

Table des matières

1 Cours 4 - 29/09	1
1.1 Préfaisceaux	1
1.2 Faisceaux	1
1.3 Faisceaux abéliens	2
1.4 Image inverse et image directe	3
1.5 Foncteurs dérivés	4

1 Cours 4 - 29/09**1.1 Préfaisceaux**

Définition 1.1. Soient $\mathcal{S}$ et $\mathcal{C}$ deux catégories.

- Un $\mathcal{C}$ -préfaisceau sur $\mathcal{S}$ est un foncteur $F : \mathcal{S}^{op} \rightarrow \mathcal{C}$.
- Un morphisme $F \rightarrow G$ de $\mathcal{C}$ -préfaisceaux est un morphisme de foncteurs.
- On note $\mathcal{Psh}(\mathcal{S}, \mathcal{C})$ la catégorie des $\mathcal{C}$ -préfaisceaux sur $\mathcal{S}$.

Définition 1.2. Soient $X \in \mathcal{Top}$, $\mathcal{C}$ une catégorie. Un $\mathcal{C}$ -préfaisceau sur X est un $\mathcal{C}$ -préfaisceau sur la catégorie $\mathcal{Op}_X$ des ouverts de X . On note $\mathcal{Psh}(X, \mathcal{C})$ la catégorie des $\mathcal{C}$ -préfaisceaux sur X .

De manière équivalente, un objet $F \in \mathcal{Psh}(X, \mathcal{C})$ est la donnée, pour tout ouvert U de X , d'un objet $F(U)$ de la catégorie $\mathcal{C}$ et, pour tous ouverts $V \subset U$, de *morphismes de restriction* ρ_{UV} de $F(U)$ dans $F(V)$, ces morphismes étant soumis à la condition $\rho_{UW} = \rho_{UV} \circ \rho_{VW}$ pour trois ouverts $W \subset V \subset U$ (et ρ_{UU} égal au morphisme identité de $F(U)$).

Définition 1.3. Supposons que la catégorie $\mathcal{C}$ admette des colimites. Alors, on définit pour tout x de X :

$$F_x := \varinjlim_{\substack{x \in U \\ U \in \mathcal{Op}_X}} F(U),$$

où les morphismes de transition sont les ρ_{UV} .

L'objet F_x de $\mathcal{C}$ s'appelle la *fibres* de F en x . Si $s \in F(U)$, l'image s_x de s dans F_x s'appelle le *germe* de la section s en x .

1.2 Faisceaux

Définition 1.4. Un préfaisceau $F \in \mathcal{Psh}(X, \mathcal{C})$ est un *faisceau* si, pour tout ouvert U de X et tout recouvrement ouvert $U = \cup_{i \in I} U_i$, $U_i \in \mathcal{Op}_X$:

- Si $s, s' \in F(U)$ sont tels que $s'_{|U_i} = s_{|U_i}$ pour tout i , alors $s = s'$.
- Si (s_i) est une section dans $F(U_i)$ tels que $s_{i|U_{ij}} = s_{j|U_{ij}}$ alors il existe $s \in F(U)$ tel que, pour tout i , $s_{|U_i} = s_i$,

où l'on note U_{ij} pour $U_i \cap U_j$.

Un *morphisme* $F \rightarrow G$ entre deux faisceaux est un morphisme de préfaisceaux. On note $\mathcal{Sh}(X, \mathcal{C})$ la sous-catégorie pleine de $\mathcal{Psh}(X, \mathcal{C})$ des $\mathcal{C}$ -faisceaux sur X .

Exemples 1.5.

- Soit X une variété différentiable. Le préfaisceau $U \mapsto C^i(U) = \{f : U \rightarrow \mathbb{C} \text{ de classe } C^i\}$ est un faisceau C_X^i .
- Si X est une variété complexe, on définit de façon similaire le faisceau $\mathcal{O}_X$ des fonctions holomorphes sur X .

Contre-exemples 1.6.

