# Table des matières



# 1 Cours 3 - 27/09

## 1.1 $\mathbb{R}$-structures de Hodge pures

**Définition 1.1.**

- Une $\mathbb{R}$-*structure de Hodge semi-simple* est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie $V$ muni d'une bigraduation de son complexifié : $V_{\mathbb{C}} = \oplus_{p,q\in\mathbb{Z}} V^{p,q}$ telle que $\overline{V^{p,q}} = V^{q,p}$.
- C'est une *structure de Hodge pure de poids* $n$ si $V^{p,q} = 0$ dès que $p + q \neq n$.
- On note $\mathcal{HS}_{\mathbb{R}}{}^n \subset \mathcal{MHS}_{\mathbb{R}}^{\mathrm{ss}}$ les catégories des $\mathbb{R}$-structures de Hodge pure de poids $n$ et des $\mathbb{R}$-structures de Hodge semi-simples. Les morphismes entre $V$ et $V'$ dans ces deux catégories sont les applications $\mathbb{R}$-linéaires $f$ de $V$ dans $V'$, dont le complexifié $f_{\mathbb{C}}$ envoie $V^{p,q}$ sur $V'^{p,q}$ pour tous $p$ et $q$ dans $\mathbb{Z}$.

*Exercices* 1.2.

- Les catégories $\mathcal{MHS}_{\mathbb{R}}^{\mathrm{ss}}$ et $\mathcal{HS}_{\mathbb{R}}{}^n$ sont abéliennes : le noyau et le conoyau d'un morphisme de $\mathbb{R}$-structure de Hodge sont naturellement munis d'une $\mathbb{R}$-structures de Hodge (cela vient de ce que les morphismes dans $\mathcal{MHS}_{\mathbb{R}}^{\mathrm{ss}}$ sont stricts : $\mathrm{Im}\, f \cap (V')^{p,q} = f(V^{p,q})$).
- Ce sont des catégories semi-simples : tout objet est somme directe d'objets simples.
- $\mathcal{MHS}_{\mathbb{R}}^{\mathrm{ss}} = \oplus_{n\in\mathbb{Z}} \mathcal{HS}_{\mathbb{R}}{}^n$.
- Ce sont des catégories tensorielles avec duaux et hom internes : le produit tensoriel de deux $\mathbb{R}$-structures de Hodge $V$ et $V'$ (resp. $\mathrm{Hom}(V, V')$) est naturellement muni d'une $\mathbb{R}$-structure de Hodge par $(V \otimes V')^{p,q}_{\mathbb{C}} = \oplus_{\substack{i+j=p\\k+l=q}} V^{i,k} \otimes (V')^{j,l}$ (resp. $\mathrm{Hom}(V, V')^{p,q}_{\mathbb{C}} = \{\phi : V_{\mathbb{C}} \to V'_{\mathbb{C}} \,|\, \phi(V^{r,s} \subset (V')^{r+p,s+q}\}$). La structure sur le dual $V^*$ est celle de $\mathrm{Hom}(V, \mathbb{R}(0))$ où $\mathbb{R}(0)$ est défini ci-dessous.

*Exemple* 1.3.

- Soit $m \in \mathbb{Z}$. On définit

$$\mathbb{R}(m) = \{V = (2\pi i)^m \mathbb{R} \subset \mathbb{C} \,|\, V_{\mathbb{C}} = V^{-m,-m} \text{ structure de Hodge pure de poids } -2m\}.$$

  On vérifie que pour $m \geq 0$, $\mathbb{R}(m) = \mathbb{R}(1)^{\otimes m}$ et que $\mathbb{R}(-m) = \mathbb{R}(m)^*$. De plus, $\mathrm{End}_{\mathcal{MHS}_{\mathbb{R}}^{\mathrm{ss}}}(\mathbb{R}(m)) \cong \mathbb{R}(0)$ par

$$\begin{aligned} \mathbb{R} &\to \mathrm{End}_{\mathcal{MHS}_{\mathbb{R}}^{\mathrm{ss}}}(\mathbb{R}^m) \\ z &\mapsto (a \mapsto az). \end{aligned}$$

