

Homotopie, première partie

Bruno Klingler

Table des matières

Chapitre 1. Homotopie des espaces topologiques	5
1. La notion d'homotopie	5
2. CW-complexes	7
3. Cofibrations	10
4. Quelques catégories d'espaces	12
5. H-espace et H-coespace	16
6. Groupes d'homotopie	19
7. Fibrations, fibres et cofibres d'homotopie	22
8. Géométrie des fibrations	27
9. Propriétés homotopiques des CW-complexes	31
10. Excision homotopique	36
11. Abélianisation et théorème de Dold-Thom	40
12. Espaces d'Eilenberg-MacLane et espaces de Moore	45
13. Tours de Whitehead et de Postnikov	48
14. Homologie	50
15. Un exemple de théorie homologique réduite ordinaire	52
16. Cohomologie	58
17. Homologie et cohomologie à coefficients locaux	62
18. Théorie de l'obstruction	65
19. Suites spectrales	69
20. La suite spectrale de Leray-Serre-Atiyah-Hirzebruch	75
21. Applications de la suite spectrale de Leray-Serre	77
 Chapitre 2. Théorie élémentaire des catégories de modèles	 85
1. Catégories de modèles	85
2. Théorie homotopique des catégories de modèles	88
3. Foncteurs dérivés	96
4. Catégories de modèles et algèbre homologique	101
5. Catégories de modèle à engendrement cofibrants	106
 Chapitre 3. La catégorie des ensembles simpliciaux	 111
1. Objets simpliciaux	111
2. \mathcal{S} versus \mathbf{Top} , et réalisations en général	116
3. La catégorie \mathcal{S}_*	121
4. $\Delta^{\text{op}}\mathcal{A}$, \mathcal{A} abélienne	121

5. Homotopie simpliciale : quelques définitions et leurs problèmes	123
6. Fibrations de Kan	126
7. \mathcal{S} comme catégorie de modèle à engendrement cofibrant	131
8. Le remplacement fibrant Ex^∞ de Kan	132
9. Catégories de modèles simpliciales	133
Bibliographie	137

Homotopie des espaces topologiques

Jusqu'à la section 4, le terme *espace* désigne un espace topologique quelconque, une flèche $f : X \longrightarrow Y$ entre espaces désigne une application continue, et on note **Top** la catégorie des espaces avec applications continues. Nous reviendrons à la section 4 sur la définition d'une « bonne » catégorie d'espaces topologiques.

1. La notion d'homotopie

1.1. Rétraction par déformation et homotopies. La topologie considère comme équivalents deux espaces ayant la « même forme ». La notion la plus intuitive correspondante est sans doute celle de rétraction par déformation d'un espace sur un sous-espace :

DÉFINITION 1.1.1 (rétraction et rétraction par déformation). *Soit $A \subset X$ un sous-espace de X .*

- Une rétraction de X sur A est une application $r : X \longrightarrow A$ satisfaisant $r^2 = r$.
- Une application continue $r : X \longrightarrow A$ est une rétraction par déformation de X sur A s'il existe une application continue

$$F : X \times I \longrightarrow X$$

(I désignant l'intervalle $[0, 1]$) vérifiant

$$\begin{cases} F(\cdot, t)|_A &= \text{Id}_A \quad \forall t \in I \\ F(\cdot, 0) &= \text{Id}_X \\ F(\cdot, 1) &= r(\cdot) \end{cases} .$$

Définissons plus généralement la notion d'homotopie entre deux applications continues :

DÉFINITION 1.1.2 (homotopie). *Une homotopie entre deux applications continues $f_0, f_1 : X \longrightarrow Y$ est une application continue*

$$\begin{aligned} F : X \times I &\longrightarrow Y \\ (x, t) &\longrightarrow f_t(x) = F(t, x) \end{aligned}$$

reliant f_0 à f_1 . On dit que les applications f_0 et f_1 sont homotopes et on écrit $f_0 \sim f_1$.

On vérifie immédiatement que la relation d'homotopie est une relation d'équivalence sur **Top**(X, Y).

DÉFINITION 1.1.3. *On note $[X, Y]$ l'ensemble **Top**(X, Y)/ \sim des classes d'homotopie d'applications de X vers Y .*

DÉFINITION 1.1.4 (homotopie relative). *Soit $A \subset X$ et $f_0, f_1 : X \longrightarrow Y$ deux applications continues. Une homotopie $F : X \times I \longrightarrow Y$ reliant f_0 à f_1 telle que $F|_{A \times I}$ est indépendante de I est appelée une homotopie relativement à A . On note $f_0 \sim f_1 \text{ rel } A$.*

Avec cette terminologie, une rétraction par déformation $r : X \rightarrow A$ est une rétraction de X sur A homotope à Id_X relativement à A .

1.2. Equivalence d'homotopie. Remarquons que si $i : A \subset X$ et $r : X \rightarrow A$ est une rétraction par déformation, alors

$$\begin{cases} r \circ i = \text{Id}_A \\ i \circ r \sim \text{Id}_X \end{cases}.$$

La relation de rétraction par déformation n'est donc pas symétrique, on la symétrise en la

DÉFINITION 1.2.1 (équivalence d'homotopie). *Une application continue $f : X \rightarrow Y$ est une équivalence d'homotopie s'il existe $g : Y \rightarrow X$ avec*

$$\begin{cases} g \circ f \sim \text{Id}_X \\ f \circ g \sim \text{Id}_Y \end{cases}.$$

On dit aussi que X et Y ont même type d'homotopie et on note $X \simeq Y$.

On vérifie immédiatement que l'équivalence d'homotopie est une relation d'équivalence sur les espaces topologiques. Si toute rétraction par déformation est une équivalence d'homotopie, la réciproque est fautive (c.f. exemple 1.3.2). Cependant deux espaces X, Y sont homotopiquement équivalents si et seulement si ils sont contenus dans un même espace Z se rétractant par déformation sur chacun d'entre eux : on peut prendre pour Z le cylindre $M_f = (X \times I) \amalg Y / (x, 1) \sim f(x)$ (c.f. section 7.3) de n'importe quelle équivalence d'homotopie $f : X \simeq Y$.

DÉFINITION 1.2.2 (espace contractile). *Un espace X est dit contractile s'il a le type d'homotopie d'un point.*

DÉFINITION 1.2.3 (application homotopiquement triviale). *Une application $f : X \rightarrow Y$ est dite homotopiquement triviale si elle est homotope à une application constante.*

REMARQUE 1.2.4. Les conditions suivantes sont équivalentes :

- X est contractile.
- Id_X est homotopiquement triviale.
- toute application $f : X \rightarrow Y$ est homotopiquement triviale.
- toute application $f : Y \rightarrow X$ est homotopiquement triviale.

1.3. Illustration de la différence entre rétraction par déformation et équivalence d'homotopie.

LEMME 1.3.1. *Si X se rétracte par déformation sur un point $x \in X$, alors tout voisinage U de x admet un sous-voisinage $V \subset U$, $x \in V$ tel que l'inclusion $V \subset X$ est homotopiquement triviale.*

DÉMONSTRATION. Soit $F : X \times I \rightarrow X$ une homotopie reliant Id_X à l'application constante d'image x . Alors $F(x, t) = x$ pour tout $t \in I$, $F(X, 1) = \{x\}$ et $F(\cdot, 0) = \text{Id}_X$. Soit U voisinage de x donné. Posons $V = \{y \in X / \forall t \in I, F(y, t) \in U\} \subset U$. Alors V est un voisinage de x et l'inclusion $V \subset U$ est homotopiquement triviale. □

EXEMPLE 1.3.2. Cet exemple classique est emprunté à [5, ex.6 p.18]. Considérons un « peigne triangulaire » : le sous-espace de \mathbb{R}^2 (muni de la topologie induite)

$$X = ([0, 1] \times \{0\}) \cup_{r \in \mathbb{Q} \cap [0, 1]} (\{r\} \times [0, 1 - r]) ,$$

le lemme précédent montre que X se rétracte par déformation sur tout point de $[0, 1] \times \{0\}$ mais sur aucun autre. En « recollant » tête-bêche des copies de ce « peigne » X on obtient un espace Y qui est contractile mais ne se rétracte par déformation sur aucun point.

2. CW-complexes

Dans cette section, nous introduisons une catégorie d'espaces topologiques (appelés CW-complexes) riche et agréable à manipuler combinatoirement : ce sont intuitivement les espaces obtenus par recollement de boules le long de leur bord (sphères), ceci *inductivement par dimension croissante*. Le premier intérêt des CW-complexes est de permettre la démonstration de nombreuses propriétés de façon simple par induction.

DÉFINITION 2.0.3. On note D^n la boule unité fermée de \mathbb{R}^n pour sa métrique euclidienne standard et $S^{n-1} = \partial D^n$ la sphère unité bord de D^n . Par cellule de dimension n on entend un espace topologique e_n homéomorphe à la boule ouverte $D^n \setminus S^{n-1}$.

DÉFINITION 2.0.4 (CW-complexes). Un CW-complexe X est un espace construit comme suit :

- (1) Soit X^0 un espace discret, appelé 0-squelette de X .
- (2) Par induction on construit le n -squelette X^n à partir de X^{n-1} :

$$X^n = (X^{n-1} \coprod_{\alpha \in J_n} D_\alpha^n) / (x \sim \phi_\alpha(x) \quad \forall x \in \partial D_\alpha^n) ,$$

avec $\phi_\alpha : \partial D_\alpha^n = S^{n-1} \rightarrow X^{n-1}$ pour α parcourant un ensemble (quelconque) d'indices J_n .

On vérifie immédiatement que pour tout $\alpha \in J_n$ l'application

$$\Phi_\alpha : D_\alpha^n \hookrightarrow X^{n-1} \coprod_{\alpha} D_\alpha^n \rightarrow X^n \subset X$$

est continue et que sa restriction à la boule ouverte $D_\alpha^n \setminus \partial D_\alpha^n$ est un homéomorphisme sur son image e_α^n . L'application Φ_α est appelée application caractéristique de la cellule e_α^n .

- (3) $X = \cup_{n \in \mathbb{N}} X^n$ est muni de la topologie faible : un sous-espace $Y \subset X$ est ouvert si et seulement si $Y \cap X^n$ est ouvert dans X^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

En termes d'applications caractéristique, on vérifie aisément qu'un sous-espace $Y \subset X$ est ouvert si et seulement si pour tout $\alpha \in J = \cup_{n \in \mathbb{N}} J_n$, la préimage $\Phi_\alpha^{-1}(Y)$ est ouvert dans D_α^n .

DÉFINITION 2.0.5. On note **CW** la catégorie dont les objets sont les CW-complexes et les morphismes les applications continues entre CW-complexes.

2.1. Exemples.

1. Un CW-complexe de dimension 1 est un graphe.
2. La sphère $S^n = e^0 \cup e^n$, où e^n est attachée via $S^{n-1} \rightarrow e^0$. Autrement dit $S^n = D^n / \partial D^n$.

3. $\mathbb{R}\mathbb{P}^n = S^n / (v \sim -v)$ est le quotient d'une hémisphère D^n avec points antipodaux de ∂D^n identifiés. Mais $\partial D^n / (v \sim -v) \simeq \mathbb{R}\mathbb{P}^{n-1}$ donc $\mathbb{R}\mathbb{P}^n = \mathbb{R}\mathbb{P}^{n-1} \cup e^n$ avec recollement $S^{n-1} \longrightarrow \mathbb{R}\mathbb{P}^{n-1}$ le quotient d'ordre 2. Par induction on en déduit :

$$\mathbb{R}\mathbb{P}^n = e^0 \cup e^1 \dots \cup e^n .$$

On peut alors former l'union infinie

$$\mathbb{R}\mathbb{P}^\infty = \bigcup_n \mathbb{R}\mathbb{P}^n ,$$

qui a une cellule en toute dimension.

4. De manière similaire l'espace $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$ des droites complexes de \mathbb{C}^{n+1} s'identifie au quotient de la sphère unité S^{2n+1} de \mathbb{C}^{n+1} par les homothéties complexes de norme 1. Tout élément de S^{2n+1} est équivalent sous cette relation à un vecteur $(w, \sqrt{1-|w|^2}) \in \mathbb{C}^n \times \mathbb{R}$ avec $w < 1$. Cette représentation est unique si $|w| \neq 1$, ce qui fournit une cellule e^{2n} . Si $|w| = 1$ on obtient le quotient d'une sphère S^{2n-1} par les homothéties complexes de norme 1, soit $\mathbb{C}\mathbb{P}^{n-1}$. Finalement $\mathbb{C}\mathbb{P}^n = e^{2n} \cup \mathbb{C}\mathbb{P}^{n-1}$ avec recollement l'application quotient naturelle $S^{2n-1} \longrightarrow \mathbb{C}\mathbb{P}^{n-1}$. Par induction

$$\mathbb{C}\mathbb{P}^n = e^0 \cup e^2 \cup \dots \cup e^{2n} ,$$

et $\mathbb{C}\mathbb{P}^\infty$ est un CW-complexe formé d'une cellule en tout degré pair.

5. L'inclusion équatoriale $S^0 \subset S^1 \subset \dots \subset S^n$ n'est pas une inclusion de sous-complexes pour les structures de CW-complexes de l'exemple 2. Le découpage équatorial de S^i en deux demi-hémisphères fournit une autre CW-structure $S^i = S^{i-1} \cup e^i \cup e^i$. Ce qui munit l'union infinie S^∞ d'une structure naturelle de CW-complexe. On montre facilement que S^∞ est contractile.

2.2. Sous-complexes.

DÉFINITION 2.2.1 (Sous-complexe). *Un sous-espace $Y \subset X$ d'un CW-complexe X est un sous-CW-complexe si Y est un fermé de X union de cellules.*

EXEMPLE 2.2.2. Chacun des squelettes X^n , $n \in \mathbb{N}$, d'un CW-complexe est un sous-CW-complexe. On obtient ainsi une filtration de X par des sous-CW-complexes.

DÉFINITION 2.2.3. *On dira qu'un CW-complexe est fini s'il est constitué d'un nombre fini de cellules.*

Un tel CW-complexe est évidemment compact. Réciproquement :

LEMME 2.2.4. *Un sous-espace compact d'un CW-complexe est contenu dans un sous-complexe fini.*

DÉMONSTRATION. Soit C un compact de X .

SOUS-LEMME 2.2.5. *Le compact C rencontre seulement un nombre fini de cellules.*

DÉMONSTRATION. Soit $S = \{x_i, i \in \mathbb{N}\}$ un ensemble de points de C contenus dans des cellules distinctes. Montrons que S est fermé dans X . Par induction on peut supposer que $S \cap X^{n-1}$ est fermé dans X^{n-1} . Donc pour toute cellule e_α^n , $\phi_\alpha^{-1}(S)$ est fermé dans ∂D_α^n . Mais

$$\Phi_\alpha^{-1}(S) = \phi_\alpha^{-1}(S \cap X^{n-1}) \cup (\text{au plus un point}) .$$

Ainsi $\Phi_\alpha^{-1}(S)$ est fermé dans D_α^n et donc $S \cap X^n$ est fermé dans X^n . Finalement S est fermé dans X et contenu dans le compact C . L'espace discret S est ainsi compact, donc fini.

□

Donc il suffit de montrer qu'une union finie de cellules est contenue dans un sous-complexe fini. Comme une union finie de sous-complexes finis est un sous-complexe fini, on est réduit à montrer que toute cellule e_α^n est contenue dans un sous-complexe fini. L'image de $\Phi_\alpha|_{\partial D_\alpha^n}$ est compacte donc par induction sur la dimension cette image est contenue dans un sous-complexe fini $Y \subset X^{n-1}$. Mais alors $e_\alpha^n \subset Y \cup e_\alpha^n$, qui est encore un sous-complexe fini de X .

□

2.3. CW-paires. Une généralisation agréable de la notion de CW-complexe ou de paire (X, A) d'un CW-complexe X et d'un sous-CW-complexe A est la notion de CW-paire :

DÉFINITION 2.3.1. Une CW-paire (ou CW-complexe relatif) (X, A) est la donnée d'un espace $A \in \mathbf{Top}$ et d'un espace $X \in \mathbf{Top}$ obtenu à partir de A par recollement inductif de cellules analogue au cas absolu :

$$X^{-1} = A \subset X^0 = A \cup_{\alpha \in J_0} D_\alpha^0 \subset X^1 \subset \cdots \subset X^n \subset \cdots \subset X ,$$

où pour tout $n \geq 1$:

$$X^n = (X^{n-1} \coprod_{\alpha \in J_n} D_\alpha^n) / (x \sim \phi_\alpha(x) \quad \forall x \in \partial D_\alpha^n) ,$$

avec $\phi_\alpha : \partial D_\alpha^n = S^{n-1} \rightarrow X^{n-1}$ pour α parcourant un ensemble (quelconque) d'indices J_n , et X est muni de la topologie faible.

DÉFINITION 2.3.2. On notera \mathbf{CW}_2 la catégorie dont les objets sont les CW-paires et un morphisme $f : (X, A) \rightarrow (Y, B)$ de \mathbf{CW}_2 est une application continue de X dans Y envoyant A sur B .

2.4. Opérations élémentaires. On dispose des opérations élémentaires suivantes :

- produit : si $X, Y \in \mathbf{CW}$, on définit une structure cellulaire sur $X \times Y$ en posant $(X \times Y)^n = \cup_{i+j=n} X^i \times Y^j$. Si on munit l'ensemble $X \times Y = \cup_n (X \times Y)^n$ de la topologie faible associée, on obtient ainsi un CW-complexe encore noté $X \times Y$. Attention : la topologie de $X \times Y$ peut être plus faible que la topologie produit si par exemple les CW-complexes X et Y ne sont pas finis.
- quotient d'une paire : étant donnée une CW-paire $(X, A) \in \mathbf{CW}_2$ l'espace topologique quotient X/A est naturellement un CW-complexe.
- cône : le cône d'un CW-complexe X est le CW-complexe $CX = X \times I / X \times \{0\}$.
- suspension : c'est le double-cône $SX = X \times \{1\} \cup X \times I / X \times \{0\}$. En particulier $S(S^n)$ est homéomorphe à S^{n+1} .

2.5. Remarque sur l'appellation CW. Le C vient de « closure-finiteness » : l'adhérence de toute cellule rencontre au plus un nombre fini de cellules par le lemme précédent. Le W vient de « weak topology » : X est muni de la topologie faible. En fait on peut démontrer (c'est la définition originale d'un CW-complexe due à J.H.C. Whitehead) :

PROPOSITION 2.5.1. Soit X un espace Hausdorff. Une famille $\{\Phi_\alpha : D_\alpha^n \rightarrow X\}_{\alpha \in J}$ est la famille des applications caractéristiques d'une structure de CW-complexe sur X si et seulement si :

- (1) pour tout $\alpha \in J$, Φ_α en restriction à l'intérieur de D_α^n est injective. Les cellules images e_α^n , $\alpha \in J$, sont disjointes deux à deux et leur union $\bigcup_{\alpha \in J} e_\alpha^n$ est X tout entier.
- (2) Pour tout $\alpha \in J$, $\Phi_\alpha(\partial D_\alpha^n)$ est contenu dans une union finie de cellules de dimension $< n$.

