Table des matières

1 Cours 9 - 14/10

Dans ce cours, on finit la preuve du théorème de Kodaira et on débute la preuve d'un résultat de C. Voisin, affirmant qu'en dimension complexe supérieure ou égale à 4, il existe des variétés kähleriennes compactes n'ayant pas le type d'homotopie d'une variété projective.

1.1 Preuve du théorème de Kodaira

On rappelle l'énoncé de la deuxième version du théorème de Kodaira.

Théorème 1.1. *Soit X une variété kählerienne compacte et (L, h) un fibré en droites hermitien holomorphe sur X. Si L est positif, alors L est ample : pour N suffisamment grand, il existe un plongement $\phi : X \to \mathbb{C}P^r$ tel que $L^{\otimes N} = \phi^*(\mathcal{O}_{\mathbb{C}P^r}(1))$.*

Étant donné un fibré en droites L quelconque sur X, on dispose d'une construction tout à fait générale.

Définition 1.2. Un points $x \in X$ est un *point-base* de L si $s(x) = 0$ pour toute section $s \in H^0(X, L)$. On note $\mathrm{BS}(L) \subset X$ l'ensemble des points-bases de X.

Fixons une base $s_0, \dots, s_r$ de $H^0(X, L)$. On a une application holomorphe $\phi_L : X - \mathrm{BS}(L) \to \mathbb{C}P^r$ qui à x associe $[s_0(x) : \dots : s_r(x)]$ et, par définition, $\phi_L^*(\mathcal{O}_{\mathbb{C}P^r}(1)) = L_{|X-\mathrm{BS}(L)}$. Montrons que si (L, h) est positif, quitte à considérer $L^{\otimes N}$ pour N grand plutôt que L, on a :

- (1) $\mathrm{BS}(L) = \emptyset$,
- (2)ϕ_L est injective,
- (3)ϕ_L est une immersion.

Chacune de ces conditions se traduit dans le langage des faisceaux.

- (1) est équivalent à
$$\forall x \in X, H^0(X, L) \twoheadrightarrow L(x),$$
où $L(x)$ est le faisceau dont la fibre au-dessus de chaque point est nulle, sauf au-dessus de x où elle vaut L_x. En notant $\mathcal{I}_x$ l'idéal annulateur du point x, on a la suite exacte courte
$$0 \to L \otimes \mathcal{I}_x \to L \to L(x) \to 0$$
et une condition suffisante pour que la flèche $H^0(X, L) \to L(x)$ soit surjective est que $H^1(X, L \otimes \mathcal{I}_x) = 0$.
- (2) est équivalent à
$$\forall x_1 \neq x_2 \in X, \exists s \in H^0(X, L) : s(x_1) = 0 \text{ et } s(x_2) \neq 0.$$
Ceci est équivalent à ce que la flèche d'évaluation $H^0(X, L) \to L(x_1) \oplus L(x_2)$ soit surjective et, de nouveau, il suffit d'avoir la nullité de $H^1(X, L \otimes \mathcal{I}_{x_1,x_2})$.
- Pour (3), on veut montrer que $d\phi_{L,x} : T_xX \to T_{\phi(x)}\mathbb{C}P^r$ est une immersion. Supposant (1) et (2), on fixe s_0 section de L ne s'annulant pas en x ; alors $H^0(X, L) = \mathbb{C}s_0 \oplus H^0(X, L \otimes \mathcal{I}_x)$. En considérant une base $s_1, \dots, s_r$ de $H^0(X, L \otimes \mathcal{I}_x)$, ϕ_L s'écrit, au voisinage de x, $\phi_L : X \to \mathbb{C}^r, y \mapsto (s_1/s_0(y), \dots, s_r/s_0(y))$. Donc $d\phi_{L,x}$ est injective si et seulement si $d_x(s_1/s_0), \dots, d_x(s_r/s_0)$ engendrent T_x^*X.
On a une suite exacte
$$0 \to \mathcal{I}_x^2 \to \mathcal{I}_x \to T_x^*X \to 0,$$

où $T_x^* X$ désigne le faisceau dont la fibre au-dessis de chaque point est nulle, sauf au-dessus de x où elle vaut $T_x^* X$. En tensorisant par L (qui est localement libre, donc conserve les suites exactes), on a une suite exacte courte

$$0 \to L \otimes \mathcal{I}_x^2 \to L \otimes \mathcal{I}_x \to L(x) \otimes T_x^* X \to 0$$

qui induit une application $H^0(X, L \otimes \mathcal{I}_x) \to L(x) \otimes T_x^* X$ correspondant à $d\phi_{L,x}$ et il s'agit de montrer que cette application est surjective.

Moralité : (1), (2) et (3) seront démontrés si on a des annulations du type $H^1(X, F \otimes \mathcal{I}_x) = 0$ ou $H^1(X, F \otimes \mathcal{I}_x^2) = 0$ pour certains faisceaux F. La principale difficulté vient de la grande codimension de x dans X. C'est pourquoi on éclate x pour se ramener à un diviseur, l'idéal d'un diviseur étant simplement un fibré en droites, on pourra appliquer le théorème d'annulation de Kodaira.