- Décrivons les objets de $\mathcal{HS}_{\mathbb{R}}{}^n$ de dimension 2 pour $n$ impair. On a $V = \mathbb{R}e_1 \oplus \mathbb{R}e_2$ et $V_{\mathbb{C}} = \mathbb{C}e_1 \oplus \mathbb{C}e_2 = \oplus_{p+q=n} V^{p,q}$, avec $\overline{V^{p,q}} = V^{q,p}$. Comme $n$ est impair, il existe $p$ et $q$ dans $\mathbb{Z}$, de somme $n$, tels que $V_{\mathbb{C}} = V^{p,q} \oplus \overline{V^{p,q}}$ avec $V^{p,q}$ de dimension complexe 1.
  Ecrivons $V^{p,q} = \mathbb{C}.(ae_1 + be_2)$ ; $V^{q,p} = \mathbb{C}.(\bar{a}e_1 + \bar{b}e_2)$. Pour que $V^{p,q}$ et $V^{q,p}$ aient une intersection triviale, il faut que $b$ soit différent de 0 et que $\tau := \frac{a}{b}$ ne soit pas réel. On peut donc associer à toute $\mathbb{R}$-structure de Hodge pure de poids $n$, de dimension 2, $V$ (avec $n$ impair), un nombre complexe non réel $\tau$.
  Calculons maintenant $X := \mathrm{End}_{\mathcal{MHS}_{\mathbb{R}}^{\mathrm{ss}}} V \in \mathcal{HS}_{\mathbb{R}}{}^0$. On a une décomposition de $X_{\mathbb{C}}$ en trois termes :

$$X_{\mathbb{C}} = X^{p-q,q-p} \oplus X^{0,0} \oplus X^{q-p,p-q}.$$

Notons $M = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ une matrice de $X^{p-q,q-p}$. Elle envoie donc $V^{q,p}$ sur $V^{p,q}$ et $V^{p,q}$ sur $V^{2p-q,2q-p} = 0$ car $p \neq q$. On a les équations

$$\begin{aligned} \alpha\tau + \beta &= 0 \\ \gamma\tau + \delta &= 0 \\ \alpha\bar{\tau} + \beta &= C\tau \\ \gamma\bar{\tau} + \delta &= C, \end{aligned}$$

avec $C$ un complexe quelconque. On trouve $M = C' \begin{pmatrix} \tau & -\tau^2 \\ 1 & -\tau \end{pmatrix}$ donc $X^{p-q,q-p} = \left\langle \begin{pmatrix} \tau & -\tau^2 \\ 1 & -\tau \end{pmatrix} \right\rangle$.

On a de même $X^{q-p,p-q} = \overline{X^{p-q,q-p}}$ et $X^{0,0} = (\mathrm{Stab}_{\mathfrak{gl}_2(\mathbb{C})} V^{p,q} \cap \mathrm{Stab}_{\mathfrak{gl}_2(\mathbb{C})} V^{q,p})$.

- Considérons en particulier le cas $n = -1$ et $(p, q) = (0, -1)$. Quand a-t-on $V_\tau \cong V_\eta$ en tant que $\mathbb{R}$-structures de Hodge pures de poids $-1$ ? Comme un isomorphisme de structures de Hodge est en particulier un isomorphisme d'espaces vectoriels, on cherche, d'après ce qui précède, $g$ inversible dans $\mathrm{Hom}_{\mathcal{MHS}^{\mathrm{ss}}_{\mathbb{R}}}(V_\tau, V_\eta)^{0,0}$, c'est-à-dire respectant la bigraduation. Notant $g = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ dans $GL(2, \mathbb{R})$, on veut $g_{\mathbb{C}}(\tau e_1 + e_2) \in \langle \eta e_1 + e_2 \rangle$, ou encore $\alpha\tau + \beta = \eta(\gamma\tau + \delta)$.
  Donc $V_\eta$ et $V_\tau$ sont isomorphes si et seulement si $\tau$ et $\eta$ appartiennent à la même orbite sous l'action par homographies de $GL(2, \mathbb{R})$ sur $\mathbb{C} - \mathbb{R}$ ; comme l'action est transitive, il n'y a en fait aucune condition.

