# Table des matières



# 1 Cours 5 - 04/10

## 1.1 Foncteurs dérivés pour un objet

On rappelle d'abord quelques notions sur les catégories abéliennes.

**Définition 1.1.** Soit $\mathcal{A}$ une catégorie abélienne.
- On dit que $\mathcal{A}$ a *suffisamment d'injectifs* si, pour tout objet $A$ de $\mathcal{A}$, il existe un monomorphisme de $A$ vers un injectif.
- Si $A^\bullet$ et $B^\bullet$ sont deux complexes de $\mathcal{A}$, un *quasi-isomorphisme* entre $A^\bullet$ et $B^\bullet$, noté $A^\bullet \cong B^\bullet$, est un morphisme de complexes $A^\bullet \to B^\bullet$ induisant un isomorphisme en cohomologie.
- En particulier, si $A$ est un objet de $\mathcal{A}$, on peut l'identifier au complexe $A^\bullet$ concentré en degré 0, avec $A^0 = A$ et $d = 0$ ; une *résolution* de $A$ par $B^\bullet$ est un quasi-isomorphisme $A^\bullet \cong B^\bullet$. Il revient au même de demander à avoir une suite exacte de la forme

$$0 \to A \to B^0 \to B^1 \to \dots$$

Dans la suite, $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ sont deux catégories abéliennes, $\mathcal{A}$ a suffisamment d'injectifs et $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ est un foncteur additif et exact à gauche.

**Définition 1.2.** Pour tout $i \in \mathbb{N}$, on définit le *$i$-ème foncteur dérivé* de $F$ par

$$\begin{aligned} R^iF : \mathcal{A} &\to \mathcal{B} \\ A &\mapsto H^i(F(I^\bullet)), \end{aligned}$$

où $A \cong I^\bullet$ est une résolution injective de $A$ (i. e. les $I^k$ sont injectifs)

*Remarque* 1.3. Pour vérifier que cette définition fait sens, il faut d'une part montrer que $A$ admet toujours une résolution injective et d'autre part que les objets $H^i(F(I^\bullet))$ ne dépendent pas de la résolution choisie. On montre en fait que les objets obtenus par deux résolutions différentes sont canoniquement isomorphes ; le terme de *foncteur dérivé* est donc un abus de langage.

**Lemme 1.4.** *Tout objet $A$ de $\mathcal{A}$ admet une résolution injective $A \cong I^\bullet$.*

*Démonstration.* Comme $\mathcal{A}$ a suffisamment d'injectifs, on a un monomorphisme $A \overset{i}{\hookrightarrow} I^0$. Il existe aussi un injectif $I^1$ qui donne une flèche $\mathrm{Coker}(i) \overset{i_0}{\hookrightarrow} I^1$. En continuant ainsi, on obtient une résolution injective $I^\bullet$ de $A$. □

**Proposition 1.5.**
- *Si $A \cong I^\bullet$ et $B \cong J^\bullet$ sont deux résolutions injectives et si $f$ est un morphisme de $A$ dans $B$, il existe un morphisme de complexes $f^\bullet : I^\bullet \to J^\bullet$ étendant $f$, au sens où l'on a un diagramme commutatif*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, hook] \arrow[d, "f"] & I^0 \arrow[r] \arrow[d, dotted, "f^0"] & I^1 \arrow[r] \arrow[d, dotted, "f^1"] & \cdots \\ B \arrow[r, hook] & J^0 \arrow[r] & J^1 \arrow[r] & \cdots \end{tikzcd}$$

– *Si $f^\bullet$ et $f'^\bullet$ sont deux telles extensions de $f$, alors il existe une homotopie entre $f^\bullet$ et $f'^\bullet$, i. e. on peut construire des morphismes $H^i : I^i \to J^{i-1}$ tels que $f^i - f'^i = dH^i + H^{i+1}d$ pour tout $i$.*

*Démonstration.*

– Pour le premier point, on a d'abord un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, hook] \arrow[d, "f"] \arrow[dr] & I^0 \arrow[d, dotted, "f^0"] \\ B \arrow[r, hook] & J^0 \end{tikzcd}$$

à compléter. Mais ceci est possible du fait de l'injectivité de $J^0$. Ensuite, on remarque que le morphisme $d \circ f^0 : I^0 \to J^1$ factorise à travers $I^0/A$ par commutativité du diagramme précédent. On a donc un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} I^0/A \arrow[r, hook] \arrow[dr] & I^1 \arrow[d, dotted, "f^1"] \\ & J^1 \end{tikzcd}$$

qui se complète par injectivité de $J^1$. On peut continuer cette construction jusqu'à obtenir le morphisme de complexes $f^\bullet : I^\bullet \to J^\bullet$.

– Pour la construction de l'homotopie, on pose d'abord $H^0 : I^0 \to J^{-1}$ égal à 0. Ensuite, comme $f^0 = f'^0$ sur $A$, on a un diagramme

$$\begin{tikzcd} I^0/A \arrow[r, hook] \arrow[d, "f^0 - f'^0"'] & I^1 \arrow[dl, dotted, "H^1"] \\ J^0 & \end{tikzcd}$$

qu'on peut compléter en un diagramme commutatif par injectivité de $J^0$. Pour définir $H^2$, on considère $f^1 - f'^1 - d'^0 H^1 : I^1 \to J^1$ et il suffit de montrer que ce morphisme factorise à travers $\mathrm{Coker}(d^0 : I^0 \to I^1)$. Mais $(f^1 - f'^1 - d'^0 H^1) \circ d^0 = d'^0 \circ (f^0 - f'0) - d'^0 \circ (H^1 d^0) = 0$ par construction de $H^1$. On peut ainsi construire $H^2$ et les autres $H^k$ similairement, ce qui conclut la preuve.

□

*Remarque* 1.6. On n'utilise pas dans cette preuve l'injectivité des $I^\bullet$.

Si $A \cong I^\bullet$ et $A \cong J^\bullet$ sont deux résolutions injectives de $A$, on peut étendre l'identité de $A$ dans les deux sens, obtenant deux morphismes de complexes $f^\bullet : I^\bullet \to J^\bullet$ et $g^\bullet : J^\bullet \to I^\bullet$. Par la proposition précédente, $f^\bullet \circ g^\bullet$ et $g^\bullet \circ f^\bullet$ sont tous deux homotopes à l'identité de $A$. En passant au foncteur $F$, on a donc une équivalence d'homotopie entre les complexes $F(I^\bullet)$ et $F(J^\bullet)$ de $\mathcal{B}$. En particulier, on obtient des isomorphismes entre $H^i(F(I^\bullet))$ et $H^i(F(J^\bullet))$ donc $R^iF(A) = H^i(F(I^\bullet))$ est bien défini à (unique) isomorphisme près.

**Proposition 1.7.**

– *$R^0F(M) = F(M)$.*

– *Si $I$ est un objet injectif de $\mathcal{A}$, $R^iF(I) = 0$ pour $i > 0$.*

– *Si $\phi : A \to B$ est un morphisme dans $\mathcal{A}$, il existe des morphismes canoniques (une fois fixées des résolutions injectives de $A$ et $B$) $R^iF(\phi) : R^iF(A) \to R^iF(B)$.*

– *Si on a une suite exacte courte*

$$0 \to A \xrightarrow{\phi} B \xrightarrow{\psi} C \to 0$$

*dans $\mathcal{A}$, on peut construire une suite exacte longue dans $\mathcal{B}$ :*

$$0 \to F(A) \to F(B) \to F(C) \to R^1F(A) \to R^1F(B) \to R^1F(C) \to \dots$$

*Démonstration.* La première propriété vient de ce que $F$ est exact à gauche et la seconde est immédiate en prenant la résolution canonique $I \cong I$ de $I$. Les deux dernières viennent à peu près des constructions faites au-dessus, on réfère à [1] pour les détails. □

## 1.2 Foncteurs dérivés pour un complexe

On généralise maintenant ces constructions en considérant non plus un objet $A$ de la catégorie $\mathcal{A}$ mais un complexe $M^\bullet$. On aura besoin de la notion de double complexe.

**Définition 1.8.**
- Un *double complexe* $(A^{\bullet,\bullet}, D_1, D_2)$ dans $\mathcal{A}$ est la donnée d'objets $A^{k,l}$ de $\mathcal{A}$ indexés par $\mathbb{Z}^2$ et de morphismes $D_1 : A^{k,l} \to A^{k+1,l}$ et $\frac{D}{2} : A^{k,l} \to A^{k,l+1}$ tels que $D_1^2 = D_2^2 = D_1 \circ D_2 - D_2 \circ D_1 = 0$. Les doubles complexes que nous considérerons seront nuls en degrés négatifs, c'est-à-dire indexés par $\mathbb{N}^2$.
- Le *complexe total* associé à un double complexe $(A^{\bullet,\bullet}, D_1, D_2)$ est un complexe $((\mathrm{Tot}\, A)^\bullet, D)$ ayant pour objets $(\mathrm{Tot}\, A)^i = \oplus_{p+q=i} A^{p,q}$ et comme différentielle $D = D_1 + (-1)^p D_2$ sur les composantes $A^{p,q}$ de $(\mathrm{Tot}\, A)^{p+q}$.

**Proposition 1.9.** *Il existe un quasi-isomorphisme $M^\bullet \cong I^\bullet$, avec $I^\bullet$ complexe d'injectifs, tel que les flèches $M^k \to I^k$ soient des monomorphismes.*

*Démonstration.* – On construit d'abord un double complexe

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & M^0 \arrow[r] \arrow[d, hook, "i_0"] & M^1 \arrow[r] \arrow[d, hook, "i_1"] & M^2 \arrow[r] \arrow[d, hook, "i_2"] & \cdots \\
0 \arrow[r] & I^{0,0} \arrow[r, "D_1"] \arrow[d, "D_2"'] & I^{1,0} \arrow[r, "D_1"] \arrow[d, "D_2"'] & I^{2,0} \arrow[r, "D_1"] \arrow[d, "D_2"'] & \cdots \\
0 \arrow[r] & I^{0,1} \arrow[r, "D_1"] \arrow[d] & I^{1,1} \arrow[r, "D_1"] \arrow[d] & I^{2,1} \arrow[r, "D_1"] \arrow[d] & \cdots \\
& \vdots & \vdots & \vdots &
\end{tikzcd}$$

avec les $I^{k,l}$ des injectifs de $\mathcal{A}$, pour tous $k$ et $l$. On demande de plus que $i_k : M^k \to I^{k,0}$ soit un monomorphisme, que $i^\bullet : M^\bullet \to I^{\bullet,0}$ soit un morphisme de complexes et que chaque $(I^{k,\bullet}, D_2)$ soit une résolution de $M^k$.
On commence par injecter $M^0$ dans $I^0$ par $i_0$. On cherche à définir $i_1 : M^1 \to I^{1,0}$ faisant commuter le carré

$$\begin{tikzcd}
M^0 \arrow[r] \arrow[d, hook, "i_0"'] & M^1 \arrow[d] \\
I^{0,0} \arrow[r] & I^{1,0}
\end{tikzcd}$$

Considérons $(i_0, -d_M) : M^0 \to I^{0,0} \oplus M^1$ et son conoyau $K = (I^{0,0} \oplus M^1)/M^0$. On injecte $K$ dans un injectif $I^{1,0}$ :

$$\begin{tikzcd}
M^0 \arrow[r] \arrow[d, hook, "i_0"'] & M^1 \arrow[d] \arrow[dr, "i_1"] & \\
I^{0,0} \arrow[r] \arrow[rr, bend right, "D_1"'] & K \arrow[r] & I^{1,0}
\end{tikzcd}$$

Dans ce diagramme, le morphisme $I^{0,0} \to K$ est induit par l'inclusion $I^{0,0} \hookrightarrow I^{0,0} \oplus M^1$ et de même pour $M^1 \to K$. La flèche $i_1$ est injective. En effet, si $y \in M^1$ est dans son noyau, son image dans $K$ est 0, i.e. $(0, y) = (i_0(x), -d_M(x))$. Par injectivité de $i_0$, ceci implique $x = 0$ et donc $y = 0$. De plus, le diagramme commute par construction.
Il s'agit maintenant de construire tous les $I^{k,0}$ afin de compléter la première ligne. La construction pour $I^{2,0}$ est identique, à ceci près que l'on considère $K = (\mathrm{Coker}\, D_1 \oplus M^2)/M^1$ au lieu de

$K = (I^{1,0} \oplus M^2)/M^1$. Avec des notations similaires à l'étape précédente, on vérifie que $i_2$ est injectif, que $D_1^2 = 0$ (c'est pour cela que l'on change la définition de $K$) et le diagramme augmenté de $M^2$ et $I^{2,0}$ commute encore. De proche en proche, on construit ainsi la ligne des $I^{k,0}$.
Pour construire le double complexe, on répète la même construction, avec le complexe $\tilde{M}^\bullet = \mathrm{Coker}(i^\bullet : M^\bullet \to I^{\bullet,0})$.
– Une fois le double complexe total construit, on considère $(I^\bullet, D)$ son complexe total. Le morphisme de complexe $i^\bullet : M^\bullet \to I^\bullet$ est toujours injectif et c'est un quasi-isomorphisme d'après le lemme suivant.

□

**Lemme 1.10.** *Soit $(I^\bullet, D)$ le complexe total associé à un double complexe $(I^{p,q}, D_1, D_2)$. Soit $(M^\bullet, d_M)$ un complexe. Si, pour tous $p$, $(I^{p,\bullet}, D_2)$ est une résolution de $M^p$,* via *un morphisme injectif $i_p : M^p \to I^{p,0}$ et si $i_\bullet$ est un morphisme de complexes alors c'est un quasi-isomorphisme.*

*Démonstration.* Montrons d'abord la surjectivité en cohomologie. Soit $\alpha = \sum \alpha^{p,q}$ une forme $D$-fermée dans $I^k$. Dans la décomposition de $D\alpha = \sum (D_1 + (-1)^p D_2)\alpha^{p,q}$, la seule composante de type $(0, k+1)$ est $D_2\alpha^{0,k}$. Donc $D_2\alpha^{0,k}$ est nulle et $\alpha^{0,k} = D_2\beta^{0,k-1}$ avec $\beta^{0,k-1}$ dans $I^{0,k-1}$. Alors, $\alpha - D\beta^{0,k-1}$ est $D$-cohomologue à $\alpha$ et n'a pas de composante de type $(0, k)$.

En continuant ce raisonnement, on montre ainsi que tout $D$-cocycle dans $I^k$ est $D$-cohomologue à un $D$-cocycle dans $I^{k,0}$. Mais un élément $\alpha^{k,0}$ est un cocycle si et seulement si $D_1\alpha^{k,0} = D_2\alpha^{k,0} = 0$. En particulier, $\alpha^{k,0}$ est l'image d'un élément $\gamma^k$ de $M^k$ par $i^k$ et cet élément est $d_M$-fermé car $i_{k+1}$ est injectif et $i_{k+1} \circ d_M(\gamma^k) = D_1\alpha^{k,0} = 0$. On obtient donc la surjectivité en cohomologie.

Montrons l'injectivité. Soit $\alpha^k$ dans $M^k$ tel que $i_k(\alpha^k) = \beta^k$ soit $D$-exact. Alors $\beta^k$ s'écrit $D\gamma$ avec $\gamma$ dans $I^{k-1}$. Par la preuve de la surjectivité, $\gamma$ est $D$-cohomologue à une forme $\gamma^{k-1,0}$ vérifiant aussi $D\gamma^{k-1,0} = \beta^k$. Comme $D_2\gamma^{k-1,0} = 0$, on a $\gamma^{k-1,0} = i_{k-1}(\alpha^{k-1})$ et $d_M(\alpha^{k-1}) = \alpha^k$ car leur image par $i_k$ est la même et que $i_k$ est injective. □

On définit maintenant $R^iF(M^\bullet) = H^i(F(I^\bullet))$, où $M^\bullet \cong I^\bullet$ est un quasi-isomorphisme, avec $i^\bullet : M^\bullet \hookrightarrow I^\bullet$.

**Proposition 1.11.** *$R^iF(M^\bullet)$ est bien défini à isomorphisme canonique près.*

*Démonstration.* Voir [1]. □

## 1.3 Objets acycliques

Les objets injectifs peuvent être difficiles à manier mais d'autres objets permettent de calculer $R^iF(M^\bullet)$.

**Définition 1.12.** Un objet $L$ de $\mathcal{A}$ est $F$-acyclique si $R^iF(L) = 0$, pour tout $i \geq 1$.

**Proposition 1.13** (Leray)**.** *Soit $M^\bullet \cong L^\bullet$ un quasi-isomorphisme avec $L^\bullet$ un complexe d'acycliques. Alors $R^iF(M^\bullet) = H^i(F(L^\bullet))$.*

*Démonstration.* On ne fait la démonstration que dans le cas où $M^\bullet = A$, concentré en degré 0. On a donc une suite exacte

$$0 \to A \xrightarrow{i_0} L^0 \to L^1 \to \dots$$

En posant $B = \mathrm{Coker}\, i_0$, on peut casser cette suite en deux suites exactes :

$$0 \to A \xrightarrow{i_0} L^0 \to B \to 0$$
$$0 \to B \to L^1 \to L^2 \to \dots$$

La première suite exacte (courte) donne une suite exacte longue de la forme

$$\dots \to R^iF(A) \to R^iF(L^0) \to R^iF(B) \to R^{i+1}F(A) \to R^{i+1}F(L^0) \to R^{i+1}F(B) \to \dots$$

Comme $L^0$ est $F$-acyclique, les $R^iF(L^0)$ sont nuls pour $i \geq 1$ donc

$$R^iF(B) = R^{i+1}F(A), i \geq 1$$
$$R^1F(A) = \mathrm{Coker}(F(L^0) \to F(B))$$

Comme $F$ est exact à gauche, la deuxième suite exacte donne $F(B) = \mathrm{Ker}(F(L^1) \to F(L^2))$ donc $R^1F(A) = H^1(F(L^\bullet))$. Ceci prouve donc la proposition pour $i = 1$.

Supposant le résultat prouvé pour tout objet $A$ et pour tout $i \leq k$, on peut l'appliquer à $B$ et à la deuxième suite exacte pour obtenir $R^kF(B) = H^{k+1}(F(L^\bullet))$. Comme on a l'égalité $R^kF(B) = R^{k+1}F(A)$, le résultat est prouvé pour $A$ et $k + 1$. □

## 1.4 Le cas des faisceaux

Soit $X$ un espace topologique.

**Lemme 1.14.** *$\mathcal{S}h(X)$ a suffisamment d'injectifs.*

*Démonstration.* La catégorie $\mathcal{A}b$ des groupes abéliens a suffisamment d'injectifs. On montre en fait que les injectifs de $\mathcal{A}b$ sont les groupes divisibles et que tout groupe abélien est un sous-groupe d'un groupe divisible.

Soit $F \in \mathcal{S}h(X)$. Pour tout $x$ dans $X$, choisissons une injection $F_x \overset{i_x}{\hookrightarrow} I_x$ où $I_x$ est un injectif de $\mathcal{A}b$. On pose $I^0 = \prod_{x \in X}(i_x)_*I_x$. Alors $F$ s'injecte dans $I_0$ en prenant le produit des applications naturelles $F \to F_x$. Montrons que $I^0$ est injectif dans $\mathcal{S}h(X)$. On a le diagramme suivant à compléter :

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, hook] \arrow[dr] & G' \arrow[d, dotted] \\ & I^0 \end{tikzcd}$$

Pour tout $G \in \mathcal{S}h(X)$, $\mathrm{Hom}_{\mathcal{S}h(X)}(G, I^0) = \prod_{x \in X} \mathrm{Hom}_{\mathcal{S}} h(X)(G, (i_x)_*I_x) = \prod_{x \in X} \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}b}(i_x^{-1}G, I_x)$. Le diagramme est donc équivalent à

$$\forall x \in X,\ \begin{tikzcd} G_x \arrow[r, hook] \arrow[dr] & G'_x \arrow[d, dotted] \\ & I_x \end{tikzcd}$$

l'injectivité en haut venant de l'exactitude de $i_x^{-1}$. Comme $I_x$ est injectif, les diagrammes se complètent et $I^0$ est injectif dans $\mathcal{S}h(X)$. □

### 1.4.1 Faisceaux flasques

**Définition 1.15.** $F \in \mathcal{S}h(X)$ est *flasque* si $F(X) \twoheadrightarrow F(U)$ pour tout ouvert $U$ de $X$.

*Remarque* 1.16.

- Un faisceau $F$ est flasque si et seulement si pour tous ouverts $U \subset V \subset X$, $F(V) \overset{\rho_{VU}}{\twoheadrightarrow} F(U)$.
- Le lemme de Spaltenstein caractérise les injectifs de $\mathcal{S}h(X)$ : $I \in \mathcal{S}h(X)$ est injectif si et seulement si pour tous $V \subset U$ ouverts de $X$, $I(U)$ et $I(V)$ sont injectifs et $I(U) \twoheadrightarrow I(V)$ est scindée.

**Corollaire 1.17.** *Pour les faisceaux en $\mathbb{C}$-espaces vectoriels, les objets injectifs et flasques sont les mêmes.*

**Lemme 1.18.** *Soit $F \in \mathcal{S}h(X)$ flasque. Alors $f_*F$ est flasque, pour tout $f : X \to Y$.*

*Démonstration.* Il suffit de remarquer que la flèche $f_*(F)(X) \to f_*(F)(U_Y)$ est égale à la flèche $F(X) \twoheadrightarrow F(f^{-1}(U_Y))$. □

**Lemme 1.19.** *Soit $0 \to F \to F' \to F'' \to 0$ une suite exacte courte de faisceaux sur $X$. Si $F$ et $F'$ sont flasques, alors $F''$ aussi.*

*Démonstration.* On a le diagramme suivant

$$\begin{tikzcd} F(X) \arrow[r] \arrow[d, two heads] & F''(X) \arrow[d, "\gamma"'] \\ F(U) \arrow[r, "\beta"'] & F''(U) \end{tikzcd}$$

et on veut montrer la surjectivité de $\gamma$. Il suffit de prouver la surjectivité de $\beta$.

Soit $s'' \in F''(U)$. Notons $\Sigma = \{(V,s)|V$ ouvert de U $, s \in F(V)$ d'image $s''_{|V}\}$. C'est un ensemble ordonné par $(V,s) \leq (W,t)$ si $V \subset W$ et $t_{|V} = s$. De plus, tout sous-ensemble totalement ordonné admet un majorant. On trouve donc un élément maximal $(V,s)$ par le lemme de Zorn.

Par l'absurde, si $V \neq U$, soit $x \in U - V$. Il existe $W$ ouvert contenant $x$, $t \in F(W)$ tel que $t$ soit envoyé sur $s''_{|W}$ par $F \to F''$. Sur $V \cap W$, $s - t$ est envoyé sur 0 dans $F''$. Donc $s - t$ est une section de $F'$ sur $V \cap W$. Comme $F'$ est flasque, il existe $r \in F'(X)$ tel que $r_{|V \cap W} = (s-t)_{|V \cap W}$. En remplaçant $t$ par $t + r_{|W}$, on voit que $t$ et $s$ se recollent sur $V \cup W$, ce qui contredit la maximalité de $(V,s)$. □

**Corollaire 1.20.** *Soit $F \in \mathcal{S}h(X)$ flasque. Alors $F$ est $f_*$-acyclique, pour tout $f : X \to Y$. En particulier, $F$ est $\Gamma$-acyclique, où $\Gamma : \mathcal{S}h(X) \to \mathcal{A}b$ est le foncteur de sections globales $F \mapsto F(X)$.*

*Démonstration.* Plongeons $F$ dans un injectif $I$, de sorte que l'on a une suite exacte courte

$$0 \to F \to I \to F'' \to 0.$$

Comme $I$ est injectif, il est flasque par le (sens facile du) lemme de Spaltenstein et le lemme précédent implique que $F''$ aussi est flasque.

Montrons que la flèche $f_*I \to f_*F''$ est surjective. Il suffit de montrer que pour tout ouvert $U$ de $X$, $I(U) \twoheadrightarrow F''(U)$. Le raisonnement est similaire à celui du lemme précédent : si $\sigma \in F''(U)$, $\sigma$ peut se relever localement en des sections de $I$ au voisinage de chaque point. En prenant un élément maximal $(W,t)$ pour l'ordre naturel sur les couples $(V,\tau)$ avec $V$ ouvert de $U$ et $\tau$ dans $I(V)$ relevant $\sigma_{|V}$, il suffit de montrer que $W = U$. Mais si $W \neq U$, on peut relever $\sigma$ en $t' \in I(W')$ avec $W'$ un voisinage de $x \in U - W$. La section $t_{|W \cap W'} - t'_{|W \cap W'}$ provient d'une section globale de $I$ car $I$ est flasque, permettant de relever $\sigma$ sur un ouvert plus grand que $W$, ce qui est absurde.

On obtient donc une suite exacte longue de la forme :

$$0 \to R^1 f_*(F) \to R^1 f_*(I) \to R^1 f_*(F'') \to R^2 f_*(F) \to R^2 f_*(I) \to \dots$$

Par injectivité de $I$, les $R^k f_*(I)$ sont tous nuls. On en déduit $R^1 f_*(F) = 0$ et $R^k f_*(F'') = R^{k+1} f_*(F)$ pour tout $k \geq 1$. Par une récurrence immédiate, comme $F''$ est aussi flasque, on obtient la nullité de tous les $R^k f_*(F)$. □

*Remarque* 1.21. Les faisceaux flasques permettent de construire des résolutions naturelles, ce qui a des avantages théoriques. On dispose notamment de la résolution de Godement.

**Définition 1.22.** Pour tout faisceau $G$ sur $X$ on note $G^0_{\mathrm{God}} = \oplus_{x \in X} (i_x)_* G_x$. Le faisceau $G^0_{\mathrm{God}}$ est flasque et on a un morphisme injectif $G \hookrightarrow G^0_{\mathrm{God}}$. La *résolution de Godement* d'un faisceau $F$ est alors définie par récurrence de la façon suivante :

– $F^0_{\mathrm{God}}$ et l'injection $F \hookrightarrow F^0_{\mathrm{God}}$ sont définis comme ci-dessus.
– Si les $F^j_{\mathrm{God}}$ sont construits pour $j \leq k$ et que $d_{k-1}$ est le morphisme entre $F^{k-1}_{\mathrm{God}}$ et $F^k_{\mathrm{God}}$, alors $F^{k+1}_{\mathrm{God}} = (\mathrm{Coker}(d_{k-1}))^0_{\mathrm{God}}$ et $d_k$ est induit par l'inclusion $(\mathrm{Coker}(d_{k-1})) \in (\mathrm{Coker}(d_{k-1}))^0_{\mathrm{God}}$.

### 1.4.2 Cohomologie de Cech

Soit $\mathcal{U} = (U_i)_{i \in \mathbb{N}}$ un recouvrement ouvert dénombrable de $X$. On pose $\check{H}^q(\mathcal{U}, F) := H^q(C^\bullet(\mathcal{U}, F))$ où :

– $C^q(\mathcal{U}, F)(U) = \oplus_{|I|=q+1} F(U \cap U_I)$, avec $U_I = \cap_{i \in I} U_i$.
– $d^q : C^q(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \to C^{q+1}(\mathcal{U}, F)$ est donnée par $(d\sigma)_{j_0,\dots,j_{k+1}} = \sum_i (-1)^i \sigma_{j_0,\dots,\hat{j_i},\dots,j_{k+1}\,|U \cap U_{j_0,\dots,j_{k+1}}}$ pour $\sigma = (\sigma_I)_{I \subset \mathbb{N}}$ et $\sigma_I \in F(U \cap U_I)$

On montre que les $C^q(\mathcal{U}, F)$ donnent une résolution de $F$.

**Lemme 1.23.** *Si les $U_I$ vérifient $H^q(U_I, F) = 0$ pour tout $q \geq 1$, alors $H^q(X, F) := R^q\Gamma_X(F) = \check{H}^q(\mathcal{U}, F)$.*

*Démonstration.* On considère $F \cong I^\bullet$ une résolution flasque de $F$. On obtient un double complexe

$$\begin{tikzcd}
F \arrow[r, hook] & I^0 \arrow[r] \arrow[d] & I^1 \arrow[r] \arrow[d] & I^2 \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \\
& I^{0,0} \arrow[r] \arrow[d] & I^{1,0} \arrow[r] \arrow[d] & I^{2,0} \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \\
& I^{0,1} \arrow[r] & I^{1,1} \arrow[r] & I^{2,1} \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

Verticalement,
$$0 \to I^l \to I^{l,0} \to I^{l,1} \to I^{l,2} \to \ldots$$
est la résolution de Cech de $I^l$ et les flèches horizontales sont obtenues par fonctorialité de la résolution de Cech. Par définition,
$$I^{l,k} = \oplus_{|I|=k+1}(j_I)_* I^l_{|U_I}, \text{ avec } j_I : U_I \to X$$
et donc les $I^{l,k}$ sont des faisceaux flasques.

Le complexe total $(\operatorname{Tot} I^{\bullet,\bullet})$ est donc une résolution flasque de $F$. Donc $H^q(X, F) = R^q\Gamma_X(F) = H^q(\Gamma_X(\operatorname{Tot} I^{\bullet,\bullet}))$.

Appliquons le foncteur $\Gamma_X$ au complexe double. Les lignes $\Gamma_X(I^{\bullet,l})$ sont les complexes calculant la cohomologie $\coprod_{|I|=l+1}(j_I)_* F_{|U_I}$. Comme cette cohomologie est par hypothèse nulle en degré $d \geq 1$, les lignes sont des résolutions de $\Gamma_X(C^l(\mathcal{U}, F))$. Par le lemme 1.10, on a donc :

$$\check{H}^q(\mathcal{U}, F) = H^q(\Gamma_X(C^l(\mathcal{U}, F))) = H^q(\Gamma_X(\operatorname{Tot} I^{\bullet,\bullet})) = H^q(X, F).$$

□

# Références

[1] Voisin C., Théorie de Hodge et géométrie algébrique complexe, SMF