Théorie de Hodge abélienne et non-abélienne

Bruno Klingler

15 septembre 2011

Table des matières

1 Cours 2 - 15/09

Ce cours explicite le cours précédent. Le théorème 1.5, fondamental, est seulement mentionné.

Nous renvoyons à [2] pour plus de détails, et en particulier à [1] pour le théorème 1.5. Se plonger ensuite dans les délices du théorème de l'indice d'Atiyah-Singer.

1.1 Théorie de Hodge d'une variété riemannienne compacte

Soit (X, g) une variété riemannienne compacte orientée. La métrique g sur TX définit une métrique sur T^*X : les bases orthonormées de T^*X sont les bases duales des bases orthonormées de TX. Elle définit aussi des métriques sur les fibrés $\Lambda^k T^*X$: on a $g(\alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_k, \beta_1 \wedge \cdots \wedge \beta_k) = \det(g(\alpha_i, \beta_j))_{i,j}$, où les α_i, β_j sont dans T^*X.

On définit aussi une métrique L^2 sur $A^k(X, \mathbb{R})$ par $(\alpha, \beta) = \int_X g_x(\alpha_x, \beta_x) d\mu_g$, où $d\mu_g$ désigne la forme volume sur M associée à g. On peut exprimer cette métrique via l'*opérateur de Hodge* $* : A^k(X) \to A^{n-k}(X)$.

Opérateur $*$ de Hodge.

- Rappelons d'abord l'isomorphisme entre $\Lambda^{n-k}T_x^*X$ et $\mathrm{Hom}(\Lambda^k T_x^*X, \Lambda^n T_x^*X)$ obtenant en faisant le wedge $\alpha \wedge \beta$, où $\alpha \in \Lambda^{n-k}T_x^*X$ et $\beta \in \Lambda^k T_x^*X$. On vérifie aisément que ce pairing définit une injection de $\Lambda^{n-k}T_x^*X$ dans $\mathrm{Hom}(\Lambda^k T_x^*X, \Lambda^n T_x^*X)$, donc un isomorphisme pour des raisons de dimension.
- Comme X est orientée, son fibré $\Lambda^n T^*X$ est trivial et le respect de la métrique donne un isomorphisme canonique $\Lambda^n T^*X \cong \mathbb{R}$.
- Enfin, la métrique sur $\Lambda^k T_x^*X$ donne un isomorphisme entre $\Lambda^k T_x^*X$ et son dual $\mathrm{Hom}(\Lambda^k T_x^*X, \mathbb{R})$.
- On définit ponctuellement $*$, comme la composition de ces trois isomorphismes :

$$\Lambda^k T_x^*X \cong \mathrm{Hom}(\Lambda^k T_x^*X, \mathbb{R}) \cong \mathrm{Hom}(\Lambda^k T_x^*X, \Lambda^n T_x^*X) \cong \Lambda^{n-k}T_x^*X.$$

Par construction, on obtient $(\alpha, \beta) = \int_X \alpha \wedge *\beta$, pour $\alpha, \beta \in A^k(X, \mathbb{R})$.

Remarque 1.1. On peut étendre ces définitions au cas complexe : on étend $*$ par $\mathbb{C}$-linéarité aux formes complexes et $(.,.)$ devient hermitien en posant $(\alpha, \beta) = \int_X \alpha \wedge *\bar{\beta}$.

Lemme 1.2. $*^2 = (-1)^{k(n-k)}$ *sur* $A^k(X)$.

Adjoint d_g^* de d. Posons $d^* = d_g^* = (-1)^k *^{-1} d*$ sur $A^k(X)$. Si n pair, on a $d_g^* = - * d*$ d'après le lemme précédent.