On donne maintenant deux définitions équivalentes des $\mathbb{R}$-structures de Hodge pure de poids $n$.

**Définition 1.4.** Une $\mathbb{R}$-structure de Hodge pure de poids $n$ est la donnée d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel $V$ de dimension finie et d'une filtration décroissante $F^\bullet(V_{\mathbb{C}})$ de son complexifié telle que $F^p(V_{\mathbb{C}}) \oplus \overline{F^{n+1-p} V_{\mathbb{C}}} = V_{\mathbb{C}}$ pour tout $p$.

On passe de la première à la deuxième définition en posant $F^p V_{\mathbb{C}} = \oplus_{r \geq p} V^{r,n-r}$ et $V^{p,q}$ s'obtient réciproquement par $V^{p,q} = \frac{F^p(V_{\mathbb{C}})}{F^{p+1}(V_{\mathbb{C}})}$.

**Définition 1.5.** ? ? ?

**Corollaire 1.6.** *? ? ?*

**Polarisation** Soit $V \in \mathcal{MHS}^{\mathrm{ss}}_{\mathbb{R}}$. D'après ce qui précède, à $V$ correspond une représentation réelle $h$ de $\mathbb{S} = \mathbb{C}^*$. On note $C = h(i) \in \mathrm{Aut}_{\mathbb{R}}(V)$.

*Exercice* 1.7. Montrer que $C_{\mathbb{C}} \in \mathrm{Aut}_{\mathbb{C}}(V_{\mathbb{C}})$ agit par multiplication par $i^{p-q}$ sur $V^{p,q}$.

**Définition 1.8.** Soit $V \in \mathcal{HS}_{\mathbb{R}}{}^n$. Une *polarisation* de $V$ est un morphisme $(.,.) : V \otimes V \to \mathbb{R}(-n)$ dans la catégorie $\mathcal{HS}_{\mathbb{R}}{}^{2n}$ tel que la forme bilinéaire réelle $x \otimes y \mapsto (2\pi i)^n (x, Cy)$ sur $V$ soit symétrique et définie positive.

*Exercice* 1.9. Montrer que $(.,.)$ est symétrique pour $n$ pair et antisymétrique pour $n$ impair.

## 1.2 $\mathbb{Z}$-structures de Hodge pures

**Définition 1.10.**

- Une *$\mathbb{Z}$-structure de Hodge semi-simple* est un groupe abélien de type fini $H$, muni d'une $\mathbb{R}$-structure de Hodge semi-simple sur $H_{\mathbb{R}} = H \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$.
- On dit que $H$ est *pure de poids $n$* si $H_{\mathbb{R}}$ l'est.
- $H$ est *polarisée* si l'accouplement $(.,.)$ est défini sur $\mathbb{Z}$, c'est-à-dire si on a un morphisme de $\mathbb{Z}$-structures de Hodge de $H \otimes H$ dans $\mathbb{Z}(-n)$ (avec des définitions calquées sur celles dans $\mathbb{R}$).

**Proposition 1.11.**

- *Soit $X$ une variété kählerienne compacte. Alors $H^n(X, \mathbb{Z})$ est une $\mathbb{Z}$-structure de Hodge pure de poids $n$. De plus, $H^n(X, \mathbb{R})_{prim}$ est une $\mathbb{R}$-structure de Hodge pure de poids $n$ et est polarisée.*
- *Si $X$ est de plus projective lisse, alors $H^n(X, \mathbb{R})_{prim} = H^n(X, \mathbb{Z})_{prim} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$ est défini sur $\mathbb{Z}$ car la forme de Kähler peut être prise dans $H^{1,1}(X, \mathbb{Z})$ (théorème du plongement de Kodaira). Dans cette situation, $H^n(X, \mathbb{Z})_{prim}$ est une $\mathbb{Z}$-structure de Hodge de poids $n$ et est polarisée.*

**Propriétés de fonctorialité** Soit $\phi : X \to Y$ une application holomorphe entre deux variétés kähleriennes compactes.