(3) un sous-ensemble de X est fermé si et seulement si il rencontre $\overline{e_\alpha^n}$ en un fermé, ceci pour tout $\alpha \in J$.

3. Cofibrations

Dans cette section, nous montrons les deux résultats intuitifs suivants :

THÉORÈME 3.0.2. *Soit (X, A) une CW-paire. Si A est contractile alors l'application quotient $X \rightarrow X/A$ est une équivalence d'homotopie.*

THÉORÈME 3.0.3. *Soit (Y, A) une CW paire et X un CW-complexe ; soient $f, g : A \rightarrow X$ avec $f \simeq g$. Alors*

$$X \cup_f Y \simeq X \cup_g Y \text{ rel } X .$$

(où $X \cup_f Y := (X \cup Y)/(f(a) \sim a, a \in A)$).

3.1. Cofibrations. La preuve des théorèmes 3.0.2 et 3.0.3 est l'occasion d'introduire une notion homotopique fondamentale : celle de cofibration.

DÉFINITION 3.1.1 (propriété d'extension des homotopies). *Une inclusion continue d'espaces topologiques $A \subset X$ est dite avoir la propriété d'extension des homotopies relativement à un espace topologique Y si étant donné une application continue $f_0 : X \rightarrow Y$ et une homotopie $f_{t,A} : A \rightarrow Y, t \in I$ d'origine $f_{0,A} = f_0|_A$, on peut étendre cette homotopie en $f_t : X \rightarrow Y$. Autrement dit : toute application continue $f : X \times \{0\} \cup A \times I \rightarrow Y$ s'étend en $X \times I \rightarrow Y$.*

Remarquons que cette propriété s'exprime encore agréablement en disant que tout diagramme commutatif $A \rightarrow Y^I$ admet un relèvement $A \rightarrow Y^I$ (où Y^I désigne l'espace des applications continues de I dans Y , muni de la topologie compacte-ouverte). L'existence d'un tel relèvement sera abrégée par le diagramme

$$\begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & Y^I \\ \downarrow & & \downarrow \\ X & \longrightarrow & Y \end{array} \quad \begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & Y^I \\ \downarrow & \nearrow & \downarrow \\ X & \longrightarrow & Y \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & Y^I \\ \downarrow & \nearrow & \downarrow \\ X & \longrightarrow & Y \end{array} .$$

DÉFINITION 3.1.2 (cofibrations). *Une application continue d'espaces topologiques $i : A \rightarrow X$ est une cofibration si elle a la propriété d'extension des homotopies relativement à tout espace topologique Y . On notera $A \xrightarrow{i} X$.*

LEMME 3.1.3. *Soit $i : A \rightarrow X$ une application continue d'espaces topologiques.*

- (1) *La flèche i est une cofibration si et seulement si $X \times I$ se rétracte par déformation sur $A \times I \cup X \times \{0\}$.*
- (2) *Si i est une cofibration alors i est l'inclusion d'un fermé A de X .*

DÉMONSTRATION. Exercice.

□

3.2. Géométrie des cofibrations.

PROPOSITION 3.2.1. *Si (X, A) est une CW-paire alors l'inclusion $A \subset X$ est une cofibration.*

DÉMONSTRATION. Commençons par le cas $(X, A) = (D^n, \partial D^n)$. Considérons le cylindre $D^n \times I$ comme sous-ensemble du cylindre $D^n \times [0, 2]$ et notons P le centre de la boule D^n . La projection radiale de centre le point $(P, 2)$ de $D^n \times [0, 2]$ définit une rétraction par déformation

$$r : D^n \times I \longrightarrow D^n \times \{0\} \cup \partial D^n \times I .$$

Pour une CW-paire (X, A) quelconque on en déduit une rétraction par déformation

$$X^n \times I \longrightarrow X^n \times \{0\} \cup (X^{n-1} \times I)$$

car $X^n \times I$ s'obtient à partir du terme de droite en attachant des $D^n \times I$ le long de $D^n \times \{0\} \cup \partial D^n \times I$.

On applique cette rétraction par déformation sur un intervalle de temps $[\frac{1}{2^{n+1}}, \frac{1}{2^n}]$ et on concatène : on obtient une rétraction par déformation de $X \times I$ sur $X \times \{0\} \cup A \times I$. La topologie faible des CW-complexes assure qu'il n'y a pas de problème de continuité en $t = 0$!

□

Plus généralement remarquons le

LEMME 3.2.2. *Soit X un espace topologique quelconque et $A \hookrightarrow X$ une cofibration. Alors le fermé A de X est rétracte par déformation d'un voisinage V dans X , et il existe une fonction $\phi : X \longrightarrow I$ avec $A = \phi^{-1}(0)$ et $\phi|_{X-V} = 1$. On dit alors que (X, A) est une paire NDR (pour neighborhood deformation retract).*

DÉMONSTRATION. Comme $A \hookrightarrow X$ il existe une rétraction

$$r : X \times I \longrightarrow A \times I \cup X \times \{0\} .$$

Posons alors $\psi : X \longrightarrow I$ définie par

$$\psi(x) = \sup_{t \in I} |t - \text{proj}_I r(x, t)| .$$

L'application ψ est continue et $\psi^{-1}(0) \supset A$. Posons $V = \psi^{-1}([0, 1])$, c'est un voisinage de A dans X et $\psi|_{X-V} = 1$. Posons

$$H : \begin{array}{ccc} X \times I & \longrightarrow & X \\ (x, t) & \longrightarrow & \text{proj}_X r(x, t) \end{array} ,$$

la restriction $H|_{V \times I}$ est un rétracte par déformation sur A . Enfin si on définit $\phi : X \longrightarrow I$ par

$$\phi(x) = \inf \{t \in I / H(x, t) \in A\} ,$$

on a bien $A = \phi^{-1}(0)$ et $\phi|_{X-V} = 1$.

□

3.3. Preuve du théorème 3.0.2. D'après la proposition 3.2.1 c'est un corollaire immédiat de la

PROPOSITION 3.3.1. *Si $A \hookrightarrow X$ est une cofibration et A est contractile alors $q : X \longrightarrow X/A$ est une équivalence d'homotopie.*

DÉMONSTRATION. Considérons le diagramme :

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{(g_t)} & X^I \\ \downarrow i & \nearrow (f_t) & \downarrow \\ X & \xrightarrow{1_X} & X \end{array} .$$

où g_t désigne une homotopie entre 1_A et $A \rightarrow \{*\}$.

Comme $f_t(A) \subset A$ pour tout t , on en déduit

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f_t} & X \\ \downarrow q & & \downarrow q \\ X/A & \xrightarrow{\bar{f}_t} & X/A \end{array} .$$

Comme $f_1(A) = \{*\}$, on en déduit

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f_1} & X \\ \downarrow q & \nearrow g & \downarrow q \\ X/A & \xrightarrow{\bar{f}_1} & X/A \end{array}$$

d'où $gq = f_1 \simeq f_0 = 1_X$ et $qg = \bar{f}_1 \simeq \bar{f}_0 = 1_{X/A}$.

□

3.4. Preuve du théorème 3.0.3. Notons $H : A \times I \rightarrow X$ une homotopie reliant f à g . On a alors la double inclusion

$$X \cup_f Y \subset X \cup_H (Y \times I) \supset X \cup_g Y .$$

Comme (Y, A) est une CW-paire donc une cofibration, $Y \times I$ se rétracte par déformation sur $Y \times \{0\} \cup A \times I$. Ce rétracte par déformation induit un rétracte par déformation de $X \cup_H (Y \times I)$ sur $X \cup_f Y$.

De même $X \cup_H (Y \times I)$ se rétracte par déformation sur $X \cup_g Y$.

Ces deux rétractions par déformations fixent X donc

$$X \cup_f Y \simeq X \cup_g Y \text{ rel } X .$$

□

4. Quelques catégories d'espaces

4.1. La catégorie **Top des espaces compactements engendrés.** Les CW-complexes sont pratiques à manipuler mais la catégorie **CW** est trop petite. Ainsi, par exemple, elle n'a pas de Hom interne : si $X, Y \in \mathbf{CW}$, l'espace X^Y (muni de la topologie compacte ouverte) n'est pas un CW-complexe en général. En particulier l'espace de lacet X^{S^1} d'un CW-complexe X n'a pas en général de structure de CW-complexe (même si X^{S^1} est toujours homotopiquement équivalent à un CW-complexe, c.f. [9]).

Par ailleurs la « grosse » catégorie **Top** (notation provisoire) de tous les espaces topologiques avec application continues, outre qu'elle contient de nombreux objets qu'on peut légitimement considérer comme pathologiques, ne satisfait pas à la loi exponentielle : l'application naturelle

$$X^{Y \times Z} \rightarrow X^{Z^Y}$$

est un homéomorphisme sur son image mais n'est pas surjective en générale (elle l'est si par exemple X , Y et Z sont Hausdorff localement compacts).

La catégorie que nous cherchons doit être

- (1) suffisamment grosse pour contenir tous les espaces particuliers « rencontrés dans la pratique » ;
- (2) fermée pour toutes les opérations ordinaires : produits petits, coproduits petits, union croissante d'espaces, espace de fonction Y^X et la composition de ces opérations.
- (3) suffisamment petite pour avoir compatibilité entre ces opérations : on demande par exemple que $(X \times Y)^Z = X^Z \times Y^Z$ et $X^{Y \times Z} = X^{Y^Z}$.

La plupart des catégories d'espaces « ayant de bonnes propriétés » (c.f. la note¹ pour des rappels de topologie élémentaire) ne satisfont pas ces conditions. Ainsi par exemple la catégorie des espaces Hausdorff localement compacts n'a pas de produits infinis.

DÉFINITION 4.1.2. *On dira qu'un espace topologique X est*

- faiblement Hausdorff *si pour tout espace compact C et toute application continue $f : C \rightarrow X$ l'image $f(C)$ est un fermé de X (c'est une propriété entre T_1 et Hausdorff). On notera **wHaus** la catégorie des espaces faiblement Hausdorff (avec applications continues).*
- un k -espace *si un sous-ensemble $W \subset X$ est fermé si et seulement si pour tout $f : C \rightarrow X$ avec C compact alors $f^{-1}(W)$ est fermé dans C .*
- compactement engendré *si c'est un k -espace faiblement Hausdorff. On notera **CG** (notation provisoire) la catégorie des espaces compactement engendrés avec applications continues.*

En particulier tout CW-complexe, tout espace Hausdorff localement compact ou tout espace métrisable définit un objet de **CG**, d'après le

LEMME 4.1.3. *Soit X un espace Hausdorff. Si pour tout sous-espace $U \subset X$ et tout $x \in \bar{U}$ il existe un compact $K \subset X$ avec $x \in \overline{K \cap U}$ alors X est compactement engendré.*

On vérifie facilement que si $X \in \mathbf{CG}$ et $Y \in \mathbf{Top}$, une application $f : X \rightarrow Y$ est continue si et seulement si elle est continue en restriction à chaque compact de X .

1. Soit X un espace topologique. L'espace X est dit :

- T_0 si pour tous $x, y \in X$ avec $x \neq y$, alors il existe un ouvert $U \subset X$ tel que $x \in U, y \notin U$ ou bien $y \in U, x \notin U$.
- T_1 si pour tous $x, y \in X$ avec $x \neq y$, il existe des ouverts U, V de X avec $x \in U, y \notin U, x \notin V, y \in V$. De façon équivalente les points de X sont des fermés de X .
- T_2 ou Hausdorff si pour tous $x, y \in X$ avec $x \neq y$, il existe des ouverts U, V de X avec $x \in U, y \in V$ et $U \cap V = \emptyset$. De façon équivalente la diagonale $\Delta(X)$ est fermée dans $X \times X$.
- T_3 ou régulier si X est T_1 et pour tout $x \in X$ et tout fermé $F \subset X$ il existe des ouverts U, V de X avec $x \in U, F \subset V$ et $U \cap V = \emptyset$. De façon équivalente X est Hausdorff et pour $x \in U \subset X$ avec U ouvert de X , il existe un ouvert V avec $x \in V \subset \bar{V} \subset U$.
- complètement régulier si X est T_1 et pour tout $x \in X$ et tout fermé $F \subset X$ ne contenant pas x il existe une fonction continue $f : X \rightarrow [0, 1]$ avec $f(x) = 0, f(F) = 1$.
- T_4 ou normal si X est T_1 et pour tous fermés F, G de X avec $F \cap G = \emptyset$ il existe des ouverts U, V de X tels que $F \subset U, G \subset V$ et $U \cap V = \emptyset$. De façon équivalente, X est Hausdorff et pour tout fermé F et ouvert U de X avec $F \subset U$ il existe un ouvert V de X vérifiant $F \subset V \subset \bar{V} \subset U$.

On vérifie facilement que tout espace métrisable est normal, et que chacune des conditions dans la liste implique la précédente. De plus « normal » coïncide avec la possible notion de « complètement normal » par le

LEMME 4.1.1 (Urysohn). *Soit X normal et F, G deux fermés de X tels que $F \cap G = \emptyset$. Alors il existe une fonction continue $f : X \rightarrow [0, 1]$ avec $f(F) = 0$ et $f(G) = 1$.*

Enfin chacune des conditions de la liste est strictement moins forte que la suivante.

4.1.1. *Existences de limites dans \mathbf{CG} .* On dispose d'adjonctions :

$$\mathbf{CG} \begin{array}{c} \xrightarrow{\text{oubli}} \\ \xleftarrow{k} \end{array} \mathbf{wHaus} \begin{array}{c} \xrightarrow{\text{oubli}} \\ \xleftarrow{wH} \end{array} \mathbf{Top} .$$

Le foncteur wH est la prise du quotient faiblement Hausdorff minimal. Quant au foncteur

$$k : \mathbf{wHaus} \longrightarrow \mathbf{CG} ,$$

ensemblément $kX = X$, muni de la nouvelle topologie où un sous-espace est fermé si et seulement si son intersection avec tout compact de X est fermé dans X .

Ces adjonctions permettent de vérifier que \mathbf{CG} est munies de limites petites : on réalise la limite dans \mathbf{Top} (qui est complète), on remarque qu'une limite catégorique dans \mathbf{Top} d'espaces de \mathbf{wHaus} est dans \mathbf{wHaus} puis on applique k . Comme un adjoint à droite préserve les limites catégoriques, on obtient bien une limite catégorique dans \mathbf{CG} . Par exemple le produit dans \mathbf{CG} est défini par $X \times Y = k(X \times_{\mathbf{Top}} Y)$.

REMARQUE 4.1.4. Si X est localement compact et $Y \in \mathbf{CG}$ alors $X \times Y = X \times_{\mathbf{Top}} Y$.

4.1.2. *Hom internes.* Pour $X, Y \in \mathbf{Top}$ on pose $\underline{\text{Hom}}(X, Y) = k(Y^X)$. On vérifie aisément que la loi exponentielle

$$\underline{\text{Hom}}(X \times Y, Z) = \underline{\text{Hom}}(X, \underline{\text{Hom}}(Y, Z))$$

est satisfaite.

4.1.3. *Colimites.* Le problème des colimites est plus ardu : en effet, même si \mathbf{Top} est cocomplète, la colimite dans \mathbf{Top} d'espaces de \mathbf{wHaus} n'est pas en général faiblement Hausdorff. Si toutefois la colimite dans \mathbf{Top} d'espaces de \mathbf{CG} est dans \mathbf{wHaus} alors elle est dans \mathbf{CG} . C'est le cas pour certaines colimites bien utiles :

- Si $X, Y \in \mathbf{CG}$ et $f : A \longrightarrow Y$ avec A fermé de X alors le pushout $X \cup_f Y$ est dans \mathbf{CG} .
- La colimite $\text{colim} X_i$ d'une suite $X_i \in \mathbf{CG}$, avec $X_i \longrightarrow X_{i+1}$ d'image fermée, est encore dans \mathbf{CG} .

4.1.4. *Notation définitive.* Dorénavant on notera \mathbf{Top} la catégorie \mathbf{CG} et toutes les opérations catégoriques seront comprises dans \mathbf{CG} . En particulier pour $X, Y \in \mathbf{Top}$ on notera dorénavant $X^Y := \underline{\text{Hom}}(Y, X)$.

4.1.5. *Cofibrations dans \mathbf{Top} .* On peut montrer que dans la catégorie \mathbf{Top} des espaces compactement engendrés la réciproque du lemme 3.2.2 est valable :

THÉORÈME 4.1.5. *Soit $X \in \mathbf{Top}$ et $A \subset X$ un fermé. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

- (a) $A \hookrightarrow X$
- (b) (X, A) est une paire NDR.

4.2. Catégories de paires et catégories pointées.

4.2.1. La catégorie \mathbf{Top}_2 .

DÉFINITION 4.2.1. *On notera \mathbf{Top}_2 la catégorie ayant pour objets les paires (X, A) , avec $X \in \mathbf{Top}$ et A un sous-espace de X . Un morphisme $f : (X, A) \longrightarrow (Y, B)$ dans \mathbf{Top}_2 est une application continue $f : X \longrightarrow Y$ envoyant A dans B .*

REMARQUE 4.2.2. La catégorie \mathbf{CW}_2 est ainsi naturellement une sous-catégorie pleine de \mathbf{Top}_2 .

4.2.2. *La catégorie \mathbf{Top}_* .* On s'intéressera tout particulièrement au cas où A est un point : on appelle espace topologique pointé une paire (X, x) d'un espace $X \in \mathbf{Top}$ et d'un point $x \in X$. On notera \mathbf{Top}_* la catégorie des espaces pointés avec applications continues *préservant les points bases*. En particulier les homotopies dans \mathbf{Top}_* sont sous-entendues pointées.

Bien-sûr on dispose d'une paire adjointe

$$\mathbf{Top} \begin{array}{c} \xrightarrow{+} \\ \xleftarrow{\text{oubli}} \end{array} \mathbf{Top}_* ,$$

où $X_+ = X \coprod \{*\}$ est l'espace X auquel on adjoint un point base externe.

Pour $X, Y \in \mathbf{Top}$ (resp. $(X, x_0), (Y, y_0) \in \mathbf{Top}_*$), on notera $[X, Y]$ (resp. $[(X, x_0), (Y, y_0)]_*$) le quotient $\mathbf{Top}(X, Y)/\sim$ (resp. $\mathbf{Top}_*((X, x_0), (Y, y_0))/\sim_*$) des classes d'homotopies d'applications (resp. pointées) entre X et Y . Quand le contexte est clair, on notera simplement X l'espace topologique pointé (X, x_0) et $[X, Y]$ pour $[X, Y]_*$.

