Table des matières

1 Cours 8 - 13/10 **1**
1.1 Connexions sur les fibrés holomorphes hermitiens 1
1.2 Courbure des connexions 2
1.3 Théorème de plongement de Kodaira 3
1.4 Théorème de plongement de Kodaira - deuxième version 4
1.5 Théorème d'annulation de Kodaira 4
1.6 Éclatements 5

1 Cours 8 - 13/10

Le but de ce cours et du suivant est la démonstration du théorème de plongement de Kodaira. Pour la preuve, on se ramène à l'équivalence positif/ample pour les fibrés en droites holomorphes hermitiens.

Nous rappelons d'abord certaines propriétés des connexions sur les fibrés holomorphes hermitiens. Dans le cas d'un fibré en droite, la classe de la courbure de la connexion donne une forme dans $H^2(M,\mathbb{Z}) \cap H^{1,1}(M,\mathbb{R})$, qui peut permettre de construire des métriques kählériennes sur M. Le théorème de plongement de Kodaira montre que les variétés kählériennes compactes pour lesquelles on dispose d'une telle construction sont en fait projectives.

1.1 Connexions sur les fibrés holomorphes hermitiens

Le cas hermitien Soit (E,h) un fibré hermitien sur une variété lisse M.

Définition 1.1. Une connexion $\nabla : A^0(E) \to A^1(E)$ est *hermitienne* si pour toutes sections $s_1, s_2 \in A^0(E)$,

$$dh(s_1,s_2) = h(\nabla s_1, s_2) + h(s_1, \nabla s_2).$$

L'ensemble des connexions hermitiennes sur E est un espace affine sur le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $A^1(M, \mathrm{End}(E,h))$.

Le cas holomorphe Soit E un fibré holomorphe sur une variété complexe M.

Définition 1.2. Une connexion $\nabla : A^0(E) \to A^1(E)$ est *compatible à la structure holomorphe* si $\nabla^{0,1} = \bar\partial_E$.

L'ensemble des connexions compatibles à la structure holomorphe sur E est un espace affine sur le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $A^{1,0}(M, \mathrm{End}(E))$.

Remarque 1.3. Attention, le terme de *connexion holomorphe* désigne une notion différente.

Le cas holomorphe hermitien Soit (E,h) un fibré holomorphe hermitien sur une variété complexe M.

Proposition 1.4. *Il existe une unique connexion ∇ sur E qui soit hermitienne et compatible à la structure holomorphe. On l'appelle la* connexion de Chern.

Démonstration. Fixons une trivialisation $E_{|U} \cong U \times \mathbb{C}^n$ donnée par des sections e_i. La connexion ∇ est donnée par $\nabla = d + A$, où A est une matrice $n \times n$ à valeurs dans $A^1(U)$ et la métrique est donnée par $H = (h(e_i,e_j))_{1 \le i,j \le n}$. La connexion est alors hermitienne si et seulement si

$$dH = {}^tAH + H\bar{A}$$

et elle est holomorphe si et seulement si A est de type $(1,0)$. En prenant la partie $(0,1)$ de l'équation ci-dessus, on obtient donc

$$\bar\partial H = H\bar{A}.$$

Comme H est inversible, cela définit A et prouve l'unicité.

Pour l'existence locale, on part simplement de l'expression $A = \bar{H}^{-1}\partial\bar{H}$ et on remonte les calculs. Ces expressions se recollent bien par unicité. $\square$

Exemple 1.5. Soit (L, h) un fibré en droite holomorphe hermitien sur M. Dans une trivialisation $L_{|U} \cong U \times \mathbb{C}$ la métrique h est donnée par une fonction H réelle et strictement positive. La connexion de Chern s'écrit ainsi $\nabla = d + \partial \log H$ dans cette trivialisation.