**Lemme 1.12.** *$\phi^* : H^k(Y,\mathbb{Z}) \to H^k(X,\mathbb{Z})$ est un morphisme de ${\mathcal{HS}_{\mathbb{R}}}^k$.*

*Démonstration.* Il suffit de montrer que $\phi^*(H^{p,q}(Y)) \subset H^{p,q}(X)$. Mais $\phi^*$ est obtenue au niveau des formes en prenant le pullback $\phi^*(\alpha)$ d'une forme $\alpha$ de type $(p,q)$ $d$-fermé. Comme $\phi$ est holomorphe, $\phi^*(\alpha)$ est encore de type $(p,q)$. □

**Définition 1.13.** On note $r = \dim_{\mathbb{C}} Y - \dim_{\mathbb{C}} X$ et on définit $\phi_* : H^k(X,\mathbb{Z}) \to H^{k+2r}(Y,\mathbb{Z})$ (*morphisme de Gysin*) comme le composé

$$H^k(X,\mathbb{Z}) \overset{PD}{\simeq} H_{2\dim_{\mathbb{C}} X-k}(X,\mathbb{Z}) \overset{\phi_*}{\to} H_{2\dim_{\mathbb{C}} X-k}(Y,\mathbb{Z}) \overset{PD}{\simeq} H^{k+2r}(Y,\mathbb{Z}) \ ,$$

où $PD$ désigne la dualité de Poincaré.

**Lemme 1.14.** *Le morphisme de Gysin $\phi_* : H^k(X,\mathbb{Z}) \to H^{k+2r}(Y,\mathbb{Z})(r) := H^{k+2r}(Y,\mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}(r)$ est un morphisme de structures de Hodge pures de poids $k$. Ici, on tensorise par $\mathbb{Z}(r)$ pour décaler la structure de poids $k+2r$ de $H^{k+2r}(Y,\mathbb{Z})$ en une structure de poids $k$.*

*Démonstration.* Notons $(.,.)$ l'accouplement de Poincaré, $m$ la dimension complexe de $X$ et $m+r$ la dimension complexe de $Y$. Par définition du morphisme de Gysin $\phi_*$, on a $(\phi_*\alpha,\beta)_Y = (\alpha,\phi^*\beta)_X$. Considérons $\alpha$ dans $H^{p,q}(X)$ et montrons que $\phi_*(\alpha)$ est dans $H^{p+r,q+r}(Y)$. Soit $\beta$ dans $H^{p',q'}(Y)$ avec $(p',q') \neq (m-p-r, m-q-r)$. Alors $\phi^*(\beta)$ est dans $H^{p',q'}(X)$ et on a $(\alpha,\phi^*\beta)_X = 0$, en prenant des représentants de type $(p,q)$ et $(p',q')$ de $\alpha$ et $\phi^*(\beta)$ dans $X$. Donc, $\phi_*\alpha$ est dans l'orthogonal (pour la dualité de Poincaré) de

$$H^{p',q'}(Y) \qquad \bigoplus_{\substack{p'+q'=2m-p-q \\ (p',q')\neq(m-p-r,m-q-r)}} \qquad .$$

Il suffit de montrer que cet orthogonal, noté $H^\perp$ est égal à $H^{p+r,q+r}(Y)$.

L'inclusion $H^{p+r,q+r}(Y) \subset H^\perp$ est évidente pour les raisons évoquées plus haut. Comme l'accouplement de Poincaré est parfait, la dimension de $H^\perp$ est $h^{m-p-r,m-q-r}(Y) = \dim H^{m-p-r,m-q-r}(Y)$. Mais, $h^{m-p-r,m-q-r}(Y) = h^{m-q-r,m-p-r}(Y) = h^{p+r,q+r}(Y)$, la première égalité venant de la symétrie de Hodge $H^{a,b} = \overline{H^{b,a}}$ et la deuxième du théorème de Lefschetz difficile, le morphisme de Lefschetz étant un opérateur de type $(1,1)$. Donc $H^{p+r,q+r}(Y)$ et $H^\perp$ ont même dimension et l'inclusion déjà prouvée entraîne l'égalité. □

**$\mathbb{Z}$-structures de Hodge de poids** $1$

**Définition 1.15.** On dit qu'une structure de Hodge est *effective* si elle ne fait pas intervenir d'indices strictement négatifs.