4.2.3. *La catégorie \mathbf{CW}_* .* On définit \mathbf{CW}_* comme la sous-catégorie pleine de \mathbf{Top}_* dont les objets sont les CW-complexes *pointés par un point du 0-squelette X^0* .

Exemple : La sphère $S^n = \{(z_0, \dots, z_n) \in \mathbb{R}^{n+1} / z_0^2 + \dots + z_n^2 = 1\}$ sera dorénavant pointée par $x_0 = (0, \dots, 0, 1)$.

4.2.4. *La catégorie \mathbf{Top}_*^{nd} .* Tout espace $(X, x_0) \in \mathbf{CW}_*$ a la propriété fort utile que l'inclusion du point base x_0 dans X est une cofibration. On aura parfois besoin de considérer des espaces topologiques pointés plus généraux que des CW-complexes ayant cette propriété :

DÉFINITION 4.2.3. *On dit que $(X, x_0) \in \mathbf{Top}_*$ est bien pointé, ou non-dégénéré, si l'inclusion $\{x_0\} \subset X$ est une cofibration. On notera \mathbf{Top}_*^{nd} la sous-catégorie pleine de \mathbf{Top}_* des espaces topologiques compactement engendrés bien pointés.*

4.3. Opérations.

4.3.1. *Opérations catégoriques.* Rappelons dans un tableau quelques propriétés catégoriques de \mathbf{Top} et \mathbf{Top}_* :

	\mathbf{Top}	\mathbf{Top}_*
Relations	$f \sim g$	$f \sim g \text{ rel } \{*\}$ (homotopie pointée)
produit catégorique	$X \times Y$	$(X \times Y, (x_0, y_0))$
coproduit catégorique		$X \vee Y := X \times \{y_0\} \cup \{x_0\} \times Y$
hom interne	$\underline{\mathbf{Top}}(X, Y) = Y^X$	$\underline{\mathbf{Top}}_*((X, x_0), (Y, y_0)) = Y^X$ (pointé)
adjoint a gauche au hom interne	$X \times Y$	$X \wedge Y = (X \times Y)/(X \vee Y)$

On a donc un isomorphisme d'ensembles pointés $\mathbf{Top}_*(Z \wedge X, Y) \simeq \mathbf{Top}_*(X, Y^Z)$, et même un homéomorphisme $Y^{Z \wedge X} \simeq (Y^Z)^X$.

4.3.2. *Suspension.* On définit l'endofoncteur de suspension $S : \mathbf{Top} \longrightarrow \mathbf{Top}$ (respectivement $\Sigma : \mathbf{Top}_* \longrightarrow \mathbf{Top}_*$) par

$$SX = (X \times \{1\}) \setminus (X \times I) / (X \times \{0\}) ,$$

$$\Sigma X = \frac{SX}{\{x_0\} \times I} = S^1 \wedge X \text{ muni du point base quotient naturel .}$$

REMARQUES 4.3.1. – $SS^n \simeq_{\text{homéo}} S^{n+1}$ (double cône).

– Si $X \in \mathbf{Top}_*$ l'application quotient $SX \longrightarrow \Sigma X$ s'obtient en contractant $\{x_0\} \times I$ qui est contractile. D'après le théorème d'équivalence par contraction 3.0.2, l'application quotient $SX \longrightarrow \Sigma X$ est donc une équivalence d'homotopie si $X \in \mathbf{Top}_*^{nd}$. En particulier

$$\Sigma S^n = S^1 \wedge S^n \simeq S^{n+1} .$$

– En fait $S^1 \wedge S^n$ est *homéomorphe* à S^{n+1} (exercice). On en déduit que $\Sigma^n X$ est non seulement homotopiquement équivalent à $S^n \wedge X$ mais même homéomorphe.

4.3.3. *Espace de lacet.* Si $X \in \mathbf{Top}_*$ on note $\Omega X \in \mathbf{Top}_*$ l'espace de lacet

$$\Omega X = X^{S^1} \text{ (applications pointées) .}$$

Le point base ω_0 de ΩX est l'application constante (pointée) de S^1 dans le point base x_0 de X . Bien-sûr $\Omega : \mathbf{Top}_* \longrightarrow \mathbf{Top}_*$ définit un endofoncteur.

4.3.4. *Adjonction.*

LEMME 4.3.2. *Pour tous espaces $X, Y, Z \in \mathbf{Top}_*$, l'application naturelle $[Z \wedge X, Y] \longrightarrow [X, Y^Z]$ qui à $f : Z \wedge X \longrightarrow Y$ associe $\hat{f} : X \longrightarrow Y^Z$ définie par $\hat{f}(x)(z) = f(z \wedge x)$ est une bijection d'ensembles pointés.*

COROLLAIRE 4.3.3. *On dispose d'une adjonction*

$$\Sigma : \mathbf{Top}_* / \sim \begin{array}{c} \longrightarrow \\ \longleftarrow \end{array} \mathbf{Top}_* / \sim : \Omega .$$

4.4. Catégorie homotopique.

DÉFINITION 4.4.1. *On notera $\mathbf{Ho}(\mathbf{Top})$ la catégorie homotopique des espaces topologiques : ses objets sont ceux de \mathbf{Top} et $\mathbf{Ho}(\mathbf{Top})(X, Y) = [X, Y]$.*

On définit de manière analogue la version pointée $\mathbf{Ho}(\mathbf{Top}_*)$.

5. H-espace et H-coespace

Pour des espaces $X, Y \in \mathbf{Top}_*$ quelconques, l'ensemble pointé $[X, Y]$ n'a en général pas de structure algébrique additionnelle. Dans cette section on s'intéresse à la question suivante : quelles propriétés demander aux espaces X ou Y de \mathbf{Top}_* pour que $[X, Y]$ ne soit pas seulement un ensemble pointé mais un groupe ? Il est clair que c'est le cas si Y est un groupe topologique ou si X est un cogroupe topologique, car alors $\mathbf{Top}_*(X, Y)$ est un groupe admettant comme sous-groupe distingué l'ensemble des applications de X dans Y homotopiquement triviales. Considérer $[X, Y]$ plutôt que $\mathbf{Top}_*(X, Y)$ permet de demander moins de structure sur X ou Y .

5.1. H-espace et H-groupe.

DÉFINITION 5.1.1. *Un espace $Y \in \mathbf{Top}_*$ est dit un H-espace s'il est muni d'une application*

$$\mu : Y \times Y \longrightarrow Y$$

appelée multiplication, telle que l'application constante sur le point base $e : Y \longrightarrow Y$ est une identité pour μ à homotopie près : $Y \xrightarrow{(e,1)} Y \times Y \xrightarrow{\mu} Y$ et $Y \xrightarrow{(1,e)} Y \times Y \xrightarrow{\mu} Y$ sont homotopes à l'identité de Y .

REMARQUES 5.1.2. – La multiplication μ n'est pas supposée associative, pas même à homotopie près.

– La notion de H-espace se comporte bien par homotopie : si X est un H-espace et Y est homotopiquement équivalent à X alors Y est naturellement un H-espace.

DÉFINITION 5.1.3. *On dira qu'une application $\iota : Y \longrightarrow Y$ définit des H-inverses si les applications $Y \xrightarrow{(1,\iota)} Y \times Y \xrightarrow{\iota} Y$ et $Y \xrightarrow{(\iota,1)} Y \times Y \xrightarrow{\iota} Y$ sont homotopes à l'application $e : Y \longrightarrow Y$ c'est-à-dire sont homotopiquement triviales.*

DÉFINITION 5.1.4. *Un H-espace H-associatif muni de H-inverses sera dit un H-groupe.*

EXEMPLES 5.1.5. – *Les groupes topologiques.* Les groupes topologiques, en particulier les groupes de Lie, sont bien-sûr des H-groupes.

– *Les sphères d'Adams.* Adams a montré que les seules sphères à être des H-espaces sont S^1 , S^3 et S^7 . Les deux premières sont naturellement des groupes de Lie (unités des corps des complexes, respectivement des quaternions) et sont donc des H-groupes. La sphère S^7 des octonions n'est pas H-associative.

– *L'espace $\mathbb{C}\mathbb{P}^\infty$.* Identifions \mathbb{C}^n à l'espace vectoriel des polynômes de degré au plus $n - 1$ par l'application qui à (a_0, \dots, a_{n-1}) associe $a_0 + a_1X + \dots + a_{n-1}X^{n-1}$. On définit alors par produit polynomial une multiplication sur $\mathbb{C}^\infty - \{0\}$, qui induit une multiplication sur son quotient $\mathbb{C}\mathbb{P}^\infty$. L'espace $\mathbb{C}\mathbb{P}^\infty$ est ainsi naturellement un H-espace associatif commutatif avec identité stricte.

– *Les produits de James.* Soit $(X, e) \in \mathbf{Top}_*$. On note

$$J(X) = \left(\coprod_{k \geq 1} X^k \right) / ((x_1, \dots, x_{i-1}, e, x_{i+1}, \dots, x_k) \sim (x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_k)) .$$

On définit un produit sur $J(X)$ par concaténation, il est strictement associatif et a pour unité stricte le point base e de X . On vérifie facilement que c'est le monoïde libre engendré par X dans \mathbf{Top}_* : pour tout monoïde Y de \mathbf{Top}_* et toute flèche $f : X \longrightarrow Y$ dans \mathbf{Top}_* , il existe une unique flèche de monoïde $\tilde{f} : J(X) \longrightarrow Y$ rendant commutatif le diagramme :

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\iota} & J(X) \\ & \searrow f & \downarrow \tilde{f} \\ & & Y \end{array} .$$

– *Les produits symétriques infinis.* On peut abélianiser la construction de James :

$$SP(X) = J(X) / \Sigma_\infty ,$$

où Σ_∞ désigne le groupes des permutations sur un nombre infini d'indices laissant fixe presque tous les indices. $SP(X)$ est le monoïde abélien libre engendré par X dans \mathbf{Top}_* .

- *Les espaces de lacets.* C'est l'exemple crucial de ce chapitre. L'application $\mu : \Omega X \times \Omega X \longrightarrow \Omega X$ de concaténation des lacets fait de tout espace de lacet ΩX , $X \in \mathbf{Top}_*$, un H -groupe : les H -inverses sont donnés par inversion du sens de rotation et on vérifie facilement que la multiplication μ est H -associative.

REMARQUE 5.1.6. La caractérisation dans \mathbf{Top}_* des espaces de lacets est une des origines de la théorie des opérades, c.f. [8].

LEMME 5.1.7. *Soit $Y \in \mathbf{Top}_*$. Les ensembles pointés $[X, Y]$ ont une structure de groupe naturelle en X si et seulement si Y est un H -groupe.*

PREUVE : Indiquons seulement que la structure multiplicative sur $[X, Y]$ est donnée par

$$[f][g] = [X \xrightarrow{\Delta} X \times X \xrightarrow{f \times g} Y \times Y \xrightarrow{\mu} Y] ,$$

et les inverses par

$$[f^{-1}] = [\iota \circ f] .$$

Les détails sont laissés au lecteur.

REMARQUE 5.1.8. Si la multiplication $\mu : Y \times Y \longrightarrow Y$ du H -groupe Y est homotopiquement commutative alors $[X, Y]$ est un groupe abélien.

5.2. H-coespace et H-cogroupe. Ces notions s'obtiennent dualement de celles de H -espace et H -groupe. Soit X un H -cogroupe, on notera $\mu' : X \longrightarrow X \vee X$ la co-multiplication et $\iota' : X \longrightarrow X$ la coinversion.

Exemple principal : ΣX est un H -cogroupe, où la comultiplication est le pincement du cone en son milieu.

LEMME 5.2.1. *Soit $X \in \mathbf{Top}_*$. Les ensembles pointés $[X, Y]$ ont une structure de groupe naturelle en Y si et seulement si X est un H -cogroupe.*

PREUVE : Indiquons seulement que si $f, g : X \longrightarrow Y \in \mathbf{Top}_*$ le produit $[f][g]$ est la classe d'homotopie $[X \xrightarrow{\mu'} X \vee X \xrightarrow{f \vee g} X \times Y \xrightarrow{\Delta'} Y]$.

COROLLAIRE 5.2.2. *Soient $X, Y \in \mathbf{Top}_*$. Alors l'application naturelle $[\Sigma X, Y] \longrightarrow [X, \Omega Y]$ est un isomorphisme de groupe.*

5.3. Unicité de la structure de groupe. Si X est un H -cogroupe et Y un H -groupe, l'ensemble $[X, Y]$ a *a priori* deux structures de groupes distinctes.

LEMME 5.3.1. *Soit X un H -cogroupe et Y un H -groupe. Alors les deux multiplications induites sur $[X, Y]$ coïncident et sont commutatives.*

DÉMONSTRATION.

SOUS-LEMME 5.3.2. *Soit E un ensemble muni de deux opérations \circ et $*$ telles que*

(a) *il existe une identité mutuelle $x \circ e = x * e = x = e * x = e \circ x$.*

(b) *les multiplications \circ et $*$ sont mutuellement distributives : $(x \circ x') * (y \circ y') = (x * y) \circ (x' * y')$.*

*Alors $\circ = * \circ$ et $*$ sont associatives et commutatives.*

DÉMONSTRATION.

$$x \circ y = (x * e) \circ (e * y) = (x \circ e) * (e \circ y) = x * y .$$

$$x \circ y = (e * x) \circ (y * e) = (e \circ y) * (x \circ e) = y * x = y \circ x .$$

$$x \circ (y \circ z) = (x * e) \circ (y * z) = (x \circ y) * (e \circ z) = (x \circ y) * z = (x \circ y) \circ z .$$

□

Pour finir la preuve du lemme 5.3.1, comme on sait déjà que la classe de l'application constante est une identité mutuelle, il reste juste à vérifier la distributivité mutuelle, ce qui est aisé.

□

PROPOSITION 5.3.3. *Soit $X, Y \in \mathbf{Top}_*$ et $n \geq 2$ un entier.*

- *Le H -groupe $\Omega^n Y$ est H -commutatif.*
- *Le H -cogroupe $\Sigma^n X$ est H -cocommutatif.*

DÉMONSTRATION. Pour $\Omega^n Y$ il suffit de remarquer que $[X, \Omega^n Y] = [\Sigma X, \Omega(\Omega^{n-2} Y)]$ est abélien d'après le lemme précédent. Preuve duale pour la seconde assertion.

□

6. Groupes d'homotopie

6.1. Ensemble $\pi_0(X)$.

DÉFINITION 6.1.1. *Soit $X \in \mathbf{Top}$. On définit une relation d'équivalence \sim sur X en posant $x \sim y$ s'il existe un chemin dans X reliant x à y . On définit $\pi_0(X)$ comme l'ensemble X/\sim . On dit que X est 0-connexe si $\pi_0(X)$ est réduit à un élément.*

Si $(X, x_0) \in \mathbf{Top}_*$, on notera $\pi_0(X, x_0)$ l'ensemble $\pi_0(X)$ pointé par la classe de chemin du point x_0 . Autrement dit

$$\pi_0(X, x_0) = [(S^0, 1), (X, x_0)] = [S^0, X]_* .$$

6.2. Ensemble pointé $\pi_n(X, x_0)$.

DÉFINITION 6.2.1. *Soit $X \in \mathbf{Top}_*$ et $n \in \mathbb{N}$. On pose $\pi_n(X, x_0) = \pi_0(\Omega^n X, \omega_0)$ où ω_0 désigne le point base canonique de $\Omega^n X$.*

Finalement pour $n \in \mathbb{N}$ on a :

$$\pi_n(X, x_0) = [(S^0, 1), (\Omega^n X, \omega_0)] = [\Sigma S^0, \Omega^{n-1} X]_* = \dots = [S^n, X]_* .$$

6.3. Structure de groupe sur $\pi_n(X, x_0)$. Remarquons que $\Omega^n X$ (respectivement S^n) est un H -groupe (respectivement H -cogroupe) pour $n \geq 1$, abélien pour $n \geq 2$ d'après la proposition 5.3.3. On en déduit le :

COROLLAIRE 6.3.1. *$\pi_i(X, x_0)$ est naturellement un groupe pour $i \geq 1$, abélien pour $i \geq 2$.*

6.4. Version relative.

DÉFINITION 6.4.1. *Etant donné un triple $(X, A \subset X, x_0 \in A)$ on définit pour $n \geq 1$*

$$\pi_n(X, A, x_0) = [(D^n, S^{n-1}, s_0), (X, A, x_0)] ,$$

l'ensemble naturellement pointé des classes d'équivalences d'applications de D^n dans X envoyant S^{n-1} dans A et s_0 sur x_0 pour la relation d'homotopie dans cette classe d'application.

REMARQUES 6.4.2. – l'ensemble $\pi_1(X, A, x_0)$ s'identifie à l'ensemble des classes d'homotopie de chemins reliant un point de A à x_0 . Cet ensemble n'a en général aucune structure naturelle de groupe.

- L'ensemble $\pi_n(X, A, x_0)$ est un groupe pour $n \geq 2$, abélien pour $n \geq 3$. Le produit est encore induit par l'application $D^n \rightarrow D^n \vee D^n$ écrasant l'équateur D^{n-1} en un point.
- Par définition $\pi_n(X, x_0, x_0) = \pi_n(X, x_0)$. Les groupes d'homotopie sont ainsi un cas particulier des groupes d'homotopie relatifs.

Notons une définition alternative des groupes d'homotopie relatifs : on vérifie facilement que $\pi_n(X, A, x_0) = [(I^n, \partial I^n, J^{n-1}), (X, A, x_0)]$, où $J^{n-1} := \overline{\partial I^n - I^{n-1}}$.

6.5. Caractérisation géométrique.

LEMME 6.5.1. *L'application $f : (D^n, S^{n-1}, s_0) \rightarrow (X, A, x_0)$ est nulle dans $\pi_n(X, A, x_0)$ si et seulement si elle est homotope relativement à S^{n-1} à une application d'image contenue dans A .*

DÉMONSTRATION. Si $[f] = [g]$ avec g une telle application, alors $[g] = 0$ via l'homotopie obtenant en précomposant g avec un rétracte par déformation de D^n sur s_0 .

Réciproquement si $[f] = 0$ via une homotopie $F : D^n \times I \rightarrow X$, regardons la famille des disques $D_t^n = ((D^n \setminus \partial D^n) \times \{t\}) \cup (\partial D^n \times [0, t]) \subset D^n \times I$. On obtient une homotopie entre f (pour $t = 0$) et une application à valeur dans A (pour $t = 1$), stationnaire égale à $f|_{S^{n-1}}$ sur S^{n-1} .