Un lemme est nécessaire pour ce programme. Soient $x_1, \ldots, x_l$ des points de X et $\tilde{X}_{x_1,\ldots,x_l}$ l'éclatement de X en ces points. On a l'application $\sigma : \tilde{X}_{x_1,\ldots,x_l}$ et on note $E_j \cong \mathbb{C}P^{n-1}$ le diviseur exceptionnel au-dessus de x_j.

Lemme 1.3. *Si L est positif sur X, alors pour tout fibré en droites F sur X et pour tout l-uplet d'entiers strictement positifs $(n_1, \ldots, n_l)$ de X, le fibré $\sigma^*(L^k \otimes F) \otimes \mathcal{O}(-\sum n_i E_i)$ est positif sur $\tilde{X}_{x_1,\ldots,x_l}$ pour k suffisamment grand.*

Démonstration. On a vu précédemment que si $\tau : \tilde{X}_Y \to X$ est un éclatement, le fibré en droites $\mathcal{O}(-\tau^{-1}(Y))$ sur $\tilde{X}_Y$ se restreint en le fibré $\mathcal{O}_{\tau^{-1}(Y)}(1)$ sur $\tau^{-1}(Y)$. Dans le cas qui nous intéresse, cela implique que l'on peut construire une métrique h_E sur $\mathcal{O}(-\sum n_j E_j)$ telle que la forme de Chern ω_E associée soit égale à $n_j \omega_{FS,E_j}$ sur chaque E_j. Alors pour k suffisamment grand, $c_1(\sigma^*(L^k \otimes F), \sigma^* h_{L^k \otimes F}) + \omega_E$ est positive, où h est une métrique sur $L^k \otimes F$ construite à partir d'une métrique positive sur L et de n'importe quelle métrique sur F. □

Montrons maintenant (1). Soit $x \in X$, on note $\hat{X} = \tilde{X}_x$. On a un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} H^0(X, L^k) & \longrightarrow & L^k(x) \\ \downarrow & & \downarrow \\ H^0(\hat{X}, \sigma^*(L^k)) & \longrightarrow & \sigma^*(L^k)_{|E} = H^0(E, \mathcal{O}_E) \otimes L^k(x) \end{array}$$

La flèche du bas est la restriction à E, la flèche de droite est un isomorphisme et celle de gauche aussi. En effet, comme $\hat{X} \twoheadrightarrow X$, $H^0(X, L^k) \hookrightarrow H^0(\hat{X}, \sigma^*(L^k))$ et on a en fait un isomorphisme car

- Si $\dim_{\mathbb{C}} X = 1$, $\hat{X} = X$ et σ est l'identité.
- Si $\dim_{\mathbb{C}} X \geq 2$, une section $s \in H^0(\hat{X}, \sigma^*(L^k))$ se restreint à $\hat{X} - E \cong X\{x\}$ puis s'étend à X par le théorème de Hartogs ([1], page 34).

Il suffit donc de montrer la surjectivité de la flèche du bas, pour avoir la surjectivité de la flèche du haut. Mais comme précédemment, cela est impliqué par $H^1(\hat{X}, \sigma^* L^k \otimes \mathcal{O}(-E)) = 0$, car $\mathcal{O}(-E)$ s'identifie à l'idéal annulateur du diviseur E. On peut montrer que

Lemme 1.4. *$K_{\hat{X}} \cong \sigma^* K_X \otimes \mathcal{O}((n-1)E)$, où K_X et $K_{\hat{X}}$ désignent les fibrés canoniques sur X et $\hat{X}$.*

Donc, $\sigma^* L^k \otimes \mathcal{O}(-E) = K_{\hat{X}} \otimes L'$ avec $L' = \sigma^*(L^k \otimes K_X^{-1}) \otimes \mathcal{O}(-nE)$. Par le lemme 1.3, L' est positif pour k grand. Par le théorème d'annulation de Kodaira, on a donc $H^1(\hat{X}, K_{\hat{X}} \otimes L') = 0$. Donc la flèche du haut est surjective, i.e. x n'est pas un point-base de L^k pour k grand, dépendant a priori de x.

Mais la fait que cette flèche soit surjective est une condition ouverte sur x. Donc on a encore la surjectivité sur un voisinage ouvert de x et par compacité, pour k suffisamment grand, la flèche est surjective pour tout x.

La démonstration du point (2) est en tout point similaire, en remplaçant l'éclatement en x par un éclatement en deux points x_1, x_2.