**Lemme 1.16.** *La donnée d'une $\mathbb{Z}$-structure de Hodge pure de poids* $1$ *effective et sans torsion est équivalente à la donnée d'un tore complexe sur $\mathbb{C}$.*

*Démonstration.* ? ? ? □

## 1.3 L'application d'Albanese

Soit $X$ variété kählerienne compacte. On a une application $k$ :

$$H_1(X,\mathbb{Z}) \to H^0(X,\Omega^1_X)^*$$
$$\gamma \mapsto (\alpha \in H^0(X,\Omega^1_X) \mapsto \int_\gamma \alpha).$$

On note $\mathrm{Alb}(X) = \frac{H^0(X,\Omega^1_X)^*}{k(H_1(X,\mathbb{Z})} \cong \frac{H^0(X,\Omega^1_X)^*}{(H_1(X,\mathbb{Z}))/\mathrm{torsion}}$ le *tore d'Albanese* de $X$.

Fixons $x_0$ un point de $X$. Alors on a *l'application d'Albanese* holomorphe de $X$ :

$$\begin{aligned}\mathrm{alb}_{x_0} : X &\to \mathrm{Alb}(X)\\ x &\mapsto (\alpha \mapsto \int_{x_0}^{x} \alpha).\end{aligned}$$

Cette application est bien définie car l'intégrale modulo $H_1(X,\mathbb{Z})$ ne dépend pas du choix du chemin entre $x_0$ et $x$.

**Lemme 1.17.** *Par l'identification naturelle de* $H^0(\mathrm{Alb}(X),\Omega^1_{\mathrm{Alb}(X)})$ *avec* $H^0(X,\Omega^1_X)$*, l'application*

$$\mathrm{alb}_{x_0}^* : H^0(\mathrm{Alb}(X),\Omega^1_{\mathrm{Alb}(X)}) \to H^0(X,\Omega^1_X)$$

*est l'identité.*

*Démonstration.* Par le théorème fondamental du calcul, on a

$$d_x \,\mathrm{alb}_{x_0}(v) = (\alpha \mapsto \alpha_x(v)),$$

avec $x \in X$ et $v \in T_xX$.

Avec ces notations et $\alpha \in H^0(\mathrm{Alb}(X),\Omega^1_{\mathrm{Alb}(X)}) = (H^0(X,\Omega^1_X)^*)^*$, on a $(\mathrm{alb}_{x_0}^* .\alpha)_x.v = \alpha(d_x \,\mathrm{alb}_{x_0}(v)) = \alpha(\beta \mapsto \beta_x(v)) = \alpha_x(v)$, en identifiant $H^0(X,\Omega^1_X)$ à son bidual. □

**Lemme 1.18.** $\mathrm{alb}_{x_0}(X)$ *engendre le groupe* $\mathrm{Alb}(X)$*.*

*Démonstration.* Il suffit de montrer la surjectivité, pour $k$ grand, de l'application

$$\begin{aligned}X^k &\overset{\mathrm{alb}_{x_0}^k}{\to} \mathrm{Alb}(X)\\ (x_1,\dots,x_k) &\mapsto \sum_{i=1}^{k} \mathrm{alb}_{x_0}(x_i).\end{aligned}$$

Comme $X$ est compacte, cette application est propre et donc, d'après le théorème de l'application propre, son image est une sous-variété analytique de $\mathrm{Alb}(X)$. En particulier, si elle contient un ouvert, elle est surjective et il suffit donc de montrer que c'est une submersion en au moins un point $x$.