□

6.6. Functorialité. : Les $\pi_n : \mathbf{Top}_* \rightarrow \mathbf{Set}$, $n \in \mathbb{N}$, sont bien-sûr des foncteurs (resp. à valeur dans \mathbf{Group} pour $n \geq 1$, resp. \mathbf{Ab} pour $n \geq 2$).

6.7. Groupes d'homotopie et action du groupe fondamental. Soit $X \in \mathbf{Top}$ et $\gamma : I \rightarrow X$ un chemin reliant deux points $\gamma(0) = x_0$ et $\gamma(1) = x_1$ de X .

Pout tout espace $(Y, y_0) \in \mathbf{Top}_*^{nd}$ et toute application $f_0 : (Y, y_0) \rightarrow (X, x_0)$ il existe un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \{y_0\} & \longrightarrow & X^I \\ \downarrow & \nearrow F & \downarrow \\ Y & \xrightarrow{f_0} & X \end{array} .$$

Ainsi $f_0 : (Y, y_0) \longrightarrow (X, x_0)$ est homotope à l'application $f_1 : (Y, y_0) \longrightarrow (X, x_1)$. On vérifie facilement qu'on définit ainsi une application

$$[(Y, y_0), (X, x_0)]_* \xrightarrow{R_\gamma} [(Y, y_0), (X, x_1)]_*$$

$$[f_0] \longmapsto [f_1]$$

indépendante du choix de l'homotopie F , en particulier une action à droite de $\pi_1(X, x_0)$ sur $[(Y, y_0), (X, x_0)]_*$.

COROLLAIRE 6.7.1. *Soit $(X, x_0) \in \mathbf{Top}_*$. Les groupes d'homotopie $\pi_n(X, x_0)$, $n \geq 2$, sont naturellement des $\mathbb{Z}[\pi_1(X, x_0)]$ -module à droite.*

- REMARQUES 6.7.2.** – On vérifie également immédiatement que l'action de $\pi_1(X, x_0)$ sur lui-même définie précédemment n'est autre que l'action par conjugaison.
- Même pour un CW-complexe fini X les groupes d'homotopies $\pi_n(X, x_0)$ ne sont pas en général des $\mathbb{Z}[\pi_1(X, x_0)]$ -modules de type fini. Si par contre X est simplement connexe et fini nous verrons (c.f. corollaire 21.3.8) que les $\pi_n(X, x_0)$ sont des \mathbb{Z} -modules de type fini.

DÉFINITION 6.7.3. *Soit $X \in \mathbf{Top}_*$ et n un entier positif. L'espace X est dit n -simple si l'action de $\pi_1(X)$ sur $\pi_n(X)$ est triviale. L'espace X est dit simple, ou abélien, s'il est n -simple pour tout entier positif n .*

6.8. Suite longue d'homotopie.

THÉORÈME 6.8.1. *Soit $x_0 \in B \subset A \subset X \in \mathbf{Top}_*$. La suite longue d'homotopie :*

$$\cdots \longrightarrow \pi_n(A, B, x_0) \xrightarrow{i_*} \pi_n(X, B, x_0) \xrightarrow{j_*} \pi_n(X, A, x_0) \xrightarrow{\partial} \pi_{n-1}(A, B, x_0) \longrightarrow \cdots \longrightarrow \pi_1(X, A, x_0) .$$

est exacte, où

- $i : (A, B) \longrightarrow (X, B)$ est l'inclusion naturelle,
- $j : (X, B) \longrightarrow (X, A)$ est l'inclusion naturelle,
- si $f : (D^n, S^{n-1}, s_0) \longrightarrow (X, A, x_0)$ alors $\partial f = f|_{S^{n-1}}$ où l'on regarde S^{n-1} comme $D^{n-1}/\partial D^{n-1}$.

DÉMONSTRATION. La preuve se fait à la main aisément. Montrons par exemple l'exactitude en $\pi_n(X, A, x_0)$.

Pour $\partial \circ j_ = 0$:* Soit $[f] \in \pi_n(X, B, x_0)$ avec $f : (D^n, S^{n-1}, s_0) \longrightarrow (X, B, x_0)$. La classe de $\partial \circ j_*([f]) \in \pi_{n-1}(A, B, x_0)$ est représentée par la restriction de $j \circ f : (D^n, S^{n-1}, s_0) \longrightarrow (X, A, x_0)$ à $S^{n-1} = D^{n-1}/\partial D^{n-1}$. Comme f envoie S^{n-1} sur B , cette classe est nulle d'après le lemme 6.5.1.

Pour $\ker \partial \subset \text{Im } j_$:* Soit $f : (D^n, S^{n-1}, s_0) \longrightarrow (X, A, x_0)$ telle que $\partial[f] = 0$. Donc

$$[f|_{S^{n-1}}] = 0 \in \pi_n(A, B, x_0) .$$

D'après le lemme 6.5.1, il existe donc une homotopie

$$F : S^{n-1} \times I \longrightarrow A$$

avec

$$F_0 = f|_{S^{n-1}} \text{ et } F_1(S^{n-1}) \subset B .$$

Regardons D^n comme recollement d'un disque intérieur D^n le long de S^{n-1} avec une couronne extérieure $S^{n-1} \times I$ et considérons l'application $(F, f) : (D^n, S^{n-1}, s_0) \rightarrow (X, B, x_0)$ obtenue par collage de f sur la boule intérieure avec F sur la couronne extérieure. On a alors $[f] = j_*[(F, f)]$. \square

La section suivante étudie les notions de fibres et cofibres d'homotopie, qui permettront de donner une preuve plus conceptuelle de la suite longue d'homotopie et de considérer \mathbf{Top}_* comme une catégorie de modèle.

7. Fibrations, fibres et cofibres d'homotopie

7.1. Fibration. Commençons par définir la notion duale de la notion de cofibration définie à la section 3.1.

DÉFINITION 7.1.1. *On dit que $E \rightarrow B \in \mathbf{Top}$ a la propriété de relèvement des homotopies relativement à X si on a*

$$\begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & E \\ \downarrow & \nearrow \text{dotted} & \downarrow \\ X \times I & \longrightarrow & B \end{array} .$$

On dit que $E \rightarrow B$ est une fibration (de Hurewicz) si $E \rightarrow B$ a la propriété de relèvement des homotopies relativement à tout $X \in \mathbf{Top}$.

On dit que $E \rightarrow B$ est une fibration de Serre si $E \rightarrow B$ a la propriété de relèvement des homotopies relativement à D^n pour tout entier positif n (de manière équivalente : relativement à tout CW-complexe).

7.2. Pushout et pullback. Les catégories \mathbf{Top} et \mathbf{Top}_* sont munies de pushout et pullback.

$$\text{Pull-back : } \{(x, z) \in X \times Z / f(x) = h(z)\} \longrightarrow X \quad \text{est cartésien.}$$

$$\begin{array}{ccc} \downarrow & & \downarrow f \\ Z & \xrightarrow{h} & Y \end{array}$$

$$\text{Pushout : } \begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{h} & Z \\ f \downarrow & & \downarrow \\ Y & \longrightarrow & Z \amalg Y / (f(x) = h(x)) \end{array} \quad \text{est cocartésien.}$$

LEMME 7.2.1. *Le pullback d'une fibration est une fibration. Dualement le pushout d'une cofibration est une cofibration.*

DÉMONSTRATION. Evident. \square

7.3. Cylindre et cofibre d'homotopie d'une application. Le but de cette section est de montrer que toute flèche de \mathbf{Top} (ou de \mathbf{Top}_*) peut, à équivalence d'homotopie près du but, être remplacée à notre convenance par une cofibration.

Dans \mathbf{Top} :

Cylindre de X	$X \times I$
Cylindre M_f de $f : X \rightarrow Y$	$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ (x,1) \downarrow & & \downarrow \\ X \times I & \longrightarrow & M_f = Y \cup_f (X \times I) \end{array}$
Cône de X	$CX = X \times I / (X \times \{0\})$
Cofibre d'homotopie C_f de $f : X \rightarrow Y$	$C_f = Y \cup_f CX = M_f / (X \times \{0\})$

Les notions analogues dans \mathbf{Top}_* s'obtiennent à partir des définitions de \mathbf{Top} en remplaçant I par $I \coprod \{*\}$, le coproduit \coprod de \mathbf{Top} par le coproduit \vee de \mathbf{Top}_* , le produit \times par le produit \wedge , et les applications continue par les applications continues pointées. Quand I est considéré comme objet de \mathbf{Top}_* , son point base est 0. On obtient donc la version réduite :

Dans \mathbf{Top}_* :

Cylindre de X	$X \wedge (I \coprod \{*\})$
Cylindre de $f : X \rightarrow Y$	$\tilde{M}_f = M_f / (I \times \{x_0\})$
Cône de X	$\tilde{C}X = I \wedge X = CX / (I \times \{x_0\})$
Cofibre d'homotopie de $f : X \rightarrow Y$	$\tilde{C}_f = Y \cup_f \tilde{C}X = \tilde{M}_f / (X \times \{0\}) = C_f / (I \times \{x_0\})$

- REMARQUES 7.3.1. – Notons que si $f : X \rightarrow Y \in \mathbf{Top}_*^{nd}$ les espaces \tilde{M}_f et \tilde{C}_f sont homotopiquement équivalents respectivement à M_f et C_f puisque $I \times \{x_0\}$ est homotopiquement trivial.
- Comme corollaire à la remarque précédente, de nombreuses références ne distinguent pas \tilde{C}_f de C_f pour $f : X \rightarrow Y \in \mathbf{Top}_*^{nd}$. Remarquons en effet que C_f est un espace naturellement pointé.

EXEMPLE 7.3.2. Si on note $\pi : X \rightarrow \{*\}$ la projection canonique, le cylindre de π est homéomorphe à CX et la cofibre C_π n'est autre que $C_\pi = SX$. Idem pour les versions réduites : $\tilde{C}_\pi = \Sigma X$.

PROPOSITION 7.3.3. Soit $f : X \rightarrow Y$ dans \mathbf{Top} . Alors l'injection canonique $Y \rightarrow M_f$ est une équivalence d'homotopie (d'inverse la projection $p : M_f \rightarrow Y$ définie par $p(x, t) = f(x)$ pour $x \in X$ et $p|_Y = 1_Y$) et l'application $j : X \hookrightarrow M_f$ définie par $j(x) = (x, 0)$ est une cofibration, de cofibre $C_f = M_f / X$, appelée la cofibre d'homotopie de f . L'application f se factorise ainsi en la composée d'une

cofibration et d'une équivalence d'homotopie :

$$\begin{array}{ccc}
 & & M_f \\
 & \nearrow j & \downarrow p \\
 X & \xrightarrow{f} & Y
 \end{array}
 \quad .$$

DÉMONSTRATION. Exercice facile. □

7.4. Espace de chemin et fibre d'homotopie d'une application. On observe que la section précédente se dualise.

	Top
Espace de chemin de Y	Y^I
Espace de chemin E_f de $f : X \rightarrow Y$	$ \begin{array}{ccc} E_f & \longrightarrow & Y^I \\ \downarrow & & \downarrow p_0 \\ X & \xrightarrow{f} & Y \end{array} $

PROPOSITION 7.4.1. Soit $f : X \rightarrow Y$ dans **Top**. Alors la projection canonique $E_f \rightarrow X$ est une équivalence d'homotopie (d'inverse l'application $i : X \rightarrow E_f$ donnée par $i(x) = (x, c_{f(x)})$ où c_u désigne le lacet constant d'image u) et la projection $p_1 : E_f \rightarrow Y$ est une fibration. Toute application $f : X \rightarrow Y$ factorise ainsi en une composée d'une équivalence d'homotopie et d'une fibration.

$$\begin{array}{ccc}
 X & \xrightarrow{f} & Y \\
 \downarrow i & \nearrow p_1 & \\
 E_f & &
 \end{array}
 \quad .$$

Alors qu'on avait une bonne notion de cofibre d'une application non-pointée, la notion de fibre dépend du choix d'un point base y_0 de Y .

DÉFINITION 7.4.2. Soit $f : X \rightarrow Y$ dans **Top** et $y_0 \in Y$. On définit la fibre d'homotopie de f en y_0 par :

$$P_{f,y_0} = \{(x, \gamma : I \rightarrow Y) / \gamma(0) = f(x) \text{ et } \gamma(1) = y_0\}$$

REMARQUE 7.4.3. Si on travaille directement dans **Top*** et toujours en remplaçant I par $I \coprod \{*\}$, on obtient la même version réduite $\tilde{E}_f = E_f$ et LA fibre d'homotopie $P_f = P_{f,y_0}$.

EXEMPLE 7.4.4. Si $\iota : \{y_0\} \rightarrow Y$ est un objet de **Top***, on a $E_\iota = PY$ espace des chemins de Y commençant en y_0 et $P_\iota = \Omega Y$.

7.5. Exactitude des fibrations et coexactitude des cofibrations.

PROPOSITION 7.5.1. Soit $X \xrightarrow{f} Y$ une fibration dans \mathbf{Top}_* de fibre d'homotopie $F \xrightarrow{i} X$. Alors la suite $F \xrightarrow{i} X \xrightarrow{f} Y$ est exacte, c'est-à-dire que pour tout $W \in \mathbf{Top}_*$ on a une suite exacte d'ensembles pointés :

$$[W, F]_* \xrightarrow{i_*} [W, X]_* \xrightarrow{j_*} [W, Y]_* .$$

Dualement soit $X \xrightarrow{f} Y$ une cofibration dans \mathbf{Top}_* de cofibre d'homotopie $Y \xrightarrow{j} C$. Alors la suite $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{j} C$ est coexacte, c'est-à-dire que pour tout $W \in \mathbf{Top}_*$ on a la suite exacte d'ensembles pointés

$$[X, W]_* \xleftarrow{f^*} [Y, W]_* \xleftarrow{j^*} [C, W]_* .$$

DÉMONSTRATION. Donnons la preuve dans le cas des cofibrations. Le cas des fibrations se traite dualement. Commençons par le :

LEMME 7.5.2. Une application $f : X \rightarrow Y$ de \mathbf{Top}_* est homotopiquement triviale (relativement aux points bases) si et seulement si f s'étend en $\tilde{f} : \tilde{C}X \rightarrow Y$ (dualement : si et seulement si elle s'étend en $F : X \rightarrow PY$).

DÉMONSTRATION. Notons $H : X \times I \rightarrow Y$ l'homotopie reliant l'application constante $H(\cdot, 0) = y_0$ à l'application $H(\cdot, 1) = f$. Comme $H(X \times \{0\} \cup \{x_0\} \times I) = y_0$, l'application H passe au quotient en

$$\tilde{f} : \tilde{C}X \rightarrow Y$$

et $\tilde{f}(x, 1) = f(x)$.

Réciproquement, la composée $X \times I \xrightarrow{q} \tilde{C}X \xrightarrow{\tilde{f}} Y$ fournit une homotopie (pointée) reliant f à l'application constante sur y_0 . □

LEMME 7.5.3. Soit $g : Y \rightarrow Z \in \mathbf{Top}_*$. La composée $g \circ f : X \rightarrow Z$ est nulle dans $[X, Z]_*$ si et seulement si g s'étend en $\tilde{g} : \tilde{C}f \rightarrow Z$. Dualement, soit $\phi : W \rightarrow X$. La composée $f \circ \phi$ est nulle dans $[W, Y]_*$ si et seulement si ϕ s'étend en $\Phi : W \rightarrow P_f$.

DÉMONSTRATION. C'est une généralisation du lemme précédent, qui traitait le cas $g = 1_Y$. □

Finissons la preuve de la proposition 7.5.1.

Montrons $\text{Im } j^* \subset (f^*)^{-1}(*)$. Remarquons que l'inclusion canonique $j : Y \rightarrow \tilde{C}_f$ s'étend canoniquement en $1_{\tilde{C}_f} : \tilde{C}_f \rightarrow \tilde{C}_f$. Par le lemme 7.5.3 on a donc $j \circ f \sim_* *$ donc $f^* \circ j^* = *$ et le résultat.

Réciproquement, si $[h] \in [Y, W]_*$ avec $f^*([h]) = *$ alors $h \circ f \sim_* *$. Par le lemme 7.5.3 l'application h s'étend à \tilde{C}_f et donc $[h] \in \text{Im } j^*$. □

7.6. Suites longues de Puppe. Nous itérons les constructions précédentes.

Soit $f : X \rightarrow Y \in \mathbf{Top}_*$ et $j : Y \rightarrow \tilde{C}_f$ l'application induite. Quel est le cône \tilde{C}_j ?

LEMME 7.6.1. On a des équivalences d'homotopie naturelles $\tilde{C}_j \simeq \Sigma X$ et $\tilde{C}_{\tilde{C}_f \rightarrow \tilde{C}_j} \simeq \Sigma Y$.

DÉMONSTRATION. On a par définition :

$$\tilde{C}_{Y \xrightarrow{j} \tilde{C}_f} = (Y \cup_f \tilde{C}X) \cup_j \tilde{C}Y$$

LEMME 7.6.2. *Soit $i : A \hookrightarrow X$ une cofibration. Alors $(X \cup_i \tilde{C}A)/\tilde{C}A \simeq_{\text{homeo}} X/A$.*

Donc

$$\tilde{C}_j/\tilde{C}Y \simeq (Y \cup_f \tilde{C}X)/Y \simeq \Sigma X .$$

Mais l'application quotient $\tilde{C}_j \rightarrow \tilde{C}_j/\tilde{C}Y$ est une équivalence d'homotopie car $\tilde{C}Y$ est contractile.

Pour la deuxième égalité, on a :

$$\begin{aligned} \tilde{C}_{\tilde{C}_f \rightarrow \tilde{C}_{Y \xrightarrow{j} \tilde{C}_f}} &= ((Y \cup_f \tilde{C}X) \cup_j \tilde{C}Y) \cup_k \tilde{C}(Y \cup_f \tilde{C}X) \\ &\simeq ((Y \cup_f \tilde{C}X) \cup_j \tilde{C}Y) \cup_k \tilde{C}(Y \cup_f \tilde{C}X) / \tilde{C}(Y \cup_f \tilde{C}X) \\ &\simeq (Y \cup_f \tilde{C}X) \cup_j \tilde{C}Y / (Y \cup_f \tilde{C}X) \\ &\simeq \tilde{C}Y/Y \simeq \Sigma Y . \end{aligned}$$

□

COROLLAIRE 7.6.3. *La suite longue (dite de Puppe)*

$$X \xrightarrow{f} Y \rightarrow \tilde{C}_f \rightarrow \Sigma X \rightarrow \Sigma Y \rightarrow \Sigma \tilde{C}_f \rightarrow \Sigma^2 X \rightarrow \dots$$

est co-exacte. De même dualement la suite longue

$$\dots \rightarrow \Omega^2 P_f \rightarrow \Omega^2 X \rightarrow \Omega^2 Y \rightarrow \Omega P_f \rightarrow \Omega X \rightarrow \Omega Y \rightarrow P_f \rightarrow X \rightarrow Y$$

est exacte.