Pour (3), la suite exacte courte

$$0 \to \mathcal{I}_x^2 \to \mathcal{I}_x \to T_x^* X \to 0$$

correspond à la suite exacte courte

$$0 \to \mathcal{O}(-E)^2 = \mathcal{O}(-2E) \to \mathcal{O}(-E) \to \mathcal{O}_E(-E) \to 0.$$

On a un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} H^0(X, L^k \otimes \mathcal{I}_x) & \longrightarrow & L^k(x) \otimes T_x^* X \\ \downarrow & & \downarrow \\ H^0(\hat{X}, \sigma^*(L^k) \otimes \mathcal{O}(-E)) & \longrightarrow & L^k(x) \otimes H^0(E, \mathcal{O}_E(-E)) = L^k(x) \otimes H^0(E, \mathcal{O}_E(1)) \end{array}$$

La flèche à gauche est un isomorphisme pour les raisons évoquées précédemment. La flèche de droite est surjective. En effet $E = \mathbb{P}(N_{\{x\}/X}) = \mathbb{P}(T_x X)$ et $\mathcal{O}_E(-E) = \mathcal{O}(1)$. L'application $T_x^* X \otimes \mathcal{O}_E \to \mathcal{O}_E(-E)$ induisant la flèche de droite n'est autre que $\mathcal{O}^{\oplus n} \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{n-1}}(1)$ qui est encore surjective sur les sections globales. C'est donc un isomorphisme pour des raisons de dimension.

Donc, de nouveau, la surjectivité de la flèche du haut est obtenue en montrant la surjectivité de la flèche du bas. Pour cela, il suffit de montrer que $H^1(\hat{X}, \sigma^* L^k \otimes \mathcal{O}(-2E)) = 0$ pour k grand et la preuve est similaire à celle faite pour (1).

1.2 Variétés kählériennes compactes et variétés projectives

Le théorème de plongement de Kodaira permet de montrer que certaines variétés kähleriennes compactes se déforment en une variété projective lisse. Une *famille de variétés complexes* indexée par B est la donnée d'une application holomorphe ϕ propre et submersive de X dans B. Les fibres $X_t = \phi^{-1}(t)$ sont des variétés complexes difféomorphes et peuvent être considérées comme des déformations d'une fibre $X_0 = \phi^{-1}(0)$ fixée. Si X_0 est Kähler, on montrera que les X_t le sont aussi, pour t proche de 0. Les $H^{p,q}(X_t)$ varient de façon $\mathcal{C}^\infty$ avec $t \in B$ dans $H^{p+q}(X, \mathbb{C})$

Notons $\mathcal{K}(X_t)$ le cône de Kähler de X_t (i.e. l'ensemble des classes dans $H^{1,1}(X_t, \mathbb{R})$ provenant d'une forme de Kähler). Alors on a $\cup_{t \in B} \mathcal{K}(X_t)$ est ouvert dans $\cup_{t \in B} H^{1,1}(X, \mathbb{R}) \subset H^2(X, \mathbb{R})$.

Si on a de la chance, $\cup_{t \in B} \mathcal{K}(X_t)$ contient un ouvert de $H^2(X, \mathbb{R})$, donc en particulier une classe rationnelle, impliquant la projectivité d'un X_t.

En utilisant la classification des surfaces complexes, Kodaira démontre ainsi :

Théorème 1.5. *Toute surface Kähler compacte admet une déformation abitrairement petite qui est projective.*

Un problème ouvert en dimension supérieure était de savoir si toute variété kählerienne compacte admettait le type d'homotopie d'une variété projective lisse. En dimension ≥ 4, c'est faux, par le résultat suivant de Voisin.

Théorème 1.6 (Voisin, 2004)**.** *En toute dimension ≥ 4, il existe une variété kählérienne compacte n'ayant pas le type d'homotopie (et en fait pas l'anneau de cohomologie entière) d'une variété projective lisse.*

L'objet algébrique pertinent ici est la notion d'algèbre de Hodge.

Définition 1.7. Soit $(A^\bullet, \cup)$ une $\mathbb{Z}$-algèbre commutative graduée, concentrée en degrés positifs, de dimension finie et telle que l'accouplement $A^k \otimes A^{d-k} \to A^d$ soit parfait (où d est le plus grand entier p tel que A^p soit non nul. Une *structure de Hodge* sur $A^\bullet$ est une structure de Hodge de poids k sur A^k pour tout k, vérifiant $A_{\mathbb{C}}^{p,q} \cup A_{\mathbb{C}}^{p',q'} \subset A_{\mathbb{C}}^{p+p',q+q'}$. On définit de même les $\mathbb{Q}$-algèbres de Hodge.

Remarque 1.8. La définition implique que d est pair : en effet, A^d est de rang 1 et porte une structure de Hodge de poids d.

Définition 1.9. Une *polarisation réelle* sur une telle algèbre de Hodge $A^\bullet$ est la donnée de $\alpha \in A_{\mathbb{R}}^{1,1}$ satisfaisant au théorème de Lefschetz difficile et aux relations bilinéaires de Hodge-Riemann (indice de Hodge + orthogonalité de $A^{p,q}$ avec $A^{p',q'}$ si $(p,q) \neq (q',p')$. C'est une *polarisation rationnelle* si $\alpha \in A_{\mathbb{Q}}^{1,1} := A_{\mathbb{Q}}^2 \cap A_{\mathbb{R}}^{1,1}$.

On peut reformuler le théorème de Voisin ainsi :

Théorème 1.10. *Il existe des variétés kähleriennes compactes dont la $\mathbb{Q}$-algèbre de cohomologie (qui est une algèbre de Hodge réellement polarisée) n'admet pas de polarisation rationnelle.*

Références

[1] Voisin C., Théorie de Hodge et géométrie algébrique complexe, SMF