1.2 Courbure des connexions

Une connexion $\nabla : A^0(E) \to A^1(E)$ peut être étendue de $A^k(E)$ dans $A^{k+1}(E)$ en posant

$$\nabla(\alpha \otimes s) = d\alpha \otimes s + (-1)^k \alpha \otimes \nabla s,$$

pour toute k-forme α sur M et toute section s de E. La *courbure* de la connexion ∇ est alors définie par $\Omega = \nabla^2 : A^0(E) \to A^2(E)$. On vérifie immédiatement que Ω est $A^0(E)$-linéaire et définit donc une 2-forme à valeurs dans $\mathrm{End}(E)$: $\Omega \in A^2(\mathrm{End}(E))$.

Exercice 1.6.
- Si ∇ est hermitienne, $\Omega \in A^2(\mathrm{End}(E, h))$.
- Si ∇ est compatible à la structure holomorphe, $\Omega \in (A^{2,0} \oplus A^{1,1})(M, \mathrm{End}(E))$.
- Si ∇ est la connexion de Chern d'un fibré holomorphe hermitien, $\Omega \in A^{1,1}_{\mathbb{R}}(M, \mathrm{End}(E, h))$.

Remarque 1.7. Localement, la courbure de la connexion de Chern s'écrit simplement $\bar{\partial} A$ si la connexion s'écrit $\nabla = d + A$.

Exemple 1.8. Soit (L, h) un fibré holomorphe hermitien sur M. Alors la connexion de la courbure de Chern s'écrit localement $\Omega = -\partial\bar{\partial} \log H$ où H est la fonction réelle positive définissant la métrique dans une trivialisation. On remarque que Ω est imaginaire pur, ce qui était attendu puisqu'elle s'écrit comme un produit tensoriel $\alpha \otimes \lambda$ où α est une forme réelle de type $(1, 1)$ et λ est un nombre imaginaire pur.

Exemple 1.9. L'exemple du fibré en droites $\mathcal{O}(1)$ sur $\mathbb{C}P^n$ est fondamental. Notons $\mathcal{O}(-1)$ le fibré en droites tautologique sur $\mathbb{C}P^n$: la fibre au-dessus d'un point l de $\mathbb{C}P^n$ est l'ensemble des points de l dans $\mathbb{C}^{n+1}$, l étant vue comme une droite de $\mathbb{C}^{n+1}$. On note $\mathcal{O}(1)$ son dual.

L'inclusion $\mathcal{O}(-1) \subset \mathbb{C}P^n \times \mathbb{C}^{n+1}$ induit une métrique sur $\mathcal{O}(-1)$. En coordonnées, $\mathbb{C}P^n = \cup U_i$, où U_i est l'ensemble des points de $\mathbb{C}P^n$ dont la i-ème coordonnée est non nulle. Sur $U_i = \{w_1, \ldots, w_n\}$, on dispose de la section σ_i de $\mathcal{O}(-1)$:

$$\sigma_i(w_1, \ldots, w_n) = (w_1, \ldots, 1, w_i, \ldots, w_n).$$

La métrique h sur $\mathcal{O}(-1)$ s'écrit donc localement $H = h(\sigma_i) = 1 + \sum_k |w_k|^2$. On peut définir une métrique duale h^* sur $\mathcal{O}(1)$ en demandant $l(s) = h^*(l)h(s)$ si l est une section de $\mathcal{O}(1)$ et s une section de $\mathcal{O}(-1)$. Si $\sigma_i^* \in \mathcal{O}(1)$ est définie par $\sigma_i^*(\sigma_i) = 1$, on a donc $h^*(\sigma_i^*) = \frac{1}{h(\sigma_i)}$ et ainsi, dans la trivialisation de $\mathcal{O}(1)$ obtenue par σ_i^*, la métrique s'écrit $H^* = \frac{1}{1+\sum_k |w_k|^2}$.

Ainsi, la courbure de $\mathcal{O}(1)$ s'écrit $\partial\bar{\partial} \log(1 + \sum_k |w_k|^2)$ sur U_i.

Corollaire 1.10. *On a $\frac{i}{2\pi}\Omega_{\mathcal{O}(1)} = \omega_{FS}$, où ω_{FS} est la forme de Kähler obtenue sur $\mathbb{C}P^n$ par la métrique de Fubini-Study.*

On peut maintenant définir la notion de positivité pour un fibré en droites holomorphe.

