Table des matières

1 Cours 6 - 06/10

1.1 Le complexe de de Rham holomorphe

Définition 1.1. Soit $M^\bullet$ un complexe dans $\mathcal{S}h(X)$. On note $\mathbb{H}(X, M^\bullet) := R^k\Gamma_X(M^\bullet)$ *l'hypercohomologie* (ou simplement cohomologie) de X dans $M^\bullet$. Ainsi, on a $\mathbb{H}(X, M^\bullet) = H^k(\Gamma_X(I^\bullet))$ si $M^\bullet \cong I^\bullet$ et si $I^\bullet$ est un complexe de faisceaux injectifs ou flasques.

Remarque 1.2. Si $F \in \mathcal{S}h(X)$ est quasi-isomorphe au complexe $M^\bullet$, on a donc $H^k(X, F) = \mathbb{H}(X, M^\bullet)$.

Soit X une variété complexe de dimension complexe n. On dispose du *complexe de de Rham holomorphe* $\Omega^\bullet_X$ des formes holomorphes, ∂ étant l'opérateur de dérivation.

Lemme 1.3. *L'inclusion* $i : \mathbb{C}_X \to \Omega^\bullet_X$ *est un quasi-isomorphisme.*

Démonstration. On a un double complexe

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathcal{O}_X \arrow[r, "\partial"] \arrow[d, hook] & \Omega^1_X \arrow[r, "\partial"] \arrow[d, hook] & \Omega^2_X \arrow[r] \arrow[d, hook] & \cdots \\
 & A^{0,0} \arrow[r, "\partial"] \arrow[d, "\bar\partial"] & A^{1,0} \arrow[r, "\partial"] \arrow[d, "\bar\partial"] & A^{2,0} \arrow[r] \arrow[d, "\bar\partial"] & \cdots \\
 & A^{0,1} \arrow[r, "\partial"] \arrow[d, "\bar\partial"] & A^{1,1} \arrow[r, "\partial"] \arrow[d, "\bar\partial"] & A^{2,1} \arrow[r] \arrow[d, "\bar\partial"] & \cdots \\
 & A^{0,2} \arrow[r, "\partial"] & A^{1,2} \arrow[r, "\partial"] & A^{2,2} \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

où $A^{k,l}$ désigne le faisceau des formes différentielles de type (k, l) sur X. Chaque colonne $(A^{p,\bullet}, (-1)^p\bar\partial)$ est une résolution de Ω^p_X donc le complexe total du double complexe est quasi-isomorphe au complexe $(\Omega^\bullet_X, \partial)$, par l'inclusion $\Omega^\bullet \hookrightarrow A^{\bullet,0}$. Mais ce complexe est simplement le complexe de de Rham usuel $(A^\bullet, d = \partial + \bar\partial)$. Comme le complexe de de Rham est une résolution de $\mathbb{C}_X$ pour l'inclusion $\mathbb{C}_X \hookrightarrow \mathcal{O}_X$, on a bien que l'inclusion $i : \mathbb{C}_X \to \Omega^\bullet_X$ est un quasi-isomorphisme. □

Le but de ce cours est d'interpréter la filtration de Hodge sur la cohomologie $H^k(X, \mathbb{C}_X)$ d'une variété kählerienne compacte X comme provenant d'une filtration sur le complexe $\Omega^\bullet_X$.

1.2 Complexe filtré

Soit $\mathcal{A}$ une catégorie abélienne et $(A^\bullet, d)$ un complexe de $\mathcal{A}$ concentré en degrés positifs.

Définition 1.4. Une *filtration décroissante* de $(A^\bullet, d)$ est la donnée de sous-complexes $(F^pA^\bullet)_{p\in\mathbb{N}}$ de $(A^\bullet, d)$, avec

$$\cdots \subset F^pA^\bullet \subset \cdots \subset F^0A^\bullet = A^\bullet.$$

Définition 1.5. Si $(A^\bullet, d, F^\bullet)$ est un complexe filtré, on définit la filtration induite, encore notée F, sur la cohomologie de A :

$$F^pH^i(A^\bullet) := \mathrm{Im}(H^i(F^pA^\bullet) \to H^i(A^\bullet)).$$

Soit $G : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ un foncteur exact à gauche entre catégories abéliennes, $\mathcal{A}$ ayant suffisamment d'injectifs.