DÉMONSTRATION. Immédiat. □

REMARQUE 7.6.4. Soit (X, A) une paire de \mathbf{Top}_* et notons $i : A \subset X$ l'inclusion. D'après le corollaire précédent on a la suite longue exacte

$$\dots \rightarrow \Omega^2 P_i \rightarrow \Omega^2 A \rightarrow \Omega^2 X \rightarrow \Omega P_i \rightarrow \Omega A \rightarrow \Omega X \rightarrow P_i \rightarrow A \rightarrow X .$$

D'où en appliquant $[S^0, \cdot]_*$:

$$\dots \rightarrow [S^0, \Omega^2 P_i]_* \rightarrow \pi_2(A) \rightarrow \pi_2(X) \rightarrow [S^0, \Omega P_i]_* \rightarrow \pi_1(A) \rightarrow \pi_1(X) .$$

Mais $P_i = P(X, A)$ est l'espace des chemins de X d'origine dans A et d'arrivée le point base $x_0 \in A \subset X$. En particulier $[S^0, P_i]_* = \pi_1(X, A)$ et plus généralement pour tout $n \geq 1$ on a $[S^0, \Omega^{n-1} P_i]_* = \pi_n(X, A)$. La suite longue de Puppe fournit ainsi une seconde preuve de l'existence de la suite exacte longue d'homotopie

$$\begin{aligned} \dots \rightarrow \pi_3(X, A) \rightarrow \pi_2(A) \rightarrow \pi_2(X) \rightarrow \pi_2(X, A) \rightarrow \pi_1(A) \\ \rightarrow \pi_1(X) \rightarrow \pi_1(X, A) \rightarrow \pi_0(A) \rightarrow \pi_0(X) \end{aligned}$$

pour une paire $(X, A) \in \mathbf{Top}_*$. On démontrerait de façon analogue la version relative (théorème 6.8.1).

8. Géométrie des fibrations

8.1. Fibrations de Hurewicz. De même qu'on a caractérisé les cofibrations $A \hookrightarrow X$ par la propriété d'existence d'une rétraction $X \times I \rightarrow X \times \{0\} \cup A \times I$ on a dualement le

LEMME 8.1.1. *Soit $p : E \rightarrow B$. Alors p est une fibration de Hurewicz si et seulement si il existe une application*

$$\phi : E \times_B B^I \rightarrow E^I$$

avec $\phi(e, \gamma)(0) = e$ et $p(\phi(e, \gamma)(t)) = \gamma(t)$.

LEMME 8.1.2. *Soit $p : E \rightarrow B$ une fibration de Hurewicz. Alors les fibres $E_b = p^{-1}(b)$ sont toute homotopiquement équivalentes quand b décrit une composante connexe par arc de B .*

DÉMONSTRATION. Soit $\gamma : I \rightarrow B$ un chemin dans B , montrons que les fibres $E_{\gamma(0)}$ et $E_{\gamma(1)}$ sont homotopiquement équivalentes. Considérons le diagramme

$$\begin{array}{ccc} E_{\gamma(0)} & \xrightarrow{\quad} & E \\ \downarrow & \nearrow \tilde{g} & \downarrow p \\ E_{\gamma(0)} \times I & \xrightarrow{g(x,t)=\gamma(t)} & B \end{array} .$$

Par définition $\tilde{g}_t(E_{\gamma(0)}) \subset E_{\gamma(t)}$ pour tout $t \in I$. En particulier on peut définir l'application $L_\gamma = \tilde{g}_1 : E_{\gamma(0)} \rightarrow E_{\gamma(1)}$. En utilisant encore une fois la propriété de relèvement des homotopies de la fibration $p : E \rightarrow B$, on vérifie facilement que si γ et γ' sont homotopes relativement à ∂I alors les classes d'homotopie de L_γ et $L_{\gamma'}$ coïncident (en particulier L_γ ne dépend pas du choix du relèvement \tilde{g}), et que $L_{\gamma\gamma'}$ est homotope au composé $L_\gamma \circ L_{\gamma'}$. On en déduit que L_γ est une équivalence d'homotopie, d'inverse $L_{\bar{\gamma}}$.

□

La notion intuitive de fibre et la notion de fibre d'homotopie coïncident dans le cas d'une fibration d'Hurewicz :

LEMME 8.1.3. *Soit $p : E \rightarrow B$ une fibration de Hurewicz et $E \xrightarrow{\sim} E_p \rightarrow B$ la factorisation de p via l'espace de chemin E_p de p . Alors pour tout $b \in B$ la fibre d'homotopie $E_{p,b}$ de p au point b est homotopiquement équivalente à la fibre E_b de p .*

DÉMONSTRATION. Considérons le diagramme

$$\begin{array}{ccc} E_p & \xrightarrow{\tilde{\phi}_0} & E \\ \downarrow & \nearrow \tilde{\phi} & \downarrow p \\ E_p \times I & \xrightarrow{\phi} & B \end{array} ,$$

où pour tout point $(e, \gamma) \in E_p$ on pose $\phi_t(e, \gamma) = \gamma(t)$ et $\tilde{\phi}_0(e, \gamma) = e$. Le relèvement $\tilde{\phi}_t : E_p \rightarrow E$ permet de définir une homotopie $H_t : E_p \rightarrow E_p$ entre 1_{E_p} et $H_1 : E_p \rightarrow E$ via

$$h_t(e, \gamma) = (\tilde{g}_t(e, \gamma), \gamma|_{[t,1]}) .$$

Remarquons que cette homotopie respecte la structure de fibration :

$$\begin{array}{ccc} E_p & \xrightarrow{H_t} & E_p \\ p_1 \downarrow & & \downarrow p_1 \\ B & \xlongequal{\quad} & B \end{array} .$$

Si $i : E \rightarrow E_p$ est l'inclusion naturelle (chemin constant) alors $i \circ H_1 \simeq_{H_t} 1_{E_p}$ et $H_1 \circ i \simeq_{h_t|_E} 1_E$. Donc i est une équivalence d'homotopie entre E et E_p , qui en restriction à la fibre de p_1 induit une équivalence d'homotopie de E_b avec $(E_p)_b$ pour tout $b \in B$.

□

COROLLAIRE 8.1.4. *Soit $p : E \rightarrow B$ une fibration de Hurewicz. Alors pour tout $b \in B$, tout $e \in E_b$ et tout $n \geq 1$ on a un isomorphisme naturel*

$$p_* : \pi_n(E, E_b, e) \xrightarrow{\sim} \pi_n(B, b) .$$

REMARQUE 8.1.5. On dispose d'un critère local de reconnaissance des fibrations sur une base paracompacte :

THÉORÈME 8.1.6 (Hurewicz, c.f.[6]). *Soit $p : E \rightarrow B$ une application continue. Supposons B paracompacte. S'il existe un recouvrement ouvert $\{U_\alpha\}$ de B telle que $p : p^{-1}(U_\alpha) \rightarrow U_\alpha$ est une fibration alors $p : E \rightarrow B$ est une fibration.*

8.2. Lien cofibration/fibration de Hurewicz. Le théorème suivant, que nous démontrerons ultérieurement dans la section sur les catégories de modèles, est le résultat principal reliant cofibrations et fibrations de Hurewicz :

THÉORÈME 8.2.1. *Considérons le diagramme de **Top***

$$\begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & E \\ \iota \downarrow & \nearrow \phi & \downarrow p \\ X & \longrightarrow & B \end{array}$$

Alors $A \xrightarrow{\iota} X$ si et seulement si le diagramme précédent admet une diagonale ϕ pour toute fibration (de Hurewicz) $p : E \rightarrow B$ qui est une équivalence d'homotopie. Réciproquement on a $E \xrightarrow{p} B$ si et seulement si le diagramme précédent admet une diagonale ϕ pour toute cofibration $A \xrightarrow{\iota} X$ qui est une équivalence d'homotopie.

8.3. Fibrations de Serre. Si $p : E \rightarrow B$ désigne une fibration de Serre, il n'est pas vrai en général que fibres de p et fibre homotopique soient homotopiquement équivalentes. Cependant les fibrations de Serre vérifient encore le corollaire 8.1.4 :

THÉORÈME 8.3.1. *Soit $p : E \rightarrow B$ une fibration de Serre. Alors pour tout $n \geq 1$ l'application*

$$p_* : \pi_n(E, E_b, e) \longrightarrow \pi_n(B, b)$$

est un isomorphisme, et ce pour tous points b de B et $e \in E_b$.

DÉMONSTRATION. Montrons d'abord que p_* est surjective. Soit $f : (I^n, \partial I^n) \rightarrow (B, b)$ le représentant d'une classe dans $\pi_n(B, b)$. On a le diagramme

$$\begin{array}{ccc} I^{n-1} \times \{0\} \cup \partial I^{n-1} \times I & \xrightarrow{e_0} & E \\ \downarrow \sim & \searrow \tilde{f} & \downarrow \\ I^n & \xrightarrow{f} & B \end{array} ,$$

où e_0 désigne l'application constante sur le point base e_0 de E . Comme $f(\partial I^n) = \{b\}$, nécessairement $\tilde{f}(\partial I^n) \subset E_b$. Mais alors $\tilde{f} : (I^n, \partial I^n, J^{n-1}) \rightarrow (E, E_b, e_0)$ représente un élément de $\pi_n(E, E_b, e_0)$ avec $p_*([\tilde{f}]) = [f]$.

Montrons l'injectivité de p_* . Soit $\tilde{f}_0, \tilde{f}_1 : (I^n, \partial I^n, J^{n-1}) \rightarrow (E, E_b, e_0)$ avec $p_*([\tilde{f}_0]) = p_*([\tilde{f}_1])$. Soit $G : (I^n \times I, \partial I^n \times I) \rightarrow (B, b_0)$ une homotopie entre $p\tilde{f}_0$ et $p\tilde{f}_1$. On a le diagramme

$$\begin{array}{ccc} I^n \times \{0\} \cup I^n \times \{1\} \cup J^{n-1} \times I & \xrightarrow{(\tilde{f}_0, \tilde{f}_1, e_0)} & E \\ \downarrow \sim & \searrow \tilde{G} & \downarrow \\ I^n \times I & \xrightarrow{G} & B \end{array} .$$

La famille $\tilde{G}_t : (I^n, \partial I^n, J^{n-1}) \rightarrow (E, E_b, e_0)$ est une homotopie entre \tilde{f}_0 et \tilde{f}_1 . Donc p_* est injective. \square

8.4. Quasi-fibrations. Il est intéressant de considérer la classe plus large d'applications satisfaisant la propriété précédente des fibrations de Serre :

DÉFINITION 8.4.1. Une application $p : E \rightarrow B$ est une quasi-fibration si pour tout point $b \in B$ et pour tout $e \in E_b$ l'application

$$p_* : \pi_i(E, E_b, e) \rightarrow \pi_i(B, b)$$

est un isomorphisme pour tout $i \geq 0$.

PROPOSITION 8.4.2. Soit $p : E \rightarrow B$ une quasi-fibration (par exemple une fibration de Serre). Pour tous points $b \in B$ et $e \in E_b$ on a une suite exacte longue

$$\cdots \rightarrow \pi_i(E_b, e) \rightarrow \pi_i(E, e) \rightarrow \pi_i(B, b) \rightarrow \pi_{i-1}(E_b, e) \rightarrow \cdots$$

DÉMONSTRATION. Il suffit décrire la suite exacte longue d'homotopie relative de la paire (E, E_b) et de remplacer $\pi_i(E, E_b, e)$ par $\pi_i(B, b)$. \square

8.5. Equivalence faible d'homotopie et quasi-fibrations.

DÉFINITION 8.5.1. Une application $f : X \rightarrow Y$ est une n -équivalence d'homotopie si $f_* : \pi_i(X, x) \rightarrow \pi_i(Y, f(x))$ est un isomorphisme pour tout x de X et tout $i \leq n-1$, et une surjection pour $i = n$. Une application $f : X \rightarrow Y$ est une équivalence faible d'homotopie si c'est une n -équivalence d'homotopie pour tout entier naturel n .

Exemple d'une équivalence faible qui n'est pas une équivalence d'homotopie : le quasi-cercle. Soit X le quasi-cercle : c'est le fermé de \mathbb{R}^2 union d'une portion du graphe de $\sin(1/x)$ du segment $[-1, 1]$ en abscisse

0 et d'un arc reliant ces deux parties. Le quasi-cercle n'est pas localement connexe par arc bien qu'il soit connexe. Tous ses groupes d'homotopie sont nuls bien qu'il ne soit pas contractile.

Exemple d'une quasi-fibration qui n'est pas une fibration : Soit $f : X \rightarrow Y$ et $p : M_f \rightarrow I$ la projection naturelle du cylindre de f sur l'intervalle. Cette projection p est une quasi-fibration si et seulement si f est une équivalence faible : on a alors $\pi_n(M_f, p^{-1}(i)) = 0 = \pi_n(I, i)$ pour tout $i \in I$ et $n \geq 0$. En général p n'est pas une fibration : si f n'est pas surjective il y a des chemins dans I ne se relevant pas en des chemins de M_f de point base fixé.

LEMME 8.5.2. *Une application $p : E \rightarrow B$ est une quasi-fibration si et seulement si pour tout point b de B l'inclusion naturelle $p^{-1}(b) \subset F_b$ de la fibre de p en b dans la fibre d'homotopie est une équivalence faible.*

DÉMONSTRATION. Soit $F_b \rightarrow E_p \rightarrow B$ l'espace de chemin de p . On a alors un triangle commutatif

$$\begin{array}{ccc} \pi_n(E, p^{-1}(b)) & \xrightarrow{\quad} & \pi_n(E_p, F_b) \\ & \searrow & \swarrow \\ & \pi_n(B, b) & \end{array} .$$

L'application de droite est un isomorphisme pour tout $n \geq 0$. L'application de gauche est donc un isomorphisme si et seulement si celle du dessus l'est, ce qui revient à dire que les applications $\pi_n(p^{-1}(b)) \rightarrow \pi_n(F_b)$ sont des isomorphismes pour tout $n \geq 0$.

8.6. Fibrés.

DÉFINITION 8.6.1. *Une application $p : E \rightarrow B$ est un fibré de fibre F si tout point de B admet un voisinage U muni d'un homéomorphisme $h : p^{-1}(U) \simeq U \times F$ rendant commutatif le diagramme :*

$$\begin{array}{ccc} p^{-1}(U) & \xrightarrow{\quad h \quad} & U \times F \\ & \searrow p \quad \swarrow & \\ & U & \end{array} .$$

LEMME 8.6.2. *Le pull-back d'un fibré est un fibré.*

PROPOSITION 8.6.3. *Tout fibré $p : E \rightarrow B$ est une fibration de Serre.*

DÉMONSTRATION. Il suffit de montrer la propriété de relèvement pour les cubes. Soit $G : I^n \times I \rightarrow B$ une homotopie qu'on souhaite relever en partant de $\tilde{g}_0 : I^n \rightarrow E$. Recouvrons B par des ouverts $\{U_\alpha\}$ sur lesquels E se trivialise. On peut alors diviser I^n en petits cubes C et I en intervalles I_j tels que $G(C \times I_j) \subset U_\alpha$. Par induction sur la dimension n on peut supposer que les \tilde{g}_t ont déjà été construits sur ∂C pour tous les sous-cubes C . Ce qui nous ramène au cas d'un seul cube C c'est-à-dire au cas d'un fibré trivial. L'application $\tilde{g}_t : I^n \times I \rightarrow B \times F$ a alors nécessairement pour première coordonnée g_t . La seconde coordonnée s'obtient comme composée de la rétraction $I^n \times I \rightarrow I^n \times \{0\} \cup \partial I^n \times I$ avec l'homotopie donnée au bord $I^n \times \{0\} \cup \partial I^n \times I \rightarrow F$.

□

REMARQUE 8.6.4. D'après le théorème 8.1.6 de Hübsch et Hurewicz, les fibrés de base paracompacte sont en fait des fibrations de Hurewicz [6].

8.6.1. *Revêtements.*

DÉFINITION 8.6.5. *Les fibrés de fibre F un espace topologique discret sont appelés revêtements de la base B .*

On déduit immédiatement de la proposition 8.4.2 le

THÉORÈME 8.6.6. *Soit $\tilde{X} \rightarrow X$ un revêtement. Alors $\pi_1(\tilde{X}) \hookrightarrow \pi_1(X)$ et $\pi_i(\tilde{X}) \xrightarrow{\sim} \pi_i(X)$, $i \geq 2$.*

EXEMPLE 8.6.7. le revêtement $\mathbb{R} \xrightarrow{\exp} S^1$. C'est un revêtement de fibre \mathbb{Z} . Appliquons la suite longue d'homotopie, le fait que \mathbb{R} est contractile donc de groupe d'homotopie triviaux et que \mathbb{Z} est discret, on en déduit le

LEMME 8.6.8. *Les groupes d'homotopie de S^1 sont tous nuls sauf $\pi_1(S^1) = \mathbb{Z}$ (autrement dit, S^1 est un espace d'Eilenberg MacLane de type $K(\mathbb{Z}, 1)$, voir plus loin).*

8.6.2. *Les fibrés $S^1 \rightarrow S^{2n+1} \rightarrow \mathbb{C}\mathbb{P}^n$. On considère $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$ comme quotient de la sphère unité S^{2n+1} de \mathbb{C}^{n+1} par l'action propre du groupe S^1 des complexes de norme 1 agissant par multiplication scalaire sur \mathbb{C}^{n+1} . On vérifie facilement qu'on obtient ainsi un fibré.*

Le cas $n = 1$ est particulièrement intéressant. Comme $\mathbb{C}\mathbb{P}^1 = S^2$, on obtient ainsi le fibré $S^1 \rightarrow S^3 \rightarrow S^2$, dit fibré de Hopf. De la suite longue d'homotopie

$$\cdots \rightarrow \pi_3(S^1) \rightarrow \pi_3(S^3) \rightarrow \pi_3(S^2) \rightarrow \pi_2(S^1) \rightarrow \cdots$$

et du lemme précédent on déduit $\pi_3(S^2) \simeq \pi_3(S^3)$.