Définition 1.11. Un fibré holomorphe hermitien (L, h) est *positif* si sa *classe de Chern* $c_1(L, h) := \frac{i}{2\pi}\Omega$ est définie positive. On rappelle qu'une $(1, 1)$-forme réelle α est dite définie positive si la forme hermitienne correspondant l'est, c'est-à-dire si, pour tout v dans TX, $-i\alpha(v, \bar{v}) > 0$.

Corollaire 1.12. *Le fibré en droite $\mathcal{O}(1)$ est positif sur $\mathbb{C}P^n$.*

Remarque 1.13. Plusieurs définitions de positivité sont possibles en rang supérieur, la plus courante étant la Griffiths-positivité. Un fibré holomorphe hermitien (E, h) est dit *Griffiths-positif* si $h(\Omega(s), s)(v, \bar{v}) > 0$, pour tous $s \in E, v \in TM$.

Lemme 1.14. *Soit L un fibré holomorphe sur M. Alors $c_1(L) \in H^2(M, \mathbb{Z}) \cap H^{1,1}(M, \mathbb{R})$.*

Remarque 1.15. Pour L un fibré complexe sur M, on définit $c_1(L)$ comme la classe en cohomologie de $\frac{i}{2\pi}\Omega$ avec Ω la courbure d'une connexion quelconque. Cette définition a un sens car, le rang de L étant 1, Ω s'exprime localement comme $\Omega = dA + A \wedge A = dA$ et donc Ω est fermée. De plus, la preuve montre que $c_1(L)$ ne dépend pas de la connexion choisie.

Démonstration. Il suffit de montrer que $c_1(L)$ s'obtient (au signe près) comme l'image de L par l'application $H^1(X, \mathcal{O}_X^*) \to H^2(X, \mathbb{Z})$ qui provient de la suite exponentielle (exacte) :

$$0 \to \mathbb{Z} \to \mathcal{O}_X \stackrel{\exp(2i\pi .)}{\to} \mathcal{O}_X^* \to 0.$$

Calculons d'abord $\delta(L) \in H^2(X, \mathbb{Z})$ en cohomologie de Cech. Sur un recouvrement ouvert (U_i), L est représenté par des fonctions de transition $g_{ij} \in \mathcal{O}^*_{(U_i \cap U_j)}$. Quitte à raffiner le recouvrement, g_{ij} s'écrit $\exp(2i\pi f_{ij})$ avec $f_{ij} \in \mathcal{O}^*_{(U_i \cap U_j)}$. Le cocycle représentant $\delta(L)$ dans $H^2(X, \mathbb{Z})$ est par définition $(a_{ijk}) = f_{ij} + f_{jk} + f_{ki}$.

Montrons maintenant que $c_1(L)$ est représenté par $-(a_{ijk})$ dans $H^2(X, \mathbb{Z})$. Notons σ_i une trivialisation de L sur U_i, de sorte que sur U_{ij}, $\sigma_i = g_{ij}\sigma_j$. Sur U_i, $c_1(L, h)$ vaut $\omega_i := \frac{1}{2i\pi}\partial\bar{\partial}\log(h(\sigma_i))$. Donc $\omega_i = d\beta_i$ avec $\beta_i = \frac{1}{2i\pi}\bar{\partial}\log(h(\sigma_i))$. De plus,

$$\begin{aligned} \beta_i - \beta_j &= \frac{1}{2i\pi}\bar{\partial}(\log(h(\sigma_i) - \log(h(\sigma_j)) \\ &= \frac{1}{2i\pi}\bar{\partial}\log(|g_{ij}|^2) \\ &= \bar{\partial}(f_{ij} + \overline{f_{ij}}) \\ &= d\overline{f_{ij}}. \end{aligned}$$