Définition 1.6. On définit une filtration décroissante sur $R^iG(A^\bullet)$ par

$$F^pR^iG(A^\bullet) = \mathrm{Im}(R^iG(F^pA^\bullet) \to R^iG(A^\bullet)).$$

Filtration bête et filtration du complexe total d'un complexe double Les filtrations que l'on considère viennent souvent d'une des deux constructions suivantes :

– *La filtration bête ou naïve.* On pose simplement $(F^pA^\bullet)^k = 0$ si $k < p$ et A^k si $k \geq p$. Autrement dit, on oublie dans $F^p(A^\bullet)$ les objets de degré $< p$ du complexe $A^\bullet$.

– *La filtration du complexe total d'un complexe double.* Soit $(A^{\bullet,\bullet}, d_1, d_2)$ un complexe double, concentré en degrés positifs. On peut considérer son complexe total $(\mathrm{Tot}\, A^{\bullet,\bullet}, D = d_1 + (-1)^p d_2)$ et on définit une filtration sur ce complexe par

$$(F^p(\mathrm{Tot}\, A^{\bullet,\bullet}))^k = \oplus_{\substack{r+s=k \\ r\geq p}} A^{r,s}.$$

De nouveau, on oublie dans $F^pA^{\bullet,\bullet}$ les termes intervenant dans les colonnes d'abcisse $< p$.

Ces deux filtrations sont très liées. Considérons en effet un complexe $(A^\bullet, d)$ résolu par un complexe double d'injectifs ou d'acycliques $I^{\bullet,\bullet}$. On sait qu'on a alors un quasi-isomorphisme $(A^\bullet, d) \cong (\mathrm{Tot}\, I^{\bullet,\bullet}, D)$. De même, en oubliant ce qui se passe dans les colonnes d'abscisse $< p$, on a un quasi-isomorphisme $(F^p\,\mathrm{Tot}\, I^{\bullet,\bullet}, D) \cong (F^pA^\bullet, d)$, la filtration à gauche étant la filtration du complexe total de $I^{\bullet,\bullet}$ et celle à droite étant la filtration bête sur $A^\bullet$.

On dit alors que $(A^\bullet, d, F^\bullet) \cong (\mathrm{Tot}\, I^{\bullet,\bullet}, D, F^\bullet)$ est un *quasi-isomorphisme filtré.*

Application au complexe de de Rham holomorphe On a un quasi-isomorphisme $(\Omega_X^\bullet, \partial) \cong (A_X^\bullet, d) = (\mathrm{Tot}\, A^{\bullet,\bullet}, \partial + \bar\partial)$. On a donc aussi des quasi-isomorphismes $(F^p\Omega_X^\bullet, \partial) \cong (F^pA_X^\bullet, d)$ avec $F^pA_X^k = \oplus_{\substack{r+s=k \\ r\geq p}} A^{r,s}$.

Ainsi,

$$F^p\mathbb{H}^i(X, \Omega_X^\bullet) = F^p\mathbb{H}^i(X, \mathbb{C}) = \mathrm{Im}(H^i(F^pA^\bullet(X), d) \to H^i(A^\bullet(X), d) = H^i(X, \mathbb{C})),$$

où la filtration du premier terme est induite de la filtration bête sur le complexe de De Rham holomorphe et celle du second est la filtration de complexe double.

Proposition 1.7. *Si X est Kähler compacte alors $H^i(F^pA^\bullet(X), d) = \oplus_{r\geq p} H^{r,i-r}(X)$.*

Démonstration. C'est un exercice en utilisant les representants harmoniques, cf. [1, prop. 7.5]. □

Ainsi si X est Kähler compacte, on obtient que la filtration $F^pH^i(X, \mathbb{C})$ induite par la filtration bête sur $\Omega_X^\bullet$ coïncide avec la filtration de Hodge sur $H^i(X, \mathbb{C})$.