- Soit $A \in \mathcal{Ab}$, $X \in \mathcal{Top}$. Si X contient deux ouverts disjoints, le préfaisceau constant $U \mapsto A$ n'est pas un faisceau.
- Si $X = \mathbb{R}$, le préfaisceau F défini par $F(U) = \{f \text{ bornée sur } U\}$ n'est pas un faisceau :

1.3 Faisceaux abéliens

On note $\mathcal{Psh}(X) = \mathcal{Psh}(X, \mathcal{A}b)$ (tout ce qui suit est valable pour des faisceaux à valeur dans n'importe quelle catégorie abélienne).

Lemme 1.7. *La catégorie $\mathcal{Psh}(X)$ est abélienne.*

Lemme 1.8. *Soit $f : F \rightarrow G \in \mathcal{Sh}(X)$. Alors le préfaisceau $\text{Ker } f : U \mapsto \text{Ker}(F(U) \xrightarrow{f_U} G(U))$ est un faisceau.*

Démonstration. Soit U un ouvert de X , réunion d'ouverts U_i . La première propriété des faisceaux est claire car $\text{Ker } f$ est un sous-préfaisceau de F . Pour la seconde, si les $s_i \in (\text{Ker } f)(U_i)$ sont tels que $s_i|_{U_{ij}} = s_j|_{U_{ij}}$, alors il existe $s \in F(U)$ se restreignant à s_i sur U_i car F est un faisceau. On a $f(s) \in G(U)$ et $f(s)|_{U_i} = f(s_i) = 0$. Comme G est un faisceau, $f(s) = 0$ et donc $s \in (\text{Ker } f)(U)$. $\square$

Proposition 1.9. *Soit $f : F \rightarrow G \in \mathcal{Sh}(X)$. Alors*

- *f est un monomorphisme dans $\mathcal{Sh}(X)$ si et seulement si c'est un monomorphisme dans $\mathcal{Psh}(X)$, si et seulement si, pour tout $x \in X$, $f_x : F_x \rightarrow G_x$ est injectif.*
- *f est un isomorphisme dans $\mathcal{Sh}(X)$ si et seulement si c'est un isomorphisme dans $\mathcal{Psh}(X)$, si et seulement si, pour tout $x \in X$, $f_x : F_x \rightarrow G_x$ est bijectif.*

Démonstration.

- La première équivalence découle du lemme précédent. En particulier, il est nécessaire d'avoir des injections $F_x \hookrightarrow G_x$ pour que $F \rightarrow G$ soit un monomorphisme. Réciproquement, supposons que $F_x \hookrightarrow G_x$ pour tout x . Soit $s \in F(U)$ tel que $f(s) = 0 \in G(U)$. Alors $f(s)_{f(x)} = f_x(s_x) = 0$. Par hypothèse, f_x est injective et donc $s_x = 0$ pour tout x . Donc, il existe un recouvrement ouvert de U par des ouverts U_i tel que $s|_{U_i} = 0$. Comme F est un faisceau, on a alors $s = 0$ et donc $f_U : F(U) \rightarrow G(U)$ est un monomorphisme.
- La première équivalence vient de ce que $\mathcal{Sh}(X)$ est une sous-catégorie pleine de $\mathcal{Psh}(X)$. En particulier, il est nécessaire que les f_x soient bijectifs pour que f soit un isomorphisme. Réciproquement, supposons les f_x bijectifs, et montrons la surjectivité de f_U pour tout ouvert U . Soit $t \in G(U)$; il existe un recouvrement ouvert de U par des U_i et des $s_i \in F(U_i)$ tels que $f_{U_i}(s_i) = t|_{U_i}$. Les restrictions de $f(s_i)$ et $f(s_j)$ coïncident sur U_{ij} donc c'est aussi vrai pour s_i et s_j par le premier point. Donc, il existe $s \in F(U)$ qui vaut s_i sur U_i . On a $f(s) = t$ car l'égalité est vraie sur les U_i et que G est un faisceau. $\square$

Remarque 1.10. A contrario, les conoyaux et les images ne coïncident pas dans $\mathcal{Psh}(X)$ et $\mathcal{Sh}(X)$: si $f : F \rightarrow G \in \mathcal{Sh}(X)$, son conoyau et son image dans la catégorie $\mathcal{Psh}(X)$ ne sont en général pas des faisceaux.