On note encore $(a_{ijk}) = f_{ij} + f_{jk} + f_{ki}$ et il s'agit de montrer que le cheminement ci-dessus montre que le représentant de $c_1(L)$ dans $H^2(X, \mathbb{C})$ est dans $H^2(X, \mathbb{Z})$ et est égal à (a_{ijk}). Considérons pour cela le complexe total (K, D) associé au double complexe $K^{p,q} = \check{C}^q(A^p_{\mathbb{C}})$ de différentielles $D_1 = d$ et $D_2 = \delta$. Dans ce complexe total, $c_1(L)$ est représenté par (ω_i) dans $\check{C}^0(A^2_{\mathbb{C}})$. Comme $D((\beta_i)_i) = d((\beta_i)_i) - \delta((\beta_i)_i) = (\omega_i)_i - (\beta_i - \beta_j)_{ij}$, $c_1(L)$ est aussi représenté par $(\beta_i - \beta_j)_{ij}$ dans $\check{C}^1(A^1_{\mathbb{C}})$. Mais $D((\overline{f_{ij}})_{ij}) = (\beta_i - \beta_j)_{ij} + (f_{ij} + f_{jk} + f_{ki})_{ijk}$. Donc $c_1(L)$ est aussi représenté par $-(a_{ijk})$ dans $H^2(X, \mathbb{Z})$, d'où le résultat. □

Corollaire 1.16. *Considérons une variété projective lisse X dans $\mathbb{C}P^n$. On peut restreindre le fibré $\mathcal{O}(1)$ sur X et on a donc $c_1(\mathcal{O}(1)) \in H^2(X, \mathbb{Z}) \cap H^{1,1}(X, \mathbb{R})$. Par le calcul de la courbure de $\mathcal{O}(1)$ sur $\mathbb{C}P^n$, on en déduit que toute variété projective lisse admet une forme de Kähler entière.*

1.3 Théorème de plongement de Kodaira

Le théorème de Kodaira est la réciproque du corollaire précédent. On rappelle qu'une forme de Kähler est une forme réelle de type $(1,1)$, définie positive et d-fermée et qu'une classe de Kähler est la classe en cohomologie d'une forme de Kähler.

Théorème 1.17 (Kodaira, 1954)**.** *Une variété kählérienne compacte X est projective si et seulement si elle admet une classe de Kähler entière.*

Remarque 1.18. Ainsi on détecte les variétés projectives parmi les variétés kählériennes en regardant le positionnement du cône de Kähler par rapport à la cohomologie rationnelle. Noter qu'on ne sait pas si, pour une variétés complexe, le fait d'être kählérienne est une question purement topologique ou non.

Exemple 1.19. Si X est Kähler compacte et si $H^{2,0}(X) = 0$ alors X est projective. En effet, le cône de Kähler de X est ouvert dans $H^{1,1}_{\mathbb{R}}(X)$ ici égal à $H^2(X, \mathbb{R})$; il contient donc nécessairement une classe rationnelle, donc une classe entière en normalisant.

Exemple 1.20. On a montré une équivalence de catégorie entre les $\mathbb{Z}$-structures de Hodge pures de poids 1, effectives et sans torsion et les tores complexes. Montrons que les $\mathbb{Z}$-structures admettant de plus une polarisation correspondent aux variétés abéliennes.

Soit $V_{\mathbb{Z}}$, $V_{\mathbb{C}} = V^{1,0} \oplus \overline{V^{1,0}}$ une $\mathbb{Z}$-structure de Hodge pure de poids 1, effective, sans torsion et soit $q : \Lambda^2 V_{\mathbb{Z}} \to \mathbb{Z}$ une polarisation. Le tore associée est $T = V_{\mathbb{C}}/(V^{1,0} + V_{\mathbb{Z}})$. La polarisation q vit dans $\Lambda^2 V^*_{\mathbb{Z}} = \Lambda^2 H^1(T, \mathbb{Z}) = H^2(T, \mathbb{Z})$. On considère une forme $\Omega \in H^2(T, \mathbb{R})$ représentant q et il suffit de montrer que Ω est une forme de Kähler.