1.3 Suites spectrales

Nous développons maintenant un formalisme général permettant de calculer le gradué (pour la filtration induite) de l'hypercohomologie d'un complexe filtré.

Définition 1.8. Soit $\mathcal{A}$ une catégorie abélienne.

– Une *suite spectrale* de E dans $\mathcal{A}$ est la donnée de $r_0 \in \mathbb{N}$ et pour tout $r \geq r_0$:
  – d'un objet $E_r \in \mathcal{A}$, la r-ème page de E ;
  – d'une différentielle $d_r : E_r \to E_r$;
  – d'un isomorphisme $E_{r+1} = H(E_r, d_r)$.

– Un *morphisme* $f : E \to E'$ de suites spectrales est la donnée de $f_r : E_r \to E'_r$, pour r suffisamment grand, tel que pour tout r, $d'_r \circ f_r = f_r \circ d_r$ et tel que le morphisme $E_{r+1} \cong H(E_r, d_r) \overset{f_{r*}}{\to} H(E'r, d_r) \cong E'_{r+1}$ soit égal à f_{r+1}.

– On note $\mathcal{SS}(A)$ la catégorie des suites spectrales dans $\mathcal{A}$.

Remarque 1.9.

– La catégorie $\mathcal{A}$ sera le plupart du temps bigraduée.

– Dans ce cas, on demande que d_r soit de bigraduation $(r, -r+1)$ i. e. $d_r : E_r^{p,q} \to E_r^{p+r,q-r+1}$.

Que calcule une suite spectrale ? Notons $\operatorname{Im} d_{r_0} := B_{r_0} \subset Z_{r_0} =: \operatorname{Ker} d_{r_0} \subset E_{r_0}$. Par définition, on a donc $E_{r_0+1} = Z_{r_0}/B_{r_0}$ et une différentielle d_{r_0+1} agit sur E_{r_0+1}. On peut ainsi définir les bords $\overline{B_{r_0+1}}$ et les cycles $\overline{Z_{r_0+1}}$ de E_{r_0+1}. En les remontant dans E_{r_0}, on a la suite d'inclusions

$$B_{r_0} \subset B_{r_0+1} \subset Z_{r_0+1} \subset Z_{r_0} \subset E_{r_0}.$$

En continuant ainsi, on obtient une suite d'inclusions de la forme

$$B_{r_0} \subset B_{r_0+1} \subset \cdots \subset B_r \subset \cdots \subset Z_r \subset \cdots \subset Z_{r_0+1} \subset Z_{r_0} \subset E_{r_0}. \tag{1}$$

Avec ces notations, on a $E_{r+1} = Z_r/B_r$ et la suite exacte

$$0 \to Z_{r+1}/B_r \to E_{r+1} = Z_r/B_r \stackrel{d_{r+1}}{\to} B_{r+1}/B_r \to 0$$

donne un isomorphisme $Z_r/Z_{r+1} \cong B_{r+1}/B_r$ pour tout $r \geq r_0$.

Réciproquement, une suite d'inclusions de la forme (1), munie d'isomorphismes $Z_r/Z_{r+1} \cong B_{r+1}/B_r$ permet de construire une suite spectrale de E.

Notons $Z_\infty = \cap Z_r$ l'espace des *cycles survivants* et $B_\infty = \cup B_r$ l'espaces des *cobords éventuels*. L'objet calculé par la suite spectrale de E est alors $E_\infty = Z_\infty/B_\infty$.

1.4 Suite spectrale d'un complexe filtré

Théorème 1.10 (Leray). *Soit $(A^\bullet, d, F^\bullet)$ un complexe cohomologique filtré de $\mathcal{A}$ (ici on autorise la filtration à être indexée par $\mathbb{Z}$).*