Exemple 1.11. $X = \mathbb{C}$; $F = G = \mathcal{O}_X$; $f = \frac{\partial}{\partial \bar{z}} : \mathcal{O}_X \rightarrow \mathcal{O}_X$.

Sur tout disque ouvert U de $\mathbb{C}$, $\text{Coker } f_U = 0$; pourtant $\text{Coker } f_{\mathbb{C}^*} \neq 0$ car $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{z}$ n'a pas de solution sur $\mathbb{C}^*$.

Proposition 1.12. *Le morphisme d'oubli $i : \mathcal{Sh}(X) \rightarrow \mathcal{Psh}(X)$ admet un adjoint à gauche : le foncteur de faisceautisation noté $+$.*

Démonstration. Pour tout ouvert U de X , on définit $F^+(U)$ par

$$F^+(U) := \{s : U \rightarrow \coprod_{x \in U} F_x \mid \forall x \in U, s(x) \in F_x \text{ et } \exists V_x \ni x, t \in F(V) \text{ tels que } s_y = t_y, \forall y \in V\}.$$

Par construction, F^+ est un faisceau et on a un morphisme de préfaisceaux $F \rightarrow F^+$, induisant des isomorphismes $F_x \xrightarrow{\cong} F_x^+$. $\square$

Exercice 1.13. Montrer que F^+ a la propriété universelle de l'adjoint à gauche : si G est un faisceau, $\text{Hom}_{\mathcal{Psh}(X)}(F, i(G)) = \text{Hom}_{\mathcal{Sh}(X)}(F^+, G)$.

Définition 1.14. Soit $f : F \rightarrow G \in \mathcal{Sh}(X)$.

- $\text{Coker } f := U \mapsto \text{Coker}(f_U : F(U) \rightarrow G(U))^+$.
- $\text{Im } f := \text{Ker}(G \rightarrow \text{Coker } f)$.
- $\text{Coim } f := \text{Coker}(\text{Ker } f \rightarrow F)$.
- On a donc $(\text{Ker } f)_x = \text{Ker } f_x$ et $(\text{Coker } f)_x = \text{Coker } f_x$.

On en déduit immédiatement la

Proposition 1.15. *La catégorie $\mathcal{Sh}(X)$ est abélienne et l'évaluation en $x : \mathcal{Sh}(X) \rightarrow \mathcal{Ab}, F \mapsto F_x$ est un foncteur exact.*

1.4 Image inverse et image directe

Définition 1.16. Soit $f : Y \rightarrow X \in \mathcal{Top}$ et soit $G \in \mathcal{Sh}(Y)$. Le préfaisceau $U \mapsto G(f^{-1}(U)) \in \mathcal{Psh}(X)$ est un faisceau dans $\mathcal{Sh}(X)$. On le note f_*G et il est appelé *image directe* de G .

Exemples 1.17.

- $p_X : X \rightarrow *$ (un point). Si $F \in \mathcal{Sh}(X)$, $p_{X*}F = F(X) \in \mathcal{Ab} \cong \mathcal{Sh}(*)$.
- $A \in \mathcal{Ab}; X = Y = \mathbb{C}^*$; $f : Y \rightarrow X, z \mapsto z^2$. Si $D \subset \mathbb{C}^*$ est un disque ouvert, $f^{-1}(D)$ est l'union disjointe de deux disques ouverts, copies de D . On a donc $(f_*A_Y)|_D = A_D^2$. Ainsi, f_* est localement constant, mais pas constant puisque $(f_*A_Y)(X) = A_Y(Y) = A$.

Définition 1.18. Soit $f : Y \rightarrow X \in \mathcal{Top}$, $F \in \mathcal{Sh}(X)$. L'image inverse $f^{-1}F \in \mathcal{Sh}(Y)$ est le faisceautisé de $V \mapsto \varinjlim_{f(V) \subset U} F(U)$.

Exemples 1.19.

- $\iota_x : \{x\} \hookrightarrow X; F \in \mathcal{Sh}(X); \iota_x^{-1}F = F_x$.
- Si $f : Y \rightarrow X; A_X \in \mathcal{Sh}(X)$, alors $f^{-1}(A_X) = A_Y$.