Lemme 1.21. *Ω est une forme de Kähler.*

Démonstration.
- Ω est de type $(1,1)$ si et seulement si sa forme complexifiée $\Omega_{\mathbb{C}}$ s'annule sur $\Lambda^2 T_T^{1,0} = \Lambda^2 V^{0,1}$, i. e. si et seulement $q_{\mathbb{C}} : \Lambda^2 V_{\mathbb{C}} \to \mathbb{C}$ s'annule sur $\Lambda^2 V^{0,1}$. Mais comme q est une polarisation, la décomposition $V_{\mathbb{C}} = V^{1,0} \oplus V^{0,1}$ est orthogonale pour $H(\alpha, \beta) = iq_{\mathbb{C}}(\alpha, \bar{\beta})$, ce qui montre que $V^{0,1}$ est bien $q_{\mathbb{C}}$-isotrope.
- La positivité de Ω se déduit de façon similaire de la positivité de H.

□

1.4 Théorème de plongement de Kodaira - deuxième version

On se ramène d'abord à un problème sur les fibrés en droites.

Lemme 1.22. *Soit $[\omega]$ une classe de Kähler entière. Alors il existe (L,h) un fibré holomorphe hermitien sur M tel que $c_1(L,h) = \omega$.*

Démonstration. On a vu que $c_1(L)$ pouvait être obtenu *via* la suite exacte

$$H^1(X, \mathcal{O}_X^*) \xrightarrow{c_1} H^2(X, \mathbb{Z}) \to H^2(X, \mathcal{O}_X) = H^{0,2}(X).$$

On peut vérifier que la flèche de droite est égale à la composition de $H^2(X,\mathbb{Z}) \to H^2(X,\mathbb{C})$ et de la projection $H^2(X,\mathbb{C}) \to H^{0,2}(X)$ liée à la décomposition de Hodge. Donc, l'image de c_1 est $H^2(X,\mathbb{Z}) \cap H^{1,1}(X,\mathbb{R})$ et il existe L un fibré en droites dans $H^1(X, \mathcal{O}_X^*)$ tel que $c_1(L) = [\omega]$.

Montrons maintenant une égalité au niveau des formes. Munissons L d'une métrique hermitienne H quelconque. Comme $[\omega - c_1(L,h)] = 0$, $\omega - c_1(L,h)$ est ∂ et $\bar{\partial}$-fermée et d-exacte donc est $\partial\bar{\partial}$-fermée par le lemme du $\partial\bar{\partial}$. Donc $\omega - c_1(L,h) = \frac{1}{2\pi i}\partial\bar{\partial}\phi$, avec ϕ dans $A^0(M,\mathbb{R})$. En posant $h = H.e^{\phi}$, il vient

$$c_1(L,h) = c_1(L,H) + \frac{1}{2\pi i}\partial\bar{\partial}\phi = \omega.$$

□

On énonce alors une deuxième version du théorème de Kodaira.

Théorème 1.23 (Kodaira)**.** *Soit L un fibré positif en droites sur X. Alors, pour tout N suffisamment grand, il existe un plongement ϕ de X dans $\mathbb{C}P^r$ tel que*

$$L^{\otimes N} = \phi^* \mathcal{O}_{\mathbb{C}P^r}(1).$$

On dit que L est ample *(et que $L^{\otimes N}$ est* très ample*).*

Pour démontrer cette version du théorème, deux ingrédients seront utilisés : d'une part un théorème d'annulation cohomologique, et d'autre part certains résultats sur les éclatements.

1.5 Théorème d'annulation de Kodaira

On dispose du théorème d'annulation suivant.

Théorème 1.24. *Soit E un fibré en droites positif sur X de dimension complexe n. Alors $H^q(X, \Omega^p \otimes E) = 0$ pour $p + q > n$.*

La démonstration utilise la théorie de Hodge. Rappelons les identités

$$[\Lambda, L] = (n - (p+q)) \text{ Id sur } A^{p,q}(X),$$
$$[\Lambda, \bar{\partial}] = -i\partial^*.$$

La deuxième identité est valable en général sur un fibré holomorphe hermitien quelconque, avec une preuve similaire que l'on omet.

