X_y, \mathbb{Q})^\rho$ est une sous-structure de Hodge rationnelle de $H^k(X_y, \mathbb{Q})$.*

Démonstration. On choisit des compactifications $\bar{X}$ et $\bar{Y}$ de X et Y telles que ϕ s'étende en $\bar{\phi} : \bar{X} \to \bar{Y}$. Alors le corollaire se déduit du théorème précédent et du fait que l'image d'un morphisme de structure de Hodge est une sous-structure de Hodge de l'espace d'arrivée. □

1.3 Théorème de semi-simplicité

On énonce sans preuve un théorème de Schmid qui généralise le théorème de la partie fixe dans un cadre non-géométrique.

Théorème 1.10. *Soit V une $\mathbb{Q}$-variation de structures de Hodge de poids k sur une variété S quasi-projective lisse. Alors, $H^0(S, V)$ admet une structure de Hodge rationnelle de poids k telle que, pour tout $s \in S$, l'application $H^0(S, V) \hookrightarrow V_s$, est un morphisme de structures de Hodge rationnelles.*

On en obtient aisément plusieurs corollaires.

Corollaire 1.11. *Toute $\mathbb{Q}$-VHS sur S simplement connexe est constante.*

Démonstration. En effet, $H^0(S, V)$ est alors égal à V_s (en tant que structures de Hodge) pour s dans S de sorte que la variation de structures de Hodge V s'identifie à la variation constante de fibre $H^0(S, V)$. □

Corollaire 1.12. *Soit t une section globale plate de $V_{\mathbb{C}}$. Supposons que $t_s \in (V_{\mathbb{C}}^{p,q})_s$ pour un certain $s \in S$. Alors t est de type (p, q) en tout point.*

Corollaire 1.13. *Tout morphisme de $\mathbb{Q}$-structures de Hodge $W_s \xrightarrow{f} W'_s$, équivariant sous la monodromie, s'étend en un morphisme de $\mathbb{Q}$-variations de structures de Hodge $W \to W'$.*

Démonstration. On pose $V = \operatorname{Hom}_{\mathbb{Q}-VHS}(W, W')$. Alors $f \in V_s = \operatorname{Hom}_{\mathbb{Q}-HS}(W_s, W'_s)$ est invariant sous la monodromie donc s'étend en une section globale plate. Comme f est un morphisme de structures de Hodge, il est de type $(0, 0)$, donc son extension aussi, en tout point de S, par le corollaire précédent. □

Corollaire 1.14. *La catégorie des $\mathbb{Q}$-VHS polarisées sur S est semi-simple.*

Démonstration. Considérons $W' \subset W$ une inclusion dans $\mathbb{Q}-VHS$. Soit $s \in S$. Comme W_s est polarisée, on dispose d'un projecteur dans $\operatorname{End}_{\mathbb{Q}-HS}(W_s)$ d'image $W's$, qui commute à $\pi_1(S, s)$. Par le corollaire précédent, ce projecteur s'étend à $\operatorname{End}_{\mathbb{Q}-VHS}(W)$ et est d'image W'. □

On peut finalement démontrer le théorème de semi-simplicité.

Théorème 1.15 (Théorème de semi-simplicité, Deligne)**.** *Soit H une $\mathbb{Z}$-VHS polarisable sur Q quasi-projective. Alors $\rho : \pi_1(S, s) \to GL(H_s)$ est semi-simple.*

Démonstration. Si V est une système local complexe, on note V^c le fibré vectoriel complexe sous-jacent et on dira qu'un sous-fibré de V^c est *horizontal* s'il est défini par un sous-système local de V. On dispose alors du lemme suivant.

Lemme 1.16. *Soit $V \subset H_{\mathbb{C}}$ un sous-système local de rang 1. Si $V^{\otimes r}$ est un système local trivial, alors pour tout t dans $\mathcal{S}$ le tore de Deligne, tV^c est encore horizontal.*

Démonstration. Le sous-fibré tV^c est horizontal si et seulement si $(tV^c)^{otimesr} = (t(V^c)^{\otimes r}) \subset (H_{\mathbb{C}}^c)^{\otimes r}$ est horizontal. Par hypothèse, $(V^c)^{\otimes r}$ est engendré par une section globale horizontale v. Par le théorème de Schmid, l'espace des sections globales admet une structure de Hodge, donc tv est encore horizontale et le sous-fibré tV^c est bien horizontal. □

La preuve du théorème de semi-simplicité se fait maintenant par récurrence sur $\dim(H_{\mathbb{C}}^c)_s$. Notons d la dimension minimale des sous-systèmes locaux de $H_{\mathbb{C}}$ et $W \subset H_{\mathbb{C}}$ la somme (non nécessairement directe) des sous-systèmes locaux de dimension d. Par construction, W est défini sur $\mathbb{Q}$ et on note $W_{\mathbb{Z}} = W \cap H_{\mathbb{Z}}$ les points entiers de W ; $W = W_{\mathbb{Z}} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}$.

Comme W est somme de représentations simples, W est semi-simple. On montre que $W_{\mathbb{Q}}$ définit une sous-variation de structures de Hodge. Considérons $V \subset W$ un sous-système local de dimension d. On peut écrire $W = V \oplus V'$ et, si e est la dimension de W,

$$\Lambda^e W = \Lambda^d V \otimes \Lambda^{e-d} V'.$$

Mais comme, $\Lambda^e W$ est défini sur $\mathbb{Z}$, $\pi_1(S, s)$ agit par multiplication par ± 1 donc $(\Lambda^e W)^{\otimes 2}$ est trivial. D'après le lemme, on a donc que, pour $t \in \mathcal{S}$,

$$t.(\Lambda^e W) = \Lambda^d(tV^c) \otimes \Lambda^{e-d} t(V')^c$$

est horizontal. Dès lors, $\Lambda^d(tV^c)$ est localement constant, donc tV^c aussi. Donc W^c est localement constant et stable par le tore de Deligne : c'est donc une sous-variation de structures de Hodge rationnelles. Comme H est polarisée, on a une décomposition $H = W_{\mathbb{Q}} \oplus W_{\mathbb{Q}}^{\perp}$ par le corollaire (1.14). Ceci conclut la preuve par récurrence. □

Remarque 1.17. Le théorème de Schmid admet une généralisation plus difficile : si V est une $\mathbb{Q}$-variation de structures de Hodge polarisées de poids k sur une variété quasi-projective S, alors $H^i(S, V)$ admet naturellement une structure de Hodge mixte. Si S est compacte, la structure est pure de poids $i + k$.

Références

[1] Deligne, P., Théorie de Hodge II, Publications mathématiques de l'IHÉS, 40, 1971

[2] Voisin, C. Hodge Theory and Complex Algebraic Geometry, 2002