Un autre cas intéressant est le cas $S^1 \rightarrow S^\infty \rightarrow \mathbb{C}\mathbb{P}^\infty$. Comme S^∞ est contractile, on obtient que tous les groupes d'homotopie de $\mathbb{C}\mathbb{P}^\infty$ sont nuls, sauf $\pi_2(\mathbb{C}\mathbb{P}^\infty) = \mathbb{Z}$ (autrement dit, $\mathbb{C}\mathbb{P}^\infty$ est un $K(\mathbb{Z}, 2)$). \square

9. Propriétés homotopiques des CW-complexes

DÉFINITION 9.0.9. *On dit qu'une paire d'espaces (X, A) est n -connexe si pour tout $i \leq n$ et tout $x \in A$ on a $\pi_i(X, A) = 0$. Au vu de la définition 8.5.1 il revient au même de dire que l'inclusion $A \rightarrow X$ est une n -équivalence.*

9.1. Approximation cellulaire.

DÉFINITION 9.1.1. *Une application $f : X \rightarrow Y$ entre deux CW-complexes est dite cellulaire si $f(X^n) \subset Y^n$.*

THÉORÈME 9.1.2 (Approximation Cellulaire). *Toute application $f : X \rightarrow Y$ entre CW-complexes est homotope à une application cellulaire. Si f est déjà cellulaire sur un sous-complexe $A \subset X$ l'homotopie peut être prise relativement à A .*

COROLLAIRE 9.1.3. *Soit X un CW-complexe. Alors (X, X^n) est n -connexe.*

COROLLAIRE 9.1.4. *$\pi_n(S^k) = 0$ pour $n < k$.*

DÉMONSTRATION. Munissons S^i de sa structure usuelle de CW -complexe $S^i = e^0 \cup e^i$ avec sa 0-cellule e^0 comme point base. Alors toute application pointée $f : S^n \rightarrow S^k$ est homotope, relativement aux points bases, à une application cellulaire, donc constante si $n < k$. □

DÉMONSTRATION. La preuve du théorème se fait par récurrence sur le degré du squelette. Supposons donc que

$$f|_{X^{n-1}} : X^{n-1} \rightarrow Y$$

est cellulaire.

Soit e^n une n -cellule de X . L'adhérence $\overline{e^n}$ est compacte dans X donc $f(\overline{e^n})$ est compact dans Y . Donc $f(\overline{e^n})$ rencontre seulement un nombre fini de cellules de Y . Soit $e^k \subset Y$ une cellule de dimension maximale parmi celles rencontrant $f(\overline{e^n})$.

LEMME 9.1.5 (d'évitement faible). *Supposons $k > n$. Alors $f|_{X^{n-1} \cup e^n}$, à homotopie relativement à X^{n-1} près, est telle que $f(e^n)$ évite un point p de e^k .*

Admettons ce lemme et finissons la preuve du théorème.

Comme $Y^k \setminus \{p\}$ se rétracte par déformation sur $Y^k \setminus e^k$, l'application $f|_{X^{n-1} \cup e^n}$, à homotopie relativement à X^{n-1} près, vérifie $f(e^n) \cap e^k = \emptyset$. Par répétition sur l'ensemble fini de cellules e^k , on peut donc supposer que $f(e^n)$ ne rencontre aucune cellule de dimension $> n$.

On peut itérer le processus sur toutes les n -cellules de X , en restant fixe sur les n -cellules de A (où f est déjà cellulaire). Finalement $f|_{X^n}$ est homotope relativement à $X^{n-1} \cup A^n$ à une application cellulaire.

Comme $X^n \cup A \hookrightarrow X$, on peut étendre cette homotopie (et l'homotopie constante sur A) en une homotopie définie sur tout X . Définissons cette homotopie sur un intervalle de temps $[1 - 2^{-n}, 1 - 2^{-n-1}]$ et recollons. Ce qui achève la preuve du théorème. □

Le lemme d'évitement faible 9.1.5 est une conséquence du lemme suivant :

LEMME 9.1.6 (d'évitement fort). *Soit $f : I^n \rightarrow W \cup_\phi e^k$. Alors $f \sim f_1$ rel. $f^{-1}(W)$ où f_1 est telle qu'il existe un simplexe $\Delta^k \subset e^k$ avec $f_1^{-1}(\Delta^k)$ est une union finie (éventuellement vide) d'un nombre fini de polyèdres convexes de I^n et f_1 est la restriction d'une surjection linéaire sur chacun de ces polyèdres.*

DÉMONSTRATION. c.f. [5, p.350-351] □

PROPOSITION 9.1.7. *Le lemme d'évitement fort 9.1.6 implique le lemme d'évitement faible 9.1.5.*

DÉMONSTRATION. Soit $f : X^{n-1} \cup e^n \rightarrow Y^k = (Y^k \setminus e^k) \cup_\phi e^k$. En considérant l'application caractéristique de e^n et en appliquant le lemme 9.1.6, on obtient f_t une homotopie de f relativement à X^{n-1} vers une application f_1 telle que $f_1^{-1}(\Delta^k)$ est vide car $n < k$ (il n'y a donc pas de surjection linéaire $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$). □

9.2. Théorème de Whitehead.

THÉORÈME 9.2.1 (Whitehead). *Soit $f : X \rightarrow Y$ une équivalence faible de CW-complexes pointés. Alors f est une équivalence d'homotopie. Si de plus f est l'inclusion d'un sous-complexe alors X est rétracte par déformation de Y .*

DÉMONSTRATION.

LEMME 9.2.2 (de compression). *Soit (X, A) une CW-paire et (Y, B) une paire de **Top** avec $B \neq \emptyset$. Supposons que pour tout n tel que $X - A$ a une cellule de dimension n , alors $\pi_n(Y, B, y_0) = 0$ pour tout $y_0 \in B$. Alors toute application $f : (X, A) \rightarrow (Y, B)$ est homotope relativement à A à une application $X \rightarrow B$.*

REMARQUE 9.2.3. Pour $n = 0$, $\pi_0(Y, B, y_0) = 0$ signifie que (Y, B) est 0-connexe c'est-à-dire que B rencontre toutes les composantes connexes par arc de Y .

DÉMONSTRATION. Par récurrence sur le degré du squelette, on suppose qu'après homotopie on a $f_{X^{k-1}} : X^{k-1} \rightarrow B$. Soit $\phi : (D^k, \partial D^k) \rightarrow e^k$ l'application caractéristique d'une cellule e^k de $X - A$.

Comme $\pi_k(Y, B, y_0) = 0$, la composée $f \circ \phi : (D^k, \partial D^k) \rightarrow (Y, B)$ peut être compressée en B après homotopie. Cette homotopie induit une homotopie de $f_{X^{k-1} \cup e^k}$. En appliquant simultanément ces homotopies pour toutes les k -cellules de $X - A$, on voit que $f_{X^k \cup A}$ se comprime relativement à A en une application à valeur dans B .

Comme $X^k \cup A \hookrightarrow X$, cette homotopie s'étend à tout X . Ce qui finit la récurrence.

On exécute cette homotopie sur l'intervalle de temps $[1 - 2^{-k}, 1 - 2^{-k-1}]$ et on recolle. □

Finissons la preuve du théorème.

Si $f : X \subset Y$ est une inclusion de CW-complexes, comme $f_* : \pi_*(X) \rightarrow \pi_*(Y)$ est un isomorphisme on en déduit $\pi_n(Y, X) = 0$ pour tout $n \geq 0$. Appliquons le lemme précédent à l'identité de (Y, X) , on obtient une rétraction par déformation de Y dans X .

En général, factorisons $f : X \rightarrow Y$ en $X \subset M_f \rightarrow Y$. La projection cylindrique $M_f \rightarrow Y$ est une équivalence d'homotopie. On est donc ramené à montrer que M_f est homotopiquement équivalent à X si $\pi_k(M_f, X) = 0$ pour tout k .

On applique le cas précédent si f est cellulaire (auquel cas (M_f, X) est une CW-paire). Si f n'est pas cellulaire, par le théorème d'approximation cellulaire f est homotope à g cellulaire. Mais $M_f \simeq M_g$. □

REMARQUES 9.2.4. – *Attention* : le théorème de Whitehead ne dit bien-sûr pas que deux CW-complexes X et Y ayant les mêmes groupes d'homotopie sont homotopiquement équivalents : il n'existe pas nécessairement d'application entre eux induisant un isomorphisme en homotopie. Ainsi par exemple S^2 et $S^3 \times \mathbb{C}\mathbb{P}^\infty$ ont mêmes groupes d'homotopie sans être homotopiquement équivalent (comparer les groupes d'homologie H_3).

– C'est le cas cependant si X ou Y est un point, et donc : tout CW-complexe dont tous les groupes d'homotopie sont nuls est contractile.

On sait que sauf pour les CW-complexes, la notion d'équivalence faible est strictement plus faible que la notion d'équivalence d'homotopie. On a cependant la

PROPOSITION 9.2.5. *Une équivalence faible $f : Y \rightarrow Z$ dans \mathbf{Top}_* induit une bijection $[X, Y]_* \rightarrow [X, Z]_*$ pour tout CW-complexe X pointé.*

DÉMONSTRATION. Quitte à remplacer Z par le cylindre \tilde{M}_f on peut supposer que f est une inclusion. Comme $f : Y \rightarrow Z$ est une équivalence faible, les groupes d'homotopie relatifs $\pi_n(Z, Y)$ sont nuls pour tout n . Par le lemme de compression, toute application $g : X \rightarrow Z$ d'un CW-complexe X dans Z peut alors être déformée en une application $g : X \rightarrow Y$. Ce qui démontre la surjectivité de $[X, Y]_* \rightarrow [X, Z]_*$.

De même, toute homotopie $(X \times I, X \times \partial I) \rightarrow (Z, Y)$ peut se déformer pour avoir son image dans Y . D'où l'injectivité de $[X, Y]_* \rightarrow [X, Z]_*$. □

9.3. Théorème d'approximation. Sachant qu'on dispose de moyens combinatoires pour essayer de calculer $[X, Y]_*$ si X et Y sont des CW-complexes, il est dès lors naturel d'essayer « d'approcher » n'importe quel espace Y par un CW-complexe.

DÉFINITION 9.3.1. *Soit (X, A) une paire de \mathbf{Top} , avec $A \subset X$ un CW-complexe non-vide. Un CW-modèle n -connexe pour (X, A) est une CW-paire n -connexe (Z, A) et une application $f : Z \rightarrow X$ avec $f|_A = 1_A$ telle que $f_* : \pi_i(Z) \rightarrow \pi_i(X)$ est un isomorphisme pour $i > n$ et une injection pour $i = n$ (pour tout choix de point base).*

On voit donc que si (Z, A) est un CW-modèle n -connexe pour (X, A) , Z est un hybride homotopique entre A et X . Plus n est grand et plus il ressemble à A , plus n est petit et plus il ressemble à X :

$$\left\{ \begin{array}{l} \pi_i(A) \simeq \pi_i(Z) \text{ pour } i < n, \\ \pi_n(A) \twoheadrightarrow \pi_n(Z) \hookrightarrow \pi_n(X), \\ \pi_i(Z) \simeq \pi_i(X) \text{ pour } i > n. \end{array} \right.$$

PROPOSITION 9.3.2. *Pour toute paire (X, A) de \mathbf{Top} avec A un CW-complexe non-vide, il existe des CW-modèles n -connexes $f : (Z, A) \rightarrow (X, A)$ pour tout $n \geq 0$. De plus Z peut être construit à partir de A en attachant des cellules de dimension $> n$ (en particulier (Z, A) est automatiquement n -connexe par approximation cellulaire).*

COROLLAIRE 9.3.3. *Tout espace X de \mathbf{Top} admet une CW-approximation $f : Z \rightarrow X$ (c'est-à-dire : f est une équivalence faible).*

DÉMONSTRATION. On applique le théorème à $A = \{*\}$ et $n = 0$. □

PREUVE DE LA PROPOSITION :

On construit Z comme union de sous-complexes $A = Z_n \subset Z_{n+1} \subset \dots$, où Z_k s'obtient à partir de Z_{k-1} par recollement de k -cellules. Par récurrence, supposons qu'on ait construit Z_k et une flèche $f : Z_k \rightarrow X$ avec $f|_A = 1_A$ et f_* est une injection pour $n \leq i < k$ et une surjection pour $n < i \leq k$ (relativement à tout choix d'un point base x_γ dans chaque composante A_γ de A). La récurrence commence en $k = n$, $Z_n = A$, aucune condition à vérifier.

Pour assurer l'isomorphisme $f_* : \pi_k(Z_{k+1}) \xrightarrow{\sim} \pi_k(X)$, on commence par rajouter des k -cellules à Z_k : posons

$$Y_{k+1} = Z_k \cup_{\alpha, \phi_\alpha} e_\alpha^{k+1} ,$$

où α décrit un ensemble de générateurs de

$$\ker\{f_* : \pi_k(Z_k, x_\gamma) \longrightarrow \pi_k(X, x_\gamma)\} ,$$

pour tout γ , et $\phi_\alpha : S^k \longrightarrow Z_k$ est un représentant de ce générateur. Les composées $f \circ \phi_\alpha$ sont homotopiquement nulles, donc f s'étend en

$$f : Y_{k+1} \longrightarrow X .$$

De plus

$$\pi_i(Y_{k+1}) = \pi_i(Z_k) \text{ pour } i < k ,$$

$$\pi_k(Y_{k+1}) \simeq \pi_k(X)$$

(en $k = 0$, on forme Y_1 en ajoutant des 1-cellules rattachant tous les x_γ appartenant à une même composante connexe de X).

Reste à s'assurer de la surjectivité en π_{k+1} . Formons

$$Z_{k+1} = Y_{k+1} \vee_\beta S_\beta^{k+1} ,$$

où les $\psi_\beta : S^{k+1} \longrightarrow X$ engendrent $\pi_{k+1}(X, x_\gamma)$ pour tout γ . On étend f en

$$f : Z_{k+1} \longrightarrow X ,$$

en définissant $f = \psi_\beta$ sur S_β^{k+1} . Ainsi $f_* : \pi_{k+1}(Z_{k+1}) \longrightarrow \pi_{k+1}(X)$ est surjectif. L'inclusion $Y_{k+1} \subset Z_{k+1}$ induit un isomorphisme sur les π_i pour $i \leq k$.

□

COROLLAIRE 9.3.4. *Toute paire (X, X_0) de **Top** admet une CW-approximation $f : (Z, Z_0) \longrightarrow (X, X_0)$.*

DÉMONSTRATION. Formons d'abord une CW-approximation $f_0 : Z_0 \longrightarrow X_0$. Puis formons un CW-modèle 0-connexe $(Z, Z_0) \longrightarrow (M_{\tilde{f}_0}, Z_0)$, où $\tilde{f}_0 : Z_0 \longrightarrow X_0 \longrightarrow X$. En composant $Z \longrightarrow M_{\tilde{f}_0}$ avec la rétraction de $M_{\tilde{f}_0}$ sur X , on obtient une extension de f_0 à $f : Z \longrightarrow X$. On vérifie facilement que $f : (Z, Z_0) \longrightarrow (X, X_0)$ est un isomorphisme sur les groupes d'homotopie absolus et relatifs.

□

COROLLAIRE 9.3.5. *Si (X, A) est une CW-paire n -connexe, alors il existe une CW-paire (Z, A) avec $(Z, A) \simeq (X, A)$ rel. A telle que toutes les cellules de $Z \setminus A$ sont de dimension $> n$.*

DÉMONSTRATION. Prenons $f : (Z, A) \longrightarrow (X, A)$ un CW-modèle n -connexe construit comme dans la proposition précédente. On vérifie que f induit des isomorphismes $f_* \pi_i(Z) \xrightarrow{\sim} \pi_i(X)$. C'est vrai pour $i > n$ par définition, et pour $i < n$ via A . Pour $i = n$, f_* est injective et comme la composition $\pi_n(A) \longrightarrow \pi_n(Z) \longrightarrow \pi_n(X)$ est surjective, on a le résultat.

Mais alors d'après le théorème de Whitehead f est une équivalence d'homotopie. Je laisse comme exercice de vérifier que c'en est une relativement à A .

□

THÉORÈME 9.3.6. *Un CW-modèle n -connexe pour une paire (X, A) de **Top** est unique à équivalence d'homotopie relativement à A près. En particulier tout espace de **Top** admet une unique CW-approximation à équivalence d'homotopie près.*

DÉMONSTRATION. C'est un corollaire immédiat de la

PROPOSITION 9.3.7. *Soit*

$$\begin{array}{ccc} Z & \xrightarrow{h} & Z' \\ f \downarrow & & \downarrow f' \\ X & \xrightarrow{g} & X' \end{array}$$

où $f : (Z, A) \rightarrow (X, A)$ (resp. $f' : (Z', A') \rightarrow (X', A')$) est un CW-modèle n -connexe (respectivement n' -connexe) et $g : (X, A) \rightarrow (X', A')$. Si $n \geq n'$ il existe une application $h : Z \rightarrow Z'$ rendant le diagramme commutatif à homotopie relativement à A près. De plus une telle application h est unique à homotopie relativement à A près.

DÉMONSTRATION. Par le corollaire précédent on peut supposer que toutes les cellules de $Z \setminus A$ sont de dimension $> n$. Soit

$$W = M_{f'} / (\{a'\} \times I, a' \in A') ,$$

le cylindre relatif de f' . Comme (Z', A') est un modèle n' -connexe, on a

$$\pi_i(W, Z') = 0 \text{ pour } i > n' .$$

Via l'inclusion $X' \subset W$ on peut voir $g \circ f$ comme une application $(Z, A) \rightarrow (W, Z')$. Comme $n \geq n'$, par le lemme de compression $g \circ f$ est homotope relativement à A à une application h à valeur dans Z' . Ce qui démontre l'existence.

Pour l'unicité, si h_0 et h_1 sont deux applications $Z \rightarrow Z'$ se composant avec f' pour donner $g \circ f$ à homotopie près, les deux applications $h_0, h_1 : Z \rightarrow W$ sont homotopes relativement à A . Une telle homotopie donne une application

$$(Z \times I, Z \times \partial I \cup A \times I) \rightarrow (W, Z') .$$

Par le lemme de compression cette application se déforme relativement à $Z \times \partial I \cup A \times I$ à valeur dans Z' , ce qui donne l'homotopie $h_0 \simeq h_1 \text{ rel } A$.

□

□

10. Excision homotopique

DÉFINITION 10.0.8. *Une triade $(X; A, B)$ est la donnée d'un espace X et de deux sous-espaces A et B . La triade $(X; A, B)$ est dite excisive si X est l'union de l'intérieur de A et de l'intérieur de B .*

L'obstruction principal au calcul des groupes d'homotopie tient à ce qu'ils ne vérifient pas la propriété d'excision : si $(X; A, B)$ est une triade excisive, l'inclusion

$$(A, A \cap B) \rightarrow (X, B)$$

n'induit pas en général d'isomorphisme des groupes d'homotopie correspondant. Le contre-exemple le plus simple est donné par les sphères : si A et B désignent les deux hémisphères fermées de $X = S^n$, on

a d'une part $\pi_k(A, A \cap B) = \pi_k(D^n, S^{n-1}) = \pi_{k-1}(S^{n-1})$ pour $k \geq 1$ car D^n est contractile. Par ailleurs $\pi_k(S^n, B) = \pi_k(S^n, D^n) = \pi_k(S^n)$. Mais pour $n = 2$ et $k = 3$ on a déjà calculé $\pi_3(S^2) = \mathbb{Z} \neq 0 = \pi_2(S^1)$.