Lemme 1.25. *Soit (E,h) un fibré holomorphe hermitien sur X et soit ∇ sa connexion de Chern. Alors*

$$[\Lambda, \bar{\partial}_E] = -i(\nabla^{1,0})^*.$$

Lemme 1.26. *Soit (E,h) un fibré holomorphe hermitien et soit $\alpha \in \mathcal{H}^{p,q}(X,E)$; on a :*
- $\frac{i}{2\pi}(\Omega\Lambda\alpha,\alpha) \leq 0$,
- $\frac{i}{2\pi}(\Lambda\Omega\alpha,\alpha) \geq 0$.

Démonstration. On a $\Omega = \nabla^2 = \nabla^{1,0}\bar{\partial}_E + \bar{\partial}_E\nabla^{1,0}$. Alors,

$$\begin{aligned}(i\Omega\Lambda\alpha,\alpha) &= (i\nabla^{1,0}\bar{\partial}_E\Lambda\alpha,\alpha) + (i\bar{\partial}_E\nabla^{1,0}\Lambda\alpha,\alpha)\\ &= i(\bar{\partial}_E\Lambda\alpha,(\nabla^{1,0})^*\alpha) + i(\nabla^{1,0}\Lambda\alpha,\bar{\partial}_E^*\alpha)\\ &= (\bar{\partial}_E\Lambda\alpha,[\Lambda,\bar{\partial}_E]\alpha) + 0 \text{ car } \alpha \text{ est harmonique}\\ &= (\bar{\partial}_E\Lambda\alpha,-\bar{\partial}_E\Lambda\alpha) \text{ car } \alpha \text{ est harmonique}\\ &\leq 0\end{aligned}$$

On montre de même l'autre inégalité. □

Montrons maintenant le théorème d'annulation.

Démonstration. Montrons que $H^q(X,\Omega^p\otimes E)=0$, E étant un fibré en droite positif. Soit $\frac{i}{2\pi}\Omega$ une forme de Kähler correspondant à une métrique h sur E telle que (E,h) positif. Alors l'opérateur L est le produit extérieur par $\frac{i}{2\pi}\Omega$. Par le lemme précédent, on a pour $\alpha \in \mathcal{H}^{p,q}(X,E) \cong H^q(X,\Omega^p\otimes E)$:

$$\begin{aligned}0 &\leq (\frac{i}{2\pi}[\Lambda,\Omega]\alpha,\alpha)\\ &= ([\Lambda,L]\alpha,\alpha)\\ &= (n-(p+q))||\alpha||^2\end{aligned}$$

Donc si $n > p+q$, $H^q(X,\Omega^p\otimes E)=0$. □

1.6 Éclatements

Nous allons utiliser la théorie des éclatements pour ramener un problème sur les points en un problème sur les diviseurs, passant donc d'un problème en codimension maximale à un problème en codimension minimale. Ce sera l'occasion de donner quelques résultat utiles sur la structure des éclatements.

Soit $Y \subset X$ deux variétés complexes lisses, Y étant de codimension k de X. Localement, Y est défini par des équations f_i, pour i allant de 1 à k, les df_i étant linéairement indépendantes le long de Y. Les f_i ne sont pas uniques mais on comprend bien la situation.

Lemme 1.27. *Soit $g_1,\dots,g_k$ un autre système d'équations locales (avec différentielles linéairement indépendantes) pour Y. Alors, sur l'intersection des domaines de définition des f_i et des g_j, il existe $(M_{ij})_{i,j\leq k}$ matrice inversible de fonctions holomorphes telle que $g_j = \sum_i M_{ij}f_i$. De plus, la restriction $M_{|Y}$ est uniquement déterminée par les f_i et les g_j.*