- *Il existe une suite spectrale cohomologique naturelle $(E_r)_{r\geq 0}$ dans $\mathcal{A}^{\bullet,\bullet}$ de termes*
  - *$E_0^{p,q} = \operatorname{Gr}^p_{F^\bullet} A^{p+q} = F^p A^{p+q}/F^{p+1}A^{p+q}$ et de différentielle induite par d.*
  - *$E_1^{p,q} = H^{p+q}(\operatorname{Gr}^p_{F^\bullet} A^\bullet, d)$ et $d_1 : E_1^{p,q} \to E_1^{p+q+1}$ est $\delta : H^{p+q}(\operatorname{Gr}^p_{F^\bullet} A^\bullet, d) \to H^{p+q+1}(\operatorname{Gr}^{p+1}_{F^\bullet} A^\bullet, d)$ la flèche de connexion associée à la suite exacte courte*

$$0 \to \operatorname{Gr}^{p+1}_{F^\bullet} A^\bullet \to F^p A^\bullet/F^{p+2}A^\bullet \to \operatorname{Gr}^p_{F^\bullet} A^\bullet \to 0$$

  - *Si de plus la filtration est* exhaustive *($A^\bullet = \cup_p F^p A^\bullet$) et séparée ($\cap_p F^p A^\bullet = \{0\}$) alors la suite spectrale (E_r, d_r) converge vers $H^\bullet(A^\bullet, d)$ au sens où*

$$E_\infty^{p,q} := E_r^{p,q} \ (r \text{ grand}) = \operatorname{Gr}^p_F H^{p+q}(A^\bullet, d)$$

Appliquons cela pour le complexe $(A^\bullet(X), d, F^\bullet)$, avec la filtration venant du complexe double $A^{\bullet,\bullet}$.

On a $E_1^{p,q} = H^{p+q}(\operatorname{Gr}^p_{F^\bullet} A^\bullet(X), d) = H^{p+q}(A^{p,\bullet-p}(X), d)$. De plus, la différentielle induite par d est simplement $\bar\partial$. Donc :

$$\begin{aligned} E_1^{p,q} &= H^{p+q}(A^{p,\bullet}(X)[p], \bar\partial) \\ &= H^q(X, A^{p,\bullet}(X)) \\ &= H^q(X, \Omega^p) \end{aligned}$$

La différentielle $d_1 : E_1^{p,q} = H^q(X, \Omega^p) \to E_1^{p+1,q} = H^q(X, \Omega^{p+1})$ est induite par $\partial : \Omega^p \to \Omega^{p+1}$. En effet, d'après le théorème, d_1 est la flèche de connexion associée à la suite exacte courte

$$0 \to \operatorname{Gr}^{p+1}_{F^\bullet} A^\bullet \to F^p A^\bullet/F^{p+2}A^\bullet \to \operatorname{Gr}^p_{F^\bullet} A^\bullet \to 0.$$

Pour $\bullet = p+q, p+q+1$, il vient deux suites exactes courtes :

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & A^{p+1,q-1} \arrow[r] \arrow[d, "\bar\partial"] & A^{p+1,q-1} \oplus A^{p,q} \arrow[r] \arrow[d, "\bar\partial"] & A^{p,q} \arrow[r] \arrow[d, "\bar\partial"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & A^{p+1,q} \arrow[r] & A^{p+1,q} \oplus A^{p,q+1} \arrow[r] & A^{p,q+1} \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

Ici, $\tilde{\partial}$ est induit par d et vaut donc $\bar{\partial}$ aux extrémités et $\bar{\partial} \oplus d$ au milieu. Pour calculer la flèche de connexion, on considère α une forme $\tilde{\partial}$-fermée dans $A^{p,q}$, i. e. $\bar{\partial}\alpha = 0$. Elle vient de $(0, \alpha) \in A^{p+1,q-1} \oplus A^{p,q}$, qui s'envoie sur $(\partial\alpha, 0)$ dans $A^{p+1,q} \oplus A^{p,q+1}$, ce dernier venant de $\partial\alpha \in A^{p+1,q}$.

Enfin, on a $E_\infty^{p,q} = \mathrm{Gr}^p_{F^\bullet} H^{p+q}(A^\bullet(X), d) = H^{p,q}(X)$.