Lemme 1.3. $(\alpha, d^*\beta)_{L^2} = (d\alpha, \beta)_{L^2}$

Démonstration. On a d'une part :

$$\begin{aligned}(d\alpha,\beta)_{L^2} &= \int_X d\alpha \wedge *\beta \\ &= \int_X \{d(\alpha\wedge *\beta) - (-1)^{d^\circ \alpha}\alpha \wedge d*\beta\} \\ &= -\int_X (-1)^{d^\circ\alpha}\alpha\wedge d*\beta \text{ par Stokes.}\end{aligned}$$

Et d'autre part :

$$\begin{aligned}(\alpha,\partial^*\beta)_{L^2} &= (-1)^{d^\circ\beta}\int_X \alpha\wedge *(*^{-1}d*\beta) \\ &= (-1)^{d^\circ\alpha-1}\int_X \alpha\wedge d*\beta.\end{aligned}$$

□

Laplacien. On définit le *Laplacien* $\Delta_g = dd_g^* + d_g^* d$. C'est un opérateur autoadjoint. Une forme *harmonique* (pour g) est une forme annulant Δ_g. L'espace des formes harmoniques de degré k est noté $\mathcal{H}^k(X)$.

Théorème 1.4. *On a une décomposition orthogonale pour la métrique L^2 :*

$$A^k(X) = \mathcal{H}^k(X) \oplus \operatorname{Im} d \oplus \operatorname{Im} d_g^* = \mathcal{H}^k(X) \oplus \Delta(A^k(X)).$$

De plus, $\mathcal{H}^k(X)$ est de dimension finie.

Démonstration. L'orthogonalité est évidente. Pour montrer qu'on obtient bien tout $A^k(X)$, on utilise l'ellipticité du Laplacien et le théorème suivant que l'on admet.

Théorème 1.5. *Soient E et F de fibrés vectoriels réels de même rang, munis d'une métrique, au-dessus d'une variété compacte X. Si $P : \mathbb{C}^\infty(E) \to \mathbb{C}^\infty(F)$ est un opérateur différentiel elliptique, on a*
- $\operatorname{Ker} P \subset \mathbb{C}^\infty(E)$ *est de dimension finie.*
- $P(\mathbb{C}^\infty(E))$ *est fermé et de codimension finie dans* $\mathbb{C}^\infty(F)$.
- $\mathbb{C}^\infty(E) = \operatorname{Ker} P \oplus P^*(\mathbb{C}^\infty(F))$ *et la décomposition est orthogonale.*

□

Théorème 1.6 (Théorème de Hodge)**.** *La projection naturelle $\mathcal{H}^k(X,\mathbb{R}) \to H^k_{dR}(X,\mathbb{R})$ est un isomorphisme. De même sur $\mathbb{C}$.*

Démonstration. Le théorème 1.1 et la propriété d'adjonction donnent immédiatement $Z^k_{dR}(X) = \mathcal{H}^k(X) \oplus \operatorname{Im} d$. Comme $B^k_{dR}(X) = \operatorname{Im} d$, on obtient exactement $\mathcal{H}^k(X)$ dans le quotient. □

Remarque 1.7. La même preuve peut se généraliser quand on remplace le faisceau $\mathbb{C}_X$ par un système local unitaire. Soit (X, g) compacte orientée et E un fibré plat unitaire, de connexion plate D_E (voir plus loin pour ces termes ?). On peut définir $\Delta_E = D_E D_E^* + D_E^* D_E$. Alors

$$H^k_{dR}(X,E) \cong \mathcal{H}^k_{\Delta_E}(X,E).$$

1.2 Formes harmoniques et cohomologie de Dolbeault

De manière similaire la notion de forme harmonique permet d'étudier la cohomologie de Dolbeault d'un fibré holomorphe sur une variété complexe compacte.

Soit X une variété complexe compacte et soit E un fibré holomorphe sur X de rang k. On définit un opérateur $\bar\partial_E : A^{0,k}(E) \to A^{0,k+1}(E)$.