Démonstration. On peut supposer que les $f_i = z_i$ sont dans un système de coordonnées locales $z_1,\dots,z_n$. Comme g_j s'annule sur $\{z \,|\, z_1=\dots=z_k=0\}$, on a $g_j = \sum_{i\leq k} M_{ij}z_i$. Alors, sur Y, $dg_j = \sum_{i\leq k} M_{ij}df_i$. Comme les df_i sont linéairement indépendantes le long de Y, la matrice M_{ij} est uniquement déterminée. □

On définit d'abord localement les éclatements. Sur $U \subset X$ ouvert où $Y\cap U$ est défini par des équations f_i, on pose

$$\tilde{U}_Y = \{(Z,z) \in \mathbb{C}P^{k-1}\times U \,|\, Z_if_j(z) = Z_jf_i(z), 1\leq i,j\leq k\}.$$

C'est une variété complexe lisse et la projection $p_2 : \tilde{U}_Y \to U$ est un isomorphisme au-dessus de $U - Y\cap U$, *via* la section $z \mapsto ([f_1(z):\dots:f_k(z)],z)$ mais la fibre au-dessus de chaque point de Y est $\mathbb{C}P^{k-1}$.

On peut maintenant définir l'éclatement global de Y en recollant les $\tilde{U}_Y$.

Lemme 1.28. *Soient U, V deux ouverts de X avec des équations locales f_i^U et f_j^V (avec différentielles linéairement indépendantes) pour Y respectivement, sur U et V. Alors on a un isomorphisme ϕ_{UV} faisant commuter le diagramme*

$$\begin{tikzcd} \tilde{U}_{Y|U\cap V} \arrow[r, "p_{2,U|U\cap V}"] \arrow[d, "\phi_{UV}"] & U\cap V \\ \tilde{V}_{Y|U\cap V} \arrow[ur, "p_{2,V|U\cap V}"'] & \end{tikzcd}$$

Démonstration. Il suffit de construire ϕ_{UV} sur $p_{2,U}^{-1}(Y\cap U\cap V)$. On peut écrire $f_i^U = \sum_j M_{UV}^{ji} f_j^V$. Notons $P_{UV} = {}^t M_{UV}^{-1}$. On vérifie alors aisément que $\phi_{UV}(Z, z) = (P_{UV}(z).Z, z)$ avec Z dans $\mathbb{C}P^{k-1}$ et z dans $U \cap V$ convient. □

Remarque 1.29. Grâce au lemme, on peut ainsi globaliser l'éclatement pour définir $\tilde{X}_Y$. On a une application naturelle $\tau : \tilde{X}_Y \to X$ qui est un biholomorphisme en-dehors de $\tau^{-1}(Y)$. L'hypersurface $\tau^{-1}(Y)$ est le *diviseur exceptionnel* de l'éclatement. La preuve du lemme montre aussi que la restriction $\tau_{|\tau^{-1}(Y)} : \tau^{-1}(Y) \to Y$ s'identifie au fibré projectif normal $\mathbb{P}(N_{Y/X})$. En effet, la matrice M_{UV} intervenant dans la preuve correspond aux transitions du fibré $(N_{Y/X})^*$ car $df_i^U = \sum_j M_{UV}^{ji} df_j^V$ sur Y ; donc P_{UV} correspond au fibré $N_{Y/X}$ et l'application projective associée à $\mathbb{P}(N_{Y/X})$.

Proposition 1.30. *Soit X Kähler, Y une sous-variété compacte de X. Alors $\tilde{X}_Y$ est Kähler.*

Démonstration. On commence par démontrer un lemme qui utilise le même genre d'idées dans un cadre un peu plus simple.

Lemme 1.31. *Un fibré projectif $\pi : \mathbb{P}(E) \to X$ au-dessus d'une variété kählérienne compacte X est Kähler.*

Démonstration. On peut construire une version paramétrée du fibré tautologique sur un fibré projectif pour obtenir ainsi un fibré en droites $\mathcal{O}_{\mathbb{P}(E)}(1) \to \mathbb{P}(E)$. La restriction de ce fibré en droites à une fibre de π (isomorphe à un $\mathbb{C}P^r$) est alors $\mathcal{O}_{\mathbb{C}P^r}(1)$. Considérons une métrique hermitienne quelconque sur E. Elle induit une métrique sur π^*E et donc une métrique sur le fibré en droites $\mathcal{O}_{\mathbb{P}(E)}(1)$. La classe de Chern ω_E de cette métrique est positive sur les fibres de π mais pas sur tout $\mathbb{P}(E)$.