Si X est Kähler compacte,

$$\begin{aligned} H^{p,q}(X) &\cong \mathcal{H}_d^{p,q}(X) \text{ par Hodge} \\ &\cong \mathcal{H}_{\bar{\partial}}^{p,q}(X) \text{ par les identités de Kähler} \\ &\cong H^q(X, \Omega^p) \text{ par Hodge.} \end{aligned}$$

En résumé,

Théorème 1.11. *Si X est une variété kählerienne compacte, la suite spectrale de Hodge vers de Rham dégénère en E_1.*

Remarque 1.12.

- Cette dégénérescence n'est pas équivalente à la décomposition de Hodge : elle donne $H^i(X, \mathbb{C}) = \oplus_{p+q=i} H^q(X, \Omega^p)$ mais pas $h^{p,q} = h^{q,p}$.
- Si X est projective lisse, Deligne et Illusie ont montré la dégénérescence de façon purement algébrique.

On prouve maintenant le théorème de Leray :

Démonstration. Posons $Z_r^{p,q} = F^p A^{p+q} \cap d^{-1}(F^{p+r} A^{p+q+1})$. On remarque qu'on a :

$$\begin{aligned} Z_{r-1}^{p+1,q-1} &= F^{p+1} A^{p+q} \cap d^{-1}(F^{p+r} A^{p+q+1}) \subset Z_r^{p,q} \text{ et} \\ dZ_{r-1}^{p-r+1,q+r-2} &\subset F^p A^{p+q} \cap dF^{p-r+1,q+r-2} \subset Z_r^{p,q}. \end{aligned}$$

Ainsi, on a $B_r^{p,q} := Z_{r-1}^{p+1,q-1} + dZ_{r-1}^{p-r+1,q+r-2} \subset Z_r^{p,q}$ et on pose $E_r^{p,q} = Z_r^{p,q}/B_r^{p,q}$; attention les notations ne correspondent pas à celle de 1.

Comme $d : Z_r^{p,q} \to Z_r^{p+r,q-r+1}$ et $d : B_r^{p,q} \to B_r^{p+r,q-r+1}$, d induit une différentielle d_r sur $E_r^{p,q}$. Montrons les différents résultats de l'énoncé.

- $E_{r+1}^{p,q}$ s'identifie à $H^{p,q}(E_r^{\bullet,\bullet}, d_r)$. Si $z \in Z_{r+1}^{p,q}$, $dz \in Z_{r-1}^{p+r+1,q-r} \subset B_r^{p+r,q-r+1}$. Donc la classe $\bar{z}$ de z dans $E_r^{p,q}$ vérifie $d_r\bar{z} = 0$. On a donc une flèche naturelle

$$Z_{r+1}^{p,q} \to \mathrm{Ker}(d_r : E_r^{p,q} \to E_r^{p+r,q-r+1}). \tag{2}$$

  Un élément z de $B_{r+1}^{p,q}$ s'écrit $z_1 + dz_2$ avec $z_1 \in Z_r^{p+1,q-1}$ et $z_2 \in Z_r^{p-r,q+r-1}$. Comme $Z_r^{p+1,q-1} \subset Z_{r-1}^{p+1,q-1} \subset B_r^{p,q}$, $\bar{z_1}$ est nul dans $E_r^{p,q}$ et donc $\bar{z} = \overline{dz_2}$. Comme $z_2 \in Z_r$, on a par définition de d_r, $\overline{dz_2} = d_r(\bar{z_2})$ et donc la flèche 2 induit une flèche

$$B_{r+1}^{p,q} \to \mathrm{Im}(d_r : E_r^{p-r,q+r-1} \to E_r^{p,q})$$

  d'où une flèche

$$E_{r+1}^{p,q} \to \frac{\mathrm{Ker}(d_r : E_r^{p,q} \to E_r^{p+r,q-r+1})}{\mathrm{Im}(d_r : E_r^{p-r,q+r-1} \to E_r^{p,q})}.$$