Considérons pour cela une trivialisation holomorphe $\tau_V : E_{|V} \cong V \times \mathbb{C}^k$ au-dessus d'un ouvert V de X. Une forme de $A^{0,k}(E)$ s'écrit $(\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$ dans cette trivialisation et on peut appliquer l'opérateur $\bar\partial$ sur chaque terme, pour obtenir la forme $\bar\partial_{|V}\alpha := (\bar\partial\alpha_1, \ldots, \bar\partial\alpha_k)$ dans $A^{0,k+1}(E)$ en utilisant la trivialisation $\tau_{|V}$. Pour globaliser cette définition, il suffit de montrer que la forme de $A^{0,k+1}(E)$ obtenue ne dépend pas de la trivialisation holomorphe choisie. Il s'agit d'un calcul immédiat, utilisant le fait que $\bar\partial$ annule la matrice de transition entre deux trivialisations holomorphes, puisque celle-ci a des coefficients holomorphes.

Les propriétés locales de l'opérateur $\bar\partial$ sont aussi vérifiées par $\bar\partial_E$. On a ainsi une règle de Leibniz pour $\bar\partial_E$ et $\bar\partial_E^2 = 0$. Le complexe $(A^{0,\bullet}(E), \bar\partial_E)$ est le *complexe de Dolbeault* de E. On définit $H^k_{Dol}(X,E)$ comme la cohomologie en degré k de ce complexe.

Munissons maintenant X et E de métriques hermitiennes. De même qu'en (1.1), on a des isomorphismes naturels :

$$A_X^{0,q} \otimes E \cong (A_X^{0,q} \otimes E)^* \cong \mathrm{Hom}(A_X^{0,q} \otimes E), A_X^{n,n} \cong A_X^{n,n-q} \otimes E^*.$$

On note $*_E : A_X^{0,q}(E) \to A_X^{n,n-q}(E^*)$ la composée de ces isomorphimes. C'est un isomorphisme $\mathbb{C}$-antilinéaire car le premier isomorphisme ci-dessus est antilinéaire.

On obtient ainsi une métrique L^2 sur $A_X^{0,q}(E)$ par $(\alpha,\beta)_{L^2} = \int_X \alpha \wedge *_E\, \beta$.

Remarque 1.8.

- Le wedge d'une forme de $A_X^{0,q}(E)$ et d'une forme de $A_X^{n,n-q}(E^*)$ est défini pour les formes décomposées de la forme $\alpha \otimes s$ et $\beta \otimes t^*$ (avec $\alpha \in A^{0,q}(X)$, $\beta \in A^{n,n-q}(X)$, s section de E et t^* section de E^*) par
$$\alpha \otimes s \wedge \beta \otimes t^* = t^*(s)\, \alpha \wedge \beta.$$
On prolonge ensuite par linéarité.
- Si E est un fibré trivial sur X, on retrouve les définitions précédentes avec $*_E = \bar{*}$.

On définit comme précédemment $\bar\partial_E^* = (-1)^q *_E^{-1} \bar\partial_E *_E : A_X^{0,q}(E) \to A_X^{0,q-1}(E)$ et $\Delta_{\bar\partial_E} = \bar\partial_E \bar\partial_E^* + \bar\partial_E^* \bar\partial_E$, qui est encore un opérateur elliptique, d'où le :

Théorème 1.9. *Soit E un fibré holomorphe hermitien sur X une variété hermitienne compacte. La projection naturelle $\mathcal{H}^{0,q}(E) \to H^q_{Dol}(X,E)$ est un isomorphisme.*

1.3 Théorie de Hodge des variétés kähleriennes compactes

1.3.1 Décomposition de Hodge

Soit (X,ω) une variété kählerienne compacte de dimension n. On définit les opérateurs suivants :

- $L := \omega \wedge : A^k(X) \to A^{k+2}(X)$ l'opérateur de Lefschetz ;
- $\Lambda := *^{-1} L * = (-1)^k * L * : A^k(X) \to A^{k-2}(X)$ son adjoint.