Comme X est Kähler, on dispose d'une forme ω_X dont la métrique hermitienne associée est positive. Son tiré en arrière $\pi^*\omega_X$ est positif dans les directions transverses aux fibres de π et nul le long des fibres. Pour λ suffisamment grand, la compacité de X entraîne alors que $\omega_E + \lambda\pi^*\omega_X$ est positif sur $\mathbb{P}(E)$. □

Pour démontrer que $\tilde{X}_Y$ est Kähler, l'idée est alors la suivante (cf. [1] pour les détails). Comme $\tau : \tilde{X}_Y \to X$ réalise un biholomorphisme en dehors du diviseur exceptionnel $\tau^{-1}(Y)$, on peut tirer en arrière la forme de Kähler sur X et la métrique correspondante sur $\tilde{X}_Y$ sera positive, excepté le long des fibres de τ incluses dans $\tau^{-1}(Y)$.

On a montré que $\tau : \tau^{-1}(Y) \to Y$ pouvait s'identifier au fibré $\mathbb{P}(N_{Y/X}) \to Y$. Considérons le fibré en droites $L := \mathcal{O}(-\tau^{-1}(Y))$ sur $\tilde{X}_Y$. On peut montrer que sa restriction à $\tau^{-1}(Y) \cong \mathbb{P}(N_{Y/X})$ est le fibré en droites $\mathbb{P}(N_{Y/X})(1)$ ([1], lemme 3.26). Comme dans la preuve du lemme ci-dessus, une forme hermitienne sur $N_{Y/X}$ permet de construire la classe de Chern de $\mathcal{O}_{\mathbb{P}(N_{Y/X})}(1)$, correspondant à une métrique h sur $\mathcal{O}_{\mathbb{P}N_{Y/X}}(1)$. Mais comme le fibré L est trivial en dehors de $\tau^{-1}(Y)$, cette métrique h se prolonge en une métrique h_L sur L, égale à h au-dessus de $\tau^{-1}(Y)$ et égale à la métrique plate en dehors d'un voisinage compact de $\tau^{-1}(Y)$ (on utilise une partition de l'unité). La classe de Chern ω_L correspondante est positive sur les fibres de τ au-dessus de Y et est nulle en dehors d'un voisinage compact de $\tau^{-1}(Y)$.

Comme dans la preuve du lemme, la forme $\lambda\tau^*\omega_X + \omega_L$ sera positive sur $\tilde{X}_Y$, pour λ suffisamment grand. □

On profite de ces résultats sur les éclatements pour expliciter la cohomologie d'un éclatement, bien que non nécessaire pour le théorème de Kodaira.

Soit $Z \subset X$ Kähler compacte. On pose $\tau : \tilde{X}_Z \to X$ la projection et $E = \tau^{-1}(Z) \cong \mathbb{P}(N_{Z/X})$ le diviseur exceptionnel. C'est un fibré projectif de rang $r-1$, avec r la codimension de Z. Notons enfin $j : E \to \tilde{X}_Z$ l'inclusion.

Théorème 1.32. *Soit $h = c_1(\mathcal{O}_E(1)) \in H^2(E, \mathbb{Z})$. On a l'isomorphisme de structures de Hodge*

$$H^k(X, \mathbb{Z}) \oplus \bigoplus_{i=0}^{r-2} H^{k-2i-2}(Z, \mathbb{Z})(-i-1) \overset{\tau^* + \sum_i j_* \circ h^i \circ \tau_{|E}^*}{\rightarrow} H^k(\tilde{X}_Z, \mathbb{Z}).$$

Démonstration. cf. [1], théorème 7.33. □

Références

[1] Voisin C., Théorie de Hodge et géométrie algébrique complexe, SMF