Si $f : Y \rightarrow X \in \mathcal{Top}$, on a donc deux foncteurs $f_* : \mathcal{Sh}(Y) \rightarrow \mathcal{Sh}(X)$ et $f^{-1} : \mathcal{Sh}(X) \rightarrow \mathcal{Sh}(Y)$.

Lemme 1.20. *Le foncteur f^{-1} est exact.*

Démonstration. En effet, si $F \in \mathcal{Sh}(X)$ et si $y \in Y$, $(f^{-1}F)_y = \iota_y^{-1}f^{-1} = \iota_{f(y)}^{-1}F = F_{f(y)}$. Le résultat découle alors de ce qu'une suite de faisceaux est exacte si et seulement si elle est exacte sur toutes les fibres. $\square$

Proposition 1.21. *Les foncteurs $f^{-1} : \mathcal{Sh}(X) \rightleftharpoons \mathcal{Sh}(Y) : f_*$ sont adjoints. Ainsi $\text{Hom}_{\mathcal{Sh}(Y)}(f^{-1}(F), G) = \text{Hom}_{\mathcal{Sh}(X)}(F, f_*G)$, pour $F \in \mathcal{Sh}(X), G \in \mathcal{Sh}(Y)$, fonctoriellement en F et G .*

Démonstration. On construit d'abord deux applications naturelles, d'une part du foncteur $f^{-1} \circ f_*$ vers le foncteur identité dans $\mathcal{Sh}(Y)$ et d'autre part du foncteur identité vers le foncteur $f_* \circ f^{-1}$ dans $\mathcal{Sh}(X)$.

- $(f^{-1} \circ f_*)(G)$ est le faisceautisé du préfaisceau $U \mapsto \varinjlim_{f(U) \subset V} G(f^{-1}(V))$ dans $\mathcal{Psh}(Y)$. Si V contient $f(U)$, $f^{-1}(V)$ contient U , et on a donc une application de restriction de $G(f^{-1}(V))$ dans $G(U)$, qui passe à la colimite, par compatibilité des morphismes de restriction. Ce morphisme entre le préfaisceau $U \mapsto \varinjlim_{f(U) \subset V} G(f^{-1}(V))$ et $U \mapsto G(U)$ donne un morphisme entre les faisceaux $(f^{-1} \circ f_*)(G)$ et G , fonctoriellement en G , donc une application naturelle entre le foncteur $f^{-1} \circ f_*$ et le foncteur identité de $\mathcal{Sh}(Y)$.
- Le foncteur $f_* \circ f^{-1}(F)$ s'identifie naturellement au faisceautisé du préfaisceau $V \mapsto \varinjlim_{f(f^{-1}(V)) \subset W} F(W)$. Comme V contient $f(f^{-1}(V))$, on a une application $F(W) \rightarrow V \mapsto \varinjlim_{f(f^{-1}(V)) \subset W} F(W)$ qui donne un foncteur de préfaisceaux de F dans ce préfaisceau; on obtient un foncteur de F dans $f_* \circ f^{-1}(F)$ en composant avec le foncteur de faisceautisation. Cette construction nous donne ainsi une application naturelle du foncteur identité vers le foncteur $f^{-1} \circ f_*$ dans $\mathcal{Sh}(X)$.

On en déduit deux applications :

- $\text{Hom}_{\mathcal{Sh}(X)}(F, f_*(G)) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{Sh}(Y)}(f^{-1}(F), f^{-1} \circ f_*(G)) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{Sh}(Y)}(f^{-1}(F), G)$ et
- $\text{Hom}_{\mathcal{Sh}(Y)}(f^{-1}(F), G) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{Sh}(X)}(f_* \circ f^{-1}(F), f_*(G)) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{Sh}(X)}(F, f_*(G))$,

les flèches en bout de ligne provenant des constructions ci-dessus.

Il suffit alors de vérifier que ces deux applications entre $\text{Hom}_{\mathcal{Sh}(X)}(F, f_*(G))$ et $\text{Hom}_{\mathcal{Sh}(Y)}(f^{-1}(F), G)$ sont inverses l'une de l'autre. Le calcul laborieux est laissé en exercice. $\square$

On rappelle la définition d'un objet injectif.