Proposition 1.10. *On a les relations de commutation suivantes :*

- $[\Lambda, \bar\partial] = -i\partial^*$;
- $[\Lambda, \partial] = i\bar\partial^*$.

Démonstration. La deuxième relation se déduit de la première par conjugaison complexe. Pour la première, on remarque que les différents opérateurs ne font intervenir les coefficients de la métrique qu'au premier ordre. On est ainsi ramené à la métrique plate sur $\mathbb{C}^n$ et un calcul laborieux, laissé en exercice, permet de conclure. □

Corollaire 1.11. $\Delta_d = 2\Delta_\partial = 2\Delta_{\bar\partial}$.

Démonstration. On utilise les relations de commutation donnés ci-dessus.

$$\begin{aligned}\Delta_d &= (\partial+\bar\partial)(\partial^*+\bar\partial^*)+(\partial^*+\bar\partial^*)(\partial+\bar\partial)\\ &= (\partial+\bar\partial)(\partial^*-i[\Lambda,\partial])+(\partial^*-i[\Lambda,\partial])(\partial+\bar\partial)\\ &= (\partial\partial^*+\bar\partial\partial^*+i\bar\partial\partial\Lambda-i\bar\partial\Lambda\partial)+(\partial^*\partial+\partial^*\bar\partial-i\Lambda\partial\bar\partial+i\partial\Lambda\bar\partial) \text{ après annulation des termes avec } \partial\Lambda\partial\end{aligned}$$

Les deuxièmes termes des parenthèses se simplifient car $\partial^*\bar\partial = i[\Lambda,\bar\partial]\bar\partial = -i\bar\partial\Lambda\bar\partial = -\bar\partial\partial^*$. D'où $\Delta_d = \Delta_\partial + i\partial[\Lambda,\bar\partial]+i[\Lambda,\bar\partial]\partial = \Delta_\partial+\Delta_\partial = 2\Delta_\partial$. ☐

Corollaire 1.12. *Le Laplacien Δ_d est bihomogène. Donc si α est harmonique dans $A^k(X)$, ses composantes $\alpha^{p,q}$ sont aussi harmoniques. On a la décomposition*

$$\mathcal{H}^k(X) = \bigoplus_{p+q=k}\mathcal{H}^{p,q}(X),$$

où $\mathcal{H}^{p,q}(X)$ est l'ensemble des formes harmoniques pour Δ_d (ou $\Delta_{\bar\partial}$) de type (p,q). De plus, $\mathcal{H}^{p,q}(X)\cong\overline{\mathcal{H}^{q,p}(X)}$.

Corollaire 1.13. *On a la décomposition $H^k_{dR}(X,\mathbb{C}) = \oplus_{p+q=k}H^{p,q}(X)$.*

Démonstration. Notons $h^{p,q}\subset H^{p,q}(X)$ l'image de $\mathcal{H}^{p,q}$ dans $H^k(X,\mathbb{C})$ et montrons l'égalité $h^{p,q} = H^{p,q}(X)$.

Soit γ d-fermée dans $A^{p,q}(X)$. On a $\gamma = \alpha+\Delta\beta$, avec α harmonique. Comme Δ est bihomogène, on obtient $\gamma = \alpha^{p,q}+\Delta\beta^{p,q}$ en regardant les composantes de type (p,q).

Comme γ et $\alpha^{p,q}$ sont d-fermées, $\Delta\beta^{p,q} = dd^*\beta^{p,q}+d^*d\beta^{p,q}$ aussi. Donc $dd^*d\beta^{p,q}=0$ ce qui implique $\partial^*\partial\beta^{p,q} = 0$ par adjonction. Ainsi $\gamma = \alpha^{p,q}+dd^*\beta^{p,q}$ et γ et $\alpha^{p,q}$ sont d-cohomologues, avec $\alpha^{p,q}$ harmonique. ☐

Corollaire 1.14. *Les nombres de Betti b_{2k+1} sont pairs. En particulier, les surfaces de Hopf ne sont pas kähleriennes.*

Corollaire 1.15. *Soit Γ un groupe de présentation finie. Supposons $\Gamma = \pi_1(X)$ pour X une variété kählerienne compacte. Alors tout sous-groupe Γ' d'indice fini dans Γ a premier nombre de Betti pair.*

Exemple 1.16. Le groupe libre à n générateurs n'est pas le groupe fondamental d'une variété kählerienne compacte pour $n\geq 2$. Le produit libre $\mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_2$ non plus car il contient $\mathbb{Z}$ avec indice 2.