Cependant l'excision est vérifiée dans certaines limites :

THÉORÈME 10.0.9 (Excision homotopique). *[Blakers-Massey] Soit $(X; A, B)$ une triade excisive avec $A \cap B$ non-vide. Supposons que $(A, A \cap B)$ et $(B, A \cap B)$ sont m -connexe, resp. n -connexe, avec $m \geq 1$, $n \geq 0$. Alors l'inclusion $(A, A \cap B) \rightarrow (X, B)$ est une $(m+n)$ -équivalence.*

COROLLAIRE 10.0.10. *Soit $f : X \rightarrow Y$ une n -équivalence (donc $\pi_n(f)$ est un épimorphisme), avec X m -connexe. Alors l'application quotient*

$$q : (M_f, X) \rightarrow (C_f, *)$$

est une $m+n+1$ -équivalence.

DÉMONSTRATION. Notons

$$A = Y \cup_f (X \times [0, \frac{2}{3}]) \text{ et } B = (X \times [\frac{1}{3}, 1]) / (X \times \{1\}) .$$

On a donc une triade excisive $(C_f; A, B)$ avec $A \cap B = X \times [\frac{1}{3}, \frac{2}{3}]$. L'application q est homotope à

$$(M_f, X) \xrightarrow{\sim} (A, A \cap B) \rightarrow (C_f, B) \xrightarrow{\sim} (C_f, \{*\}) .$$

Comme f est une n -équivalence la paire (M_f, X) et donc aussi la paire $(A, A \cap B)$ est n -connexe. Comme $(B, A \cap B) \simeq (CX, X)$, que $\partial : \pi_{i+1}(CX, X) \simeq \pi_i(X)$ car CX est contractile, et comme X est m -connexe, on en déduit que $(B, A \cap B)$ est $m+1$ -connexe. On déduit le résultat du théorème d'excision. \square

COROLLAIRE 10.0.11. *Soit $i : A \hookrightarrow X$ une cofibration qui est une n -équivalence, $n \geq 1$ et telle que A est m -connexe. Alors l'application quotient $q : (X, A) \rightarrow (X/A, *)$ est une $m+n+1$ -équivalence.*

DÉMONSTRATION. On a le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} (M_i, A) & \xrightarrow{q} & (C_i, *) \\ \downarrow & & \downarrow \\ (X, A) & \longrightarrow & (X/A, *) \end{array}$$

où les deux flèches verticales sont des équivalence d'homotopies de paires. Le résultat se déduit du corollaire précédent. \square

COROLLAIRE 10.0.12 (Théorème de suspension de Freudenthal). *Soit $X \in \mathbf{Top}_*$ non-dégénéré et n -connexe, $n \geq 0$. Alors*

$$\Sigma : \pi_i(X) \rightarrow \pi_{i+1}(\Sigma X)$$

défini par

$$\Sigma f = f \wedge Id : S^i \wedge S^1 \rightarrow X \wedge S^1 = \Sigma X$$

est une bijection pour $i \leq 2n$ et une surjection pour $i = 2n + 1$.

DÉMONSTRATION. Considérons le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} & \pi_{i+1}(\tilde{C}X, X, *) & \\ \partial \swarrow & & \searrow q_* \\ \pi_i(X) & \xrightarrow{\Sigma} & \pi_{i+1}(\Sigma X) \end{array} .$$

Comme le cône $\tilde{C}X$ est contractible, l'application ∂ est un isomorphisme en tout degré. Comme $X \hookrightarrow \tilde{C}X$ est une $(n + 1)$ -équivalence entre espaces n -connexes, d'après le corollaire précédent $q : (\tilde{C}X, X) \rightarrow (\Sigma X, *)$ est une $(2n + 2)$ -équivalence. □

COROLLAIRE 10.0.13. *Pour tout $n \geq 1$, $\pi_n(S^n) \simeq \mathbb{Z}$ et $\Sigma : \pi_n(S^n) \rightarrow \pi_{n+1}(S^{n+1})$ est un isomorphisme.*

DÉMONSTRATION. On a vu que $\pi_2(S^2) = \mathbb{Z}$ via le fibré de Hopf. Le théorème de suspension donne le résultat pour $n \geq 2$. Pour $n = 1$ exercice. □

PREUVE DU THÉORÈME D'EXCISION 10.0.9 :

Définissons les groupes d'homotopie de la triade $(X; A, B)$ par

$$\pi_i(X; A, B) := \pi_{i-1}(F_{B \rightarrow X}, F_{A \cap B \rightarrow C}) ,$$

où F_α désigne la fibre d'homotopie d'une application α . Explicitement, $\pi_i(X; A, B)$ est l'ensemble des classes d'homotopies d'applications de tétrades :

$$(I^i; I^{i-2} \times \{1\} \times I, I^{i-2} \times I \times \{1\}, J^{q-2} \times I \cup I^{q-1} \times \{0\}) \rightarrow (X; A, B, *) .$$

La suite longue d'homotopie de la paire $((F_{B \rightarrow X}, F_{A \cap B \rightarrow C})$ s'écrit

$$\cdots \rightarrow \pi_{i+1}(X; A, B) \rightarrow \pi_i(A, A \cap B) \rightarrow \pi_i(X, B) \rightarrow \pi_i(X; A, B) \rightarrow \cdots .$$

Le théorème d'excision homotopique est donc équivalent à

THÉORÈME 10.0.14. *Sous les conditions du théorème d'excision on a (pour tout point base de $A \cap B$)*

$$\pi_i(X; A, B) = 0 \text{ pour } 2 \leq i \leq m + n .$$

Démontrons ce dernier théorème dans le cas où X est un CW -complexe. Comme toute application $I^i \rightarrow X$ est d'image contenue dans un sous-complexe fini on peut supposer que X est fini. On peut aussi supposer que $(A, A \cap B)$ et (X, B) ont au moins une cellule chacun sinon le résultat est trivial.

Réduction au cas $(A, A \cap B) = e^{m+1}$. Ecrivons $A \cap B \subset A' \subset A$ où A s'obtient de A' par recollement d'une unique cellule et $(A', A \cap B)$ a une cellule de moins que $(A, A \cap B)$. Ecrivons $X' = A' \cup_{A \cap B} B$, on a le diagramme de suites exactes

$$\begin{array}{ccccccccc} \pi_{i+1}(A, A') & \longrightarrow & \pi_i(A', A \cap B) & \longrightarrow & \pi_i(A, A \cap B) & \longrightarrow & \pi_i(A, A') & \longrightarrow & \pi_{i-1}(A', A \cap B) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \pi_{i+1}(X, X') & \longrightarrow & \pi_i(X', B) & \longrightarrow & \pi_i(X, B) & \longrightarrow & \pi_i(X, X') & \longrightarrow & \pi_{i-1}(X', B) \end{array}$$

où les lignes sont les suites exactes longues des triples $(A, A', A \cap B)$ et (X, X', B) respectivement. Si le résultat est vrai pour les triades $(X'; A', B)$ (colonnes 2 et 5) et $(X; A, X')$ (colonnes 1 et 4) alors il est vrai pour la triade $(X; A, B)$ (colonne 3) par le lemme des 5.

Réduction au cas $(B, A \cap B) = e^{n+1}$. Ecrivons $A \cap B \subset B' \subset B$ où B s'obtient de B' par recollement d'une unique cellule et $(B', A \cap B)$ a une cellule de moins que $(B, A \cap B)$. Ecrivons $X' = B' \cup_{A \cap B} A$. Si le résultat est vrai pour les triades $(X'; A, B')$ et $(X; X', B)$ alors il est vrai aussi pour $(X; A, B)$ car l'inclusion $(A, A \cap B) \rightarrow (X, C)$ factorise en $(A, A \cap B) \rightarrow (X', B') \rightarrow (X, B)$.

Cas $A = (A \cap B) \cup e^{m+1}$, $B = (A \cap B) \cup e^{n+1}$. Montrons que l'application $\pi_i(A, A \cap B) \rightarrow \pi_i(X, C)$ est surjective. Soit

$$f : (I^i, \partial I^i, J^{i-1}) \rightarrow (X, B, x_0) .$$

Par répétition du lemme d'évitement fort 9.1.6, on peut supposer que les préimages $f^{-1}(\Delta^{m+1})$ et $f^{-1}(\Delta^{n+1})$ de simplexes dans e^{m+1} et e^{n+1} sont une union finie de polyèdres convexes, sur lesquels f est la restriction de surjections linéaires $\mathbb{R}^i \rightarrow \mathbb{R}^{m+1}$ ou $\mathbb{R}^i \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$.

LEMME 10.0.15. *Si* $i \leq m+n$ *il existe un point* $x \in \Delta^{m+1}$ *et* $y \in \Delta^{n+1}$ *et une application* $\phi : I^{i-1} \rightarrow [0, 1]$ *telle que*

- $f^{-1}(y)$ *est en dessous du graphe de* ϕ *dans* I^i .
- $f^{-1}(x)$ *est au dessus du graphe de* ϕ .
- $\phi|_{\partial I^{i-1}} = 0$.

Admettons le lemme et finissons la preuve. Soit f_t l'homotopie de f obtenue par restriction de f à la région de I^n au-dessus du graphe de $t\phi$, $0 \leq t \leq 1$. Pour tout t l'application $f_t|_{I^{i-1}}$ ne rencontre pas x . De plus l'application f_1 ne rencontre pas y . Cela signifie que dans le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \pi_i(A, A \cap B) & \longrightarrow & \pi_i(X, B) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \pi_i(X \setminus \{x\}, X \setminus \{x, y\}) & \longrightarrow & \pi_i(X, X \setminus \{x\}) \end{array} ,$$

l'élément $[f] \in \pi_i(X, B)$, vu comme élément de $\pi_i(X, X \setminus \{x\})$, provient de $\pi_i(X \setminus \{x\}, X \setminus \{x, y\})$. Comme les applications verticales sont des isomorphismes, on en déduit que $\pi_i(A, A \cap B) \rightarrow \pi_i(X, B)$.

L'injectivité se démontre de manière similaire à l'aide du lemme, la restriction en dimension devenant $i+1 \leq m+n$.

Finissons par la preuve du lemme. Soit $y \in \Delta^{n+1}$. La préimage $f^{-1}(y)$ est alors réunion finie de polyèdres de dimension $\leq i - (n+1)$. De même pour $x \in \Delta^{m+1}$ la préimage $f^{-1}(x)$ est union fini de polyèdres de dimension $\leq i - (m+1)$. On veut choisir x tel que $f^{-1}(x)$ et $f^{-1}(y)$ ont des images disjointes dans I^{i-1} via la projection $\pi : I^i \rightarrow I^{i-1}$, c'est-à-dire que $f^{-1}(x)$ est disjoint de $T = \pi^{-1}(\pi(f^{-1}(y)))$ (l'union des segments $\{x\} \times I$ rencontrant $f^{-1}(y)$). L'ensemble T est une union finie de polyèdres convexes de dimension $\leq i - n$. Comme les applications linéaires n'augmentent pas la dimension, $f(T) \cap \Delta^{m+1}$ est une union finie de polyèdres de dimension $\leq i - n$. Donc si $m+1 > i - n$ on peut trouver un point $x \in \Delta^{m+1} - f(T)$.

Finalement $f^{-1}(x) \cap T = \emptyset$ si $i \leq m + n$. Soit alors $U \subset I^{n-1}$ un voisinage de $\pi(f^{-1}(y))$ disjoint de $\pi(f^{-1}(x))$. Il existe alors $\phi : I^{i-1} \rightarrow [0, 1[$ à support dans U avec $f^{-1}(y)$ en dessous du graphe de ϕ . \square

11. Abélianisation et théorème de Dold-Thom

Le défaut de la propriété d'excision pour l'homotopie, qui est essentiellement équivalent au défaut de la propriété de suspension, est encore essentiellement équivalent au fait que si $f : A \hookrightarrow X \in \mathbf{Top}_*$, la flèche naturelle $X \rightarrow C_f$ n'a pas A pour fibre d'homotopie.

L'idée fondamentale de Dold et Thom est que ces défauts disparaissent après *abélianisation* des objets de \mathbf{Top}_* : on simplifie l'homotopie (et on obtient en fait l'homologie) en remplaçant un espace X par le monoïde (ou le groupe) abélien libre qu'il engendre. C'est la même idée qui fera voir la catégorie des complexes de \mathbb{Z} -modules comme l'abélianisée de la catégorie des ensembles simpliciaux.

11.1. Produits symétriques infinis. Rappelons que pour $(X, x_0) \in \mathbf{Top}_*$,

$$SP(X) = \bigcup SP^n(X) ,$$

avec $SP^n(X) = X^n / \Sigma_n$ et $SP^n(X) \subset SP^{n+1}(X)$ via $[x_1, \dots, x_n] \rightarrow [x_0, x_1, \dots, x_n]$. Si X est un CW -complexe, $SP(X)$ est encore un CW -complexe (de manière non-évidente). De plus la concaténation $SP(X) \times SP(X) \rightarrow SP(X)$ qui à $([x_1, \dots, x_k], [y_1, \dots, y_l])$ associe $[x_1, \dots, x_k, y_1, \dots, y_l]$ fait de $SP(X)$ le monoïde abélien libre engendré par X dans \mathbf{Top}_* .

Si $f : X \rightarrow Y$ dans \mathbf{Top}_* , f induit des applications $f^n : X^n \rightarrow Y^n$, compatibles aux actions de Σ_n , donc des applications $SP^n(f) : SP^n(X) \rightarrow SP^n(Y)$. Ces applications sont compatibles aux inclusions $SP^n(X) \subset SP^{n+1}(X)$. Finalement $f : X \rightarrow Y$ induit

$$SP(f) : SP(X) \rightarrow SP(Y) .$$

On vérifie également facilement le :

LEMME 11.1.1. *Tout homotopie $F : X \times I \rightarrow Y$ induit une homotopie naturelle $\hat{F} : SP(X) \times I \rightarrow SP(Y)$.*

EXEMPLES 11.1.2. – $SP(S^2) \simeq \mathbb{C}\mathbb{P}^\infty$. Identifions en effet S^2 à $\mathbb{C}\mathbb{P}^1$. Un point de $SP^n(S^2)$ est un n -uplet non-ordonné de $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$, ce qui identifie $SP^n(S^2)$ à l'espace des polynômes non-nuls de $\mathbb{C}[T]$ de degré au plus n modulo multiplication scalaire : on envoie $[x_1, \dots, x_n]$ sur $(T - x_1) \cdots (T - x_n)$ en omettant les facteurs $T - \infty$ (en particulier $[\infty, \dots, \infty]$ est envoyé sur 1). Mais l'espace de ces polynômes modulo scalaires s'identifie à $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$.

– L'inclusion naturelle $S^1 \rightarrow SP(S^1)$ est une équivalence d'homotopie. En effet, $S^1 \simeq S^2 \setminus \{0, \infty\}$. L'argument précédent montre que $SP^n(S^2 \setminus \{0, \infty\})$ s'identifie à $\mathbb{C}\mathbb{P}^n = SP^n(S^2)$ privé des deux hyperplans des polynômes de degré au plus n à coefficient constant nul (respectivement à coefficient de degré n nul). L'espace projectif $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$ privé d'un hyperplan s'identifie à un disque ouvert \mathring{D}^{2n} , privé de deux hyperplans à $\mathring{D}^{2n-2} \times (\mathring{D}^2 - 0)$, qui a le type d'homotopie de S^1 . Finalement l'inclusion de S^1 dans $SP^n(S^1)$ est une équivalence d'homotopie pour tout n .

11.2. Le théorème de Dold-Thom. Le théorème principal de cette section est dû à Dold et Thom [2] :

THÉORÈME 11.2.1 (Dold-Thom). *Soit $(X, A) \in \mathbf{CW}_*$. Alors l'application quotient $p : X \rightarrow X/A$ induit une quasi-fibration $SP(p) : SP(X) \rightarrow SP(X/A)$ de fibre faiblement homotopiquement équivalente à $SP(A)$.*

REMARQUE 11.2.2. Remarquons que les fibres du morphisme de monoïdes abéliens $SP(p)$ sont exactement les classes du sous-monoïde abélien $SP(A)$, en particulier toutes les fibres sont homéomorphes à $SP(A)$. Ce qui rend plausible le théorème. Notons cependant que l'application $SP(p)$ n'est pas une fibration : on ne peut même pas relever les chemins. Soit en effet x_t , $t \in [0, 1[$, un chemin de $X \setminus A$ de limite un point x_1 de A différent du point base $x_0 \in A$. En regardant x_t comme chemin de $SP(X/A)$, tout relèvement de x_t dans $SP(X)$ est de la forme $x_t \alpha_t$, $\alpha_t \in SP(A)$, qui finit en $x_1 \alpha_1$, point de $SP(A)$ multiple de x_1 . En particulier il n'y a pas de relèvement de x_t finissant au point base x_0 de $SP(X)$.

COROLLAIRE 11.2.3. *Si $X \in \mathbf{CW}_*$ est 0-connexe, alors pour tout $i \geq 0$ on a*

$$\pi_{i+1}(SP(\Sigma X)) \simeq \pi_i(SP(X)) \quad .$$

DÉMONSTRATION. Considérons la cofibration $X \hookrightarrow CX$ de cofibre ΣX . D'après le théorème de Dold-Thom, on obtient la quasi-fibration $SP(CX) \rightarrow SP(\Sigma X)$ de fibre d'homotopie $SP(X)$. Comme CX est contractile, $SP(CX)$ l'est aussi par le lemme 11.1.1. La suite longue d'homotopie associée à la quasi-fibration $SP(CX) \rightarrow SP(\Sigma X)$ donne le résultat. □

Le théorème 11.2.1 admet une preuve très simple via des techniques simpliciales (c.f.), indiquons toutefois une preuve topologique. Commençons par quelques préliminaires.

PROPOSITION 11.2.4 (Mayer-Vietoris homotopique). *Soit $f : (X; A, B) \rightarrow (Y; C, D)$ un morphisme de triades excisives. Si les applications $(A, A \cap B) \rightarrow (C, C \cap D)$ et $(B, A \cap B) \rightarrow (D, C \cap D)$ sont des n -équivalences (pour tout choix de point base) alors $(X, A) \rightarrow (Y, C)$ est aussi une n -équivalence. Par symétrie $(X, B) \rightarrow (Y, D)$ l'est également.*

DÉMONSTRATION. C'est une conséquence du théorème 10.0.9 d'excision homotopique, que nous laissons en exercice au lecteur. □

COROLLAIRE 11.2.5. *Soit $f : X \rightarrow Y$ dans \mathbf{Top} et $\{U_i\}$ (resp. $\{V_i\}$) un recouvrement ouvert de X (resp. Y) avec $f(U_i) \subset V_i$. Si les restrictions $f : U_{i_1} \cap \dots \cap U_{i_n} \rightarrow V_{i_1} \cap \dots \cap V_{i_n}$ sont des équivalences faibles alors $f : X \rightarrow Y$ aussi.*

DÉMONSTRATION. Le cas d'un recouvrement par deux ouverts se déduit du lemme des 5 et de la proposition précédente.

Le cas d'un recouvrement fini s'en déduit par récurrence.

Le cas d'un recouvrement par un nombre infini d'ouverts s'en déduit encore puisque toute application $S^n \rightarrow Y$ a une image compacte, donc contenue dans un recouvrement fini. □

PROPOSITION 11.2.6 (Critères de reconnaissance des quasi-fibrations). *Une application $p : E \rightarrow B$ est une quasi-fibration si l'une des conditions suivantes est satisfaite :*

- (a) $B = V_1 \cup V_2$, où les V_i , $i = 1, 2$, sont des ouverts de B , $p^{-1}(V_i) \rightarrow V_i$ est une quasi-fibration et $p^{-1}(V_1 \cap V_2) \rightarrow V_1 \cap V_2$ est une quasi-fibration.
- (b) B est l'union croissante de sous-espaces $B_1 \subset B_2 \subset \dots$ munie de la topologie faible, et $p^{-1}(B_i) \rightarrow B_i$ est une quasi-fibration pour tout i .
- (c) Il existe une déformation f_t de E en un sous-espace E' , au-dessus d'une déformation \bar{f}_t de B en B' , telle que $E' \rightarrow B'$ est une quasi-fibration et pour tout $b \in B$ l'application $f_1 : E_b \rightarrow E_{\bar{f}_1(b)}$ est une équivalence d'homotopie faible.

DÉMONSTRATION. Par souci de simplicité, on supposera les fibres E_b connexes.

Pour (a) : Notons $U_i = p^{-1}(V_i)$. Par le lemme des 5 appliqué aux suites longues d'homotopie des triples $(U_k, U_1 \cap U_2, E_b)$ et $(V_k, V_1 \cap V_2, b)$ on en déduit les isomorphismes

$$\pi_i(U_k, U_1 \cap U_2) \simeq \pi_i(V_k, V_1 \cap V_2) .$$

Par la propriété de Mayer-Vietoris 11.2.4 on en déduit que $\pi_i(E, U_1) \simeq \pi_i(V, V_1)$. L'hypothèse $\pi_i(U_1, E_b) \simeq \pi_i(V_1)$ implique alors par le lemme des 5 que $\pi_i(E, E_b) \simeq \pi_i(B, b)$.

Pour (b) : Tout sous-espace compact de E est contenu dans un des $E_n = p^{-1}(B_n)$, donc $\pi_i(E, E_b) = \text{colim}_n \pi_i(E_n, E_b)$. Donc $\pi_i(E, E_b) \rightarrow \pi_i(B, b)$ est un isomorphisme si $\pi_i(E_n, E_b) \rightarrow \pi(B_n, b)$ l'est.

Pour (c) : On considère le diagramme

$$\begin{array}{ccccc} (E, E_b) & \xrightarrow{f_1} & (E', E_{\bar{f}_1(b)}) & \xrightarrow{i} & (E, E_{\bar{f}_1(b)}) \\ \downarrow & & \downarrow & & \\ (B, b) & \xrightarrow{\bar{f}_1} & (B', \bar{f}_1(b)) & & \end{array} ,$$

où i désigne l'inclusion naturelle. La composée supérieure induit des isomorphismes sur les groupes d'homotopie relatifs via le lemme des 5 et l'hypothèse que $F_1 : E_b \rightarrow E_{\bar{f}_1(b)}$ est une équivalence d'homotopie faible. L'équivalence d'homotopie i induit aussi des isomorphismes en homotopie relative. Donc l'application f_1 induit des isomorphismes en homotopie relative. Comme \bar{f}_1 est une équivalence d'homotopie et la verticale de droite induit par hypothèse des isomorphismes en homotopie, la verticale de gauche aussi. \square

PREUVE DU THÉORÈME DE DOLD-THOM :

Définissons $E_n \subset SP(X)$ par

$$\begin{array}{ccc} E_n = p^{-1}(SP^n(X/A)) & \hookrightarrow & SP(X) \\ \downarrow p & & \downarrow \\ SP^n(X/A) & \hookrightarrow & SP(X/A) \end{array} .$$

Remarquons que E_n consiste en les points de $SP(X)$ ayant au plus n coordonnées dans $X - A$.

Pour montrer que $p : SP(X) \rightarrow SP(X/A)$ est une quasi-fibration, d'après le lemme 11.2.6[(b)] il suffit de montrer que

$$p : E_n \rightarrow SP^n(X/A)$$

est une quasi-fibration pour tout $n \in \mathbb{N}$.

La preuve se fait par récurrence sur n , en commençant en $n = 0$ avec $SP^0(X/A) = \{*\}$: cas trivial.

Supposons donc que $p : E_{n-1} \rightarrow SP^{n-1}(X/A)$ est une quasi-fibration. Ecrivons

$$SP^n(X/A) = U \cup V$$

où

- U désigne un voisinage convenable de $SP^{n-1}(X/A)$ dans $SP^n(X/A)$.
- $V = SP^n(X/A) \setminus SP^{n-1}(X/A)$.

D'après le lemme 11.2.6[(a)] il suffit de montrer que les applications $p : p^{-1}(V) \rightarrow V$, $p : p^{-1}(U) \rightarrow U$ et $p : p^{-1}(U \cap V) \rightarrow U \cap V$ sont des quasi-fibrations.

Pour V : notons que $p^{-1}(V)$ est l'ensemble des $x \in SP(X)$ ayant exactement n coordonnées x_1, \dots, x_n dans $X \setminus A$. On dispose alors d'une application :

$$\begin{array}{ccc} p^{-1}(V) & \xrightarrow{\sigma} & V \times SP(A) \\ & \searrow p & \swarrow p_1 \\ & & V \end{array}$$

où σ associe à $x \in p^{-1}(V)$ le couple $([x_1, \dots, x_n], [x_{n+1}, \dots, x_r])$ de $V \times SP(A)$. Cette application est clairement une bijection, on démontre facilement que σ et σ^{-1} sont continues sur les compacts. En particulier $p : p^{-1}(V) \rightarrow V$ est une quasi-fibration.

Pour $U \cap V$: La preuve précédente pour V est encore valable pour tout ouvert de V , en particulier pour $U \cap V$.

Pour U : Notons

$$f_t : X \rightarrow X$$

une homotopie de 1_X rétractant un voisinage W de A dans X sur A (relativement à A). Choisissons :

$$U = \{x \in SP^n(X/A) \text{ ayant au moins une coordonnée dans } p(W)\} .$$

L'ouvert U est bien un voisinage de $SP^{n-1}(X/A)$ dans $SP^n(X/A)$:

$$\begin{array}{ccccc} E_{n-1} & \hookrightarrow & p^{-1}(U) & \hookrightarrow & E_n \\ \downarrow p & & \downarrow p & & \downarrow p \\ SP^{n-1}(X/A) & \hookrightarrow & U & \hookrightarrow & SP^n(X/A) \end{array} .$$

L'homotopie $f_t : X \rightarrow X$ fixant A induit des homotopies :

$$\begin{array}{ccc} p^{-1}(U) & \xrightarrow{f_t} & p^{-1}(U) \\ p \downarrow & & p \downarrow \\ U & \xrightarrow{\bar{f}_t} & U \end{array}$$

qui induit une déformation $f_1 : p^{-1}(U) \rightarrow E_{n-1}$ au dessus d'une déformation $\bar{f}_1 : U \rightarrow SP^{n-1}(X/A)$.

Pour montrer que $p : p^{-1}(U) \rightarrow U$ est une quasi-fibration il suffit par le lemme 11.2.6[(c)] de démontrer que pour tout $b \in U$ l'application $f_1 : p^{-1}(b) \rightarrow p^{-1}(\bar{f}_1(b))$ est une équivalence faible.

Fixons un point $y \in p^{-1}(b)$ et décomposons

$$y = y_{X \setminus A} + y_A$$

où $y_{X \setminus A}$ (resp. y_A) a toutes ses composantes dans $X \setminus A$ (resp. A). Comme f_1 fixe A ,

$$f_1(y) = f_1(y_{X \setminus A}) + y_A = (f_1(y_{X \setminus A}))_{X \setminus A} + [f_1(y_{X \setminus A})_A + y_A] .$$

L'application $f_1 : p^{-1}(b) = y + SP(A) \longrightarrow p^{-1}(\overline{f_1}(b))$ associe donc a tout élément

$$z = y + z_A = y_{X \setminus A} + (y_A + z_A)$$

de $p^{-1}(b)$ l'élément

$$f_1(z) = f_1(y_{X \setminus A})_{X \setminus A} + f_1(y_{X \setminus A})_A + (y_A + z_A) .$$

C'est un homéomorphisme donc une équivalence faible. □

11.3. Du monoïde abélien au groupe abélien. Une seconde version du théorème de Dold-Thom consiste à considérer le groupe topologique abélien libre $AG(X)$ engendré par X plutôt que le monoïde abélien libre $SP(X)$.

Etant donné un monoïde abélien M , sa complétion en groupe peut s'obtenir en prenant le quotient $M \times M$ par la relation d'équivalence $(m, n) \sim (m + p, n + p)$. Ainsi pour $X \in \mathbf{Top}_*$ on peut définir $AG(X) = SP(X) \times SP(X) / \sim$, c'est le groupe abélien libre engendré par X . Dold et Thom en donnent une définition (homotopiquement) équivalente. Commençons par la

PROPOSITION 11.3.1. *Pour $X, Y \in \mathbf{Top}_*^{nd}$, $SP(X \vee Y) \longrightarrow SP(X) \times SP(Y)$ est une équivalence faible.*

DÉMONSTRATION. Comme X et Y sont non-dégénérés on obtient par push-forward que $X \hookrightarrow X \vee Y$ et $Y \hookrightarrow X \vee Y$. D'après le théorème de Dold-Thom, l'application quotient $X \vee Y \longrightarrow X \vee Y / Y \simeq X$ induit une quasi-fibration $SP(X \vee Y) \longrightarrow SP(X)$ de fibre $SP(Y)$. Symétriquement $SP(X \vee Y) \longrightarrow SP(Y)$ est une quasi-fibration de fibre $SP(X)$ respectivement. Comme les inclusions $X \subset X \vee Y$ et $Y \subset X \vee Y$ induisent des sections de ces quasi-fibrations on en déduit que l'application canonique $SP(X \vee Y) \longrightarrow SP(X) \times SP(Y)$ est une équivalence faible d'homotopie. □

DÉFINITION 11.3.2. *On note $AG(X)$ le groupe abélien topologique*

$$AG(X) = SP(X \vee X) / (u \sim u + v + \tau(v)) ,$$

où τ est l'extension à $SP(X \vee X)$ de l'involution canonique de $X \vee X$.

On démontrerait de façon analogue au cas de SP le théorème suivant, pour la preuve duquel on renvoie à [2] :

THÉORÈME 11.3.3 (Dold-Thom). *Soit $(X, A) \in \mathbf{CW}_*$. Alors l'application quotient $p : X \longrightarrow X/A$ induit un $AG(A)$ -fibré principal $AG(p) : AG(X) \longrightarrow AG(X/A)$.*

11.4. Le foncteur 0-cycle. L'approche de Dold-Thom est généralisée dans [7]. Commençons par une définition ensembliste.

DÉFINITION 11.4.1. *Soit G un monoïde (non-nécessairement abélien) avec une multiplication associative et une unité e . Soit $(X, *)$ un ensemble pointé. On définit $Z_0(X, G)$ comme l'ensemble des fonctions $u : X \longrightarrow G$ telles que $u(*) = e$ et $u(x) = e$ pour tout $x \in X$ sauf un nombre fini. C'est un monoïde pour la multiplication ponctuelle.*

REMARQUE 11.4.2. Dans [7] $Z_0(X, G)$ est noté $B(G, X)$.

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, notons $Z_0^n(X, G)$ le sous-ensemble de $Z_0(X, G)$ des fonctions prenant une valeur différente de e en au plus n points de X . On a alors la suite d'inclusions :

$$Z_0^0(X, G) \subset Z_0^1(X, G) \subset \cdots \subset Z_0^n(X, G) \subset \cdots \subset Z_0(X, G) .$$

DÉFINITION 11.4.3. *Etant donnés un n -uplet (g_1, \dots, g_n) de G et un n -uplet (x_1, \dots, x_n) de X on notera $g_1x_1 + \cdots + g_nx_n$ la fonction de $Z_0^n(X, G)$ valant g_i en x_i , $1 \leq i \leq n$ et e ailleurs.*

Supposons désormais que G est un monoïde abélien topologique et $(X, *) \in \mathbf{Top}_*$. Topologisons $Z_0(X, G)$. Pour tout entier naturel n l'ensemble $Z_0^n(X, G)$ est un quotient naturel de $(X \times G)^n$. Munissons $Z_0^n(X, G)$ de la topologie quotient, qui fait de $Z_0^{n-1}(X, G)$ un fermé de $Z_0^n(X, G)$. Munissons $Z_0(X, G)$ de la topologie faible, qui fait de $Z_0(X, G)$ un monoïde topologique abélien (et un groupe abélien topologique si G l'est). On vérifie alors la :

PROPOSITION 11.4.4. [7] *Le foncteur Z_0 vérifie les propriétés suivantes :*

- $Z_0(X, \mathbb{Z}^+) = SP(X)$.
- $Z_0(X, \mathbb{Z}) = AG(X)$.
- $Z_0(Y, Z_0(X, G)) = Z_0(X \wedge Y, G)$.
- *Si G est abélien discret alors $Z_0(S^n, G)$ est un $K(G, n)$.*

Dans [7] McCord démontre que si G est un groupe abélien discret et $(X, A) \in \mathbf{CW}_*$ alors la projection naturelle

$$p : Z_0(X, G) \longrightarrow Z_0(X/A, G)$$

est un $Z_0(A, G)$ -fibré principal, redémontrant en particulier le théorème 11.3.3.

12. Espaces d'Eilenberg-MacLane et espaces de Moore

Les sphères et plus généralement les espaces de Moore sont les « briques » de \mathbf{Top}_* du point de vue homologique (c.f. chapitre suivant) : ils possèdent un unique groupe d'homologie non-trivial. Dualelement les espaces d'Eilenberg-MacLane sont les « briques » de \mathbf{Top}_* du point de vue homotopique : ils possèdent un unique groupe d'homotopie non-trivial.

12.1. Espaces d'Eilenberg-MacLane : définition.

DÉFINITION 12.1.1. *Soit n un entier ≥ 1 et G un groupe (abélien si $n \geq 2$). On dit que $X \in \mathbf{Top}$ est un espace d'Eilenberg-MacLane de type $K(G, n)$ si X a le type d'homotopie d'un CW-complexe et*

$$\pi_i(X) = \begin{cases} G & \text{si } i = n, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

EXEMPLES 12.1.2. - S^1 est un $K(\mathbb{Z}, 1)$. Plus généralement la géométrie différentielle fournit un grand nombre de $K(G, 1)$ (encore appelés espaces sphériques) : toute variété M différentielle compacte d'Hadarnard (c'est-à-dire admettant une métrique riemannienne à courbure non-positive) est un $K(\pi_1(M), 1)$.

- Au contraire il est rare de rencontrer un $K(G, n)$, $n \geq 2$, de nature géométrique. Un exemple important est $\mathbb{C}\mathbb{P}^\infty$, qui est un $K(\mathbb{Z}, 2)$.

12.2. Espaces d'Eilenberg-MacLane : première construction.

LEMME 12.2.1. a) $\pi_1(\bigvee_{\alpha} S_{\alpha}^1) = *_{\alpha} \mathbb{Z}$.

b) Pour $n \geq 2$, $\pi_n(\bigvee_{\alpha} S_{\alpha}^n) = \bigoplus_{\alpha} \mathbb{Z}$.

DÉMONSTRATION. Le a) est une conséquence directe du théorème de Van Kampen. Pour le b), prouvons le d'abord pour un ensemble fini d'indices. Dans ce cas $\bigvee_{\alpha} S_{\alpha}^n$ est le n -squelette du CW -complexe produit $\prod_{\alpha} S_{\alpha}^n$. Comme ce dernier espace n'a de cellules qu'en degrés multiples de n , on en déduit que la paire $(\prod_{\alpha} S_{\alpha}^n, \bigvee_{\alpha} S_{\alpha}^n)$ est $(2n-1)$ -connexe. Donc pour $n \geq 2$ le morphisme

$$\pi_n(\bigvee_{\alpha} S_{\alpha}^n) \longrightarrow \pi_n(\prod_{\alpha} S_{\alpha}^n)$$

est un isomorphisme. Comme $\pi_n(\prod_{\alpha} S_{\alpha}^n) \simeq \prod_{\alpha} \pi_n(S_{\alpha}^n)$ on en déduit le résultat voulu dans ce cas.

Pour un ensemble d'indices infini, considérons le morphisme naturel

$$\Phi : \bigoplus_{\alpha} \pi_n(S_{\alpha}^n) \longrightarrow \pi_n(\bigvee_{\alpha} S_{\alpha}^n) .$$

Comme toute application $f : S^n \longrightarrow \bigvee_{\alpha} S_{\alpha}^n$ est d'image compacte contenue dans un coproduit fini, l'application Φ est surjective par le cas précédent. De même toute homotopie de f est d'image contenue dans un coproduit fini et donc Φ est injective. \square

Construisons maintenant, pour tout couple (G, n) , un espace $K(G, n)$.

Commençons par construire un CW -complexe $(n-1)$ -connexe de dimension $n+1$ et tel que $\pi_n(Y) \simeq G$. Ecrivons G comme quotient du groupe libre (abélien si $n \geq 2$) sur les générateurs g_{α} par le sous-groupe engendré par les relations r_{β} . Posons

$$Y = (\bigvee_{\alpha} S_{\alpha}^n) \cup_{\beta} e_{\beta}^{n+1} ,$$

où la cellule e_{β}^{n+1} est attachée via $\phi_{\beta} : S^n \longrightarrow \bigvee_{\alpha} S_{\alpha}^n$ représentant r_{β} .

Par approximation cellulaire, Y est $(n-1)$ -connexe et la paire $(Y, \bigvee_{\alpha} S_{\alpha}^n)$ est n -connexe. Par le corollaire 10.0.11 l'application quotient $(Y, \bigvee_{\alpha} S_{\alpha}^n) \longrightarrow \bigvee_{\beta} S_{\beta}^{n+1}$ est une $2n$ -équivalence.

Pour $n \geq 2$, $\pi_{n+1}(Y, \bigvee_{\alpha} S_{\alpha}^n)$ est donc le groupe abélien libre engendré par les applications caractéristiques des e_{