Définition 1.22. Soit $\mathcal{A}$ une catégorie abélienne. Un objet $I \in \mathcal{A}$ est *injectif* si $\text{Hom}(\cdot, I) : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{Ab}$ est exact. Autrement dit, I est injectif si, dès que $A \hookrightarrow B$ est un monomorphisme, tout morphisme $A \rightarrow I$ se prolonge à B .

Exemple 1.23. Dans la catégorie des groupes abéliens, les injectifs sont les groupes divisibles.

Corollaire 1.24. Le foncteur f_* est exact à gauche et envoie injectif sur injectif.

Démonstration.

- On montre plus généralement qu'un foncteur adjoint à droite est exact à gauche (et de même un foncteur adjoint à gauche est exact à droite). Notons $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ deux catégories abéliennes et $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$, $G : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A}$ deux foncteurs, avec G adjoint à droite de F . On montre que G est exact à gauche.

Soit $0 \rightarrow Y \xrightarrow{f} Y' \xrightarrow{g} Y''$ une suite exacte dans $\mathcal{B}$. De manière équivalente, le couple (Y, f) est égal au noyau de $g : Y' \rightarrow Y''$. Par définition du noyau, il revient au même de dire que $g \circ f = 0$ et que si $h : X \rightarrow Y'$ est tel que $g \circ h = 0$, alors il existe un unique $\tilde{h} : X \rightarrow Y$ tel que $h = f \circ \tilde{h}$.

$$\begin{array}{ccccc} Y & \xrightarrow{f} & Y' & \xrightarrow{g} & Y'' \\ & \swarrow \tilde{f} & \uparrow h & \nearrow 0 & \\ & \exists ! \tilde{h} & X & & \end{array}$$

Ainsi, il est équivalent de dire que la suite $0 \rightarrow Y \xrightarrow{f} Y' \xrightarrow{g} Y''$ est exacte ou de dire que la suite $0 \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{B}}(X, Y) \xrightarrow{\tilde{f}} \text{Hom}_{\mathcal{B}}(X, Y') \xrightarrow{g_*} \text{Hom}_{\mathcal{B}}(X, Y'')$ est exacte pour tout objet X de $\mathcal{B}$.

Il suffit donc de montrer que la suite $0 \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{A}}(T, G(Y)) \xrightarrow{G(f_*)} \text{Hom}_{\mathcal{A}}(T, G(Y')) \xrightarrow{G(g_*)} \text{Hom}_{\mathcal{A}}(T, G(Y''))$ est exacte pour tout $T \in \mathcal{A}$. Mais, par la propriété d'adjonction, cette suite s'identifie à la suite exacte précédente, en posant $X = F(T)$, d'où le résultat.

Comme f_* est l'adjoint à droite de f^* , il est exact à gauche.

- Soit I un objet injectif dans $\mathcal{Sh}(Y)$ et montrons que $f^*(I)$ est injectif. On a le diagramme suivant dans $\mathcal{Sh}(X)$

$$\begin{array}{ccc} A & \hookrightarrow & B \\ & \searrow & \downarrow \\ & & f_*(I) \end{array}$$

que l'on doit compléter. Mais ce diagramme est équivalent au diagramme

$$\begin{array}{ccc} f^{-1}(A) & \hookrightarrow & f^{-1}(B) \\ & \searrow & \downarrow \\ & & I \end{array}$$

car f^{-1} est exact à gauche et par adjonction. Ce deuxième diagramme se complète par injectivité de I et permet de compléter le premier, de nouveau par adjonction.

□

Dans le cas où f est une immersion fermée, on a la propriété plus forte :

Lemme 1.25. Si $\iota : Z \hookrightarrow X$ (avec Z fermé de X) alors $\iota_* : \mathcal{Sh}(Z) \rightarrow \mathcal{Sh}(X)$ est exact.

Démonstration. En effet, $(\iota_* F)_x = \varinjlim_{x \in U} F(Z \cap U) = F_x$ si $x \in Z$ et 0 sinon.

□