1.3.2 Décomposition de Lefschetz

On introduit l'opérateur $P : A^k(X)\to A^k(X)$ qui à α associe $(k-n)\alpha$.

Lemme 1.17. *On a les relations de commutation suivantes :*
- $[L,\Lambda] = P$;
- $[P,L] = 2L$;
- $[P,\Lambda] = -2\Lambda$.

Démonstration. Les différents opérateurs ne font intervenir la métrique qu'à l'ordre 0. Il suffit donc de montrer le résultat pour la métrique plate sur $\mathbb{C}^n$ et le résultat est laissé en exercice. ☐

On obtient ainsi un $\mathfrak{sl}_2$-triplet

$$\begin{aligned}\rho : \mathfrak{sl}_2 &\to \mathrm{End}(A^*(X,\mathbb{C})\\ E_+ = \begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix} &\mapsto L\\ E_- = \begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix} &\mapsto \Lambda\\ H = \begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix} &\mapsto P\end{aligned}$$

Comme $[p,\Delta]=0$, le morphisme d'algèbres de Lie ρ passe au quotient en $\rho : \mathfrak{sl}_2\to\mathrm{End}(H^*(X,\mathbb{C}))$. Par la théorie standard des représentations de $\mathfrak{sl}_2$, on en déduit deux théorèmes importants.

Théorème 1.18 (Théorème de Lefschetz difficile)**.** *On a un isomorphisme* $L^k : H^{n-k}(X) \overset{\approx}{\to} H^{n+k}(X)$.

Théorème 1.19 (Théorème de décomposition de Lefschetz)**.** *On a la décomposition*

$$H^l(X) = \bigoplus_{0 \le k \le \frac{l}{2}} L^k P^{l-2k}(X),$$

où $P^i(X) = \{\alpha \in H^i(X) | \Lambda\alpha = 0\} = \{\alpha \in H^i(X) | L^{n-i+1}\alpha = 0\}$ *désigne la* cohomologie primitive*. De plus, cette décomposition est compatible avec la décomposition de Hodge.*

1.3.3 Théorème de l'indice de Hodge

Pour $k \le n$, on définit la forme d'intersection $Q : H^k(X, \mathbb{R}) \times H^k(X, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ qui à (α, β) associe $\int_X \omega^{n-k} \wedge \alpha \wedge \beta$. Cette forme est symétrique quand k est pair, alternée sinon.

On complexifie cette définition en posant $h_k(\alpha, \beta) = i^k Q(\alpha, \bar{\beta})$, qui est une forme hermitienne sur $H^k(X, \mathbb{C})$. La décomposition de Lefschetz est orthogonale pour h_k et l'on a ${h_k}_{|P^{k-2l}(X)} = (-1)^l h_{k-2l}$. L'important théorème suivant est laissé en exercice (cf. [2, section 6.3]) :

Théorème 1.20.
- *Les* $H^{p,q} \subset H^k$ *sont en somme orthogonale pour* h_k *;*
- $(-1)^{k(k-1)/2}(-1)^q h_k > 0$ *sur* $H^{p,q}_{prim} := P^k(X) \cap H^{p,q}(X)$.

Références

[1] Demailly J.P., Théorie de Hodge L^2 et théorèmes d'annulation, in *Introduction à la théorie de Hodge*, Panoramas et synthèses 3, 3-111

[2] Voisin C., Théorie de Hodge et géométrie algébrique complexe, SMF