De façon duale, il s'agit de montrer que $H^0(\mathrm{Alb}(X),\Omega^1_{\mathrm{Alb}(X)}) \overset{(\mathrm{alb}_{x_0}^k)^*}{\to} H^0(X^k,\Omega^1_{X^k}) \to \Omega^1_{X^k,x}$ est injective, avec la dernière flèche égale à l'évaluation en $x$. Par le lemme précédent, cette application s'identifie à $H^0(X,\Omega^1_X) \overset{ev_{x_1}\oplus\cdots\oplus ev_{x_k}}{\to} \Omega^1_{X,x_1} \oplus \cdots \oplus \Omega^1_{X,x_k}$. Cette application est bien injective pour $k$ grand car $H^0(X,\Omega^1_X)$ est de dimension finie et qu'une forme ne peut être nulle qu'en un nombre fini de points sur une variété compacte. □

**Théorème 1.19.** $\mathrm{alb}_{x_0} : X \to \mathrm{Alb}(X)$ *coreprésente le foncteur*

$$\begin{aligned}\{\textit{tores complexes}\} &\to \mathcal{S}et\\ T &\mapsto \textit{Hol}((X,x_0),(T,0)).\end{aligned}$$

*De manière équivalente, toute application holomorphe de* $X$ *vers un tore complexe* $T$ *envoyant* $x_0$ *sur l'identité de* $T$ *se factorise de façon unique en la composée de l'application d'Albanese en* $x_0$ *suivie d'un morphisme de tores* $\mathrm{Alb}(X) \to T$*.*

*Démonstration.* L'unicité résulte du lemme : si $\phi_1$ et $\phi_2$ sont deux applications holomorphes de $\mathrm{Alb}(X)$ dans $T$ coïncidant sur l'image de $\mathrm{alb}_{x_0}$ dans $\mathrm{Alb}(X)$, alors $\phi_1 - \phi_2$ est nulle sur une partie génératrice du groupe $\mathrm{Alb}(X)$, donc $\phi_1 = \phi_2$.

Pour l'existence, notons $f$ une application holomorphe de $X$ dans $T$, envoyant $x_0$ sur 0. On a un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} H_1(X,\mathbb{Z}) \arrow[r] \arrow[d, "f_*"] & H^0(X,\Omega_X)^* \arrow[d, "{}^t(f^*)"] \\ H_1(T,\mathbb{Z}) \arrow[r] & H^0(T,\Omega_T)^*. \end{tikzcd}$$

Ainsi ${}^t(f^*)$, définie de $H^0(X, \Omega_X)^*$ dans $H^0(T, \Omega_T)^*$, induit une application holomorphe $\phi$ de $\mathrm{Alb}(X)$ dans $\mathrm{Alb}(T)$. Par fonctorialité dans la définition du tore et de l'application d'Albanese, on a un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\mathrm{alb}_{x_0,X}"] \arrow[d, "f"] & \mathrm{Alb}(X) \arrow[d, "g"] \\ T \arrow[r, "\mathrm{alb}_{0,T}"] & \mathrm{Alb}(T) \end{tikzcd}$$

en choisissant 0 comme point-base pour $T$ (on rappelle que $f(x_0) = 0$). Un calcul immédiat prouve que $\mathrm{Alb}(T)$ s'identifie à $T$ et que, dans ce cas, l'application d'Albanese de $T$ est simplement l'identité. Donc $\phi$ convient. $\square$

*Remarque* 1.20.
- Si $X$ est projective, alors $\mathrm{Alb}(X)$ aussi : c'est une variété abélienne.
- La variété d'Albanese est, dans ce cas, aussi solution du problème universel

$$\begin{aligned} \{\text{variétés abéliennes}\} &\to \mathcal{S}et \\ A &\mapsto \mathrm{Hol}((X, x_0), (A, 0)). \end{aligned}$$

- On montrera que les variétés abéliennes complexes s'identifient aux $\mathbb{Z}$-structures de Hodge de poids 1, effectives, sans torsion et polarisables.