  Montrons la surjectivité. Soit $z \in Z_r^{p,q}$ tel que $\bar{z} \in \mathrm{Ker}\, d_r$. Par définition, $dz \in B_r^{p+r,q-r+1} = Z_{r-1}^{p+r+1,q-r} + dZ_{r-1}^{p+1,q-1}$ et il existe $w \in Z_{r-1}^{p+1,q-1}$ tel que $d(z-w) \in Z_{r-1}^{p+r+1,q-r}$. Mais alors $d(z-w) \in F^{p+r+1}A^{p+q+1}$ et donc $z - w \in Z_{r+1}^{p,q}$. Comme $w \in Z_{r-1}^{p+1,q-1} \subset B_r^{p,q}$, $\bar{w} = 0$ dans $E_r^{p,q}$. On a donc $\overline{z-w} = \bar{z}$, ce qui prouve la surjectivité.
  Montrons l'injectivité. Soit $z \in Z_{r+1}^{p,q}$ tel que $\bar{z} = d_r(\bar{\beta})$ avec $\beta \in Z_r^{p-r,q+r-1}$. Alors $z - d\beta \in B_r^{p,q}$ et il s'agit de montrer que $z \in B_{r+1}^{p,q}$. On a $B_{r+1}^{p,q} = Z_r^{p+1,q-1} + dZ_r^{p-r,q+r-1}$ donc $d\beta \in B_{r+1}^{p,q}$. Montrons finalement que $z - d\beta \in Z_{r+1}^{p,q} \cap B_r^{p,q}$ est dans $B_{r+1}^{p,q}$. Cet élément s'écrit

$$z - d\beta = \gamma + d\epsilon, \gamma \in Z_{r-1}^{p+1,q-1}, \epsilon \in Z_{r-1}^{p-r+1,q+r-2}.$$

  Comme $Z_{r-1}^{p-r+1,q+r-2} \subset Z_r^{p-r,q+r-1}$, on a $d\epsilon \in dZ_r^{p-r,q+r-1} \subset B_{r+1}^{p,q}$ et il reste à montrer que $\gamma \in Z_{r-1}^{p+1,q-1} \cap Z_{r+1}^{p,q}$ est dans $B_{r+1}^{p,q}$. Mais on a $Z_{r-1}^{p+1,q-1} \cap Z_{r+1}^{p,q} = Z_r^{p+1,q-1} \subset B_{r+1}^{p,q}$, d'où l'injectivité.

– Montrons la convergence de la suite spectrale. Fixons $n = p + q$. Pour k grand supérieur à n, $F^k A^n = F^k A^{n-1} = F^k A^{n+1} = 0$. Alors on a $Z_{k+1}^{p,q} = F^p A^{p+q} \cap d^{-1}(F^{p+k+1} A^{p+q+1}) = \operatorname{Ker}(d : F^p A^n \to F^p A^{n+1})$, $Z_k^{p+1,q-1} = \operatorname{Ker}(d : F^{p+1} A^n \to F^{p+1} A^{n+1})$ et $dZ_k^{p-k,q+k-1} = F^p A^n \cap \operatorname{Im} d$. Ces égalités se peuvent se réécrire :

$$E_{k+1}^{p,q} = \frac{\operatorname{Im} H^n(F^p A^\bullet, d) \to H^n(A^\bullet, d)}{\operatorname{Im} H^n(F^{p+1} A^\bullet, d) \to H^n(A^\bullet, d)} = \operatorname{Gr}_{F^\bullet}^p H^n(A^\bullet, d).$$

– Montrons les affirmations sur $E_0^{p,q}$ et $E_1^{p,q}$. On a $Z_0^{p,q} = F^p A^{p+q}$ et $B_0^{p,q} = F^{p+1} A^{p+q}$ et d_0 est par définition induite de d. L'objet $E_1^{p,q}$ s'identifie à $H^{p,q}(E_0^{\bullet,\bullet}, d) = H^{p+q}(\operatorname{Gr}_{F^\bullet}^p A^\bullet, d)$ et il reste à calculer d_1.
Si $\bar{z} \in E_1^{p,q}$, $d_1(\bar{z}) = dz$ modulo $B_1^{p+1,q}$. Mais c'est également de cette façon que l'on construit la flèche de connexion, d'où le résultat.

□

Références

[1] Voisin C., Théorie de Hodge et géométrie algébrique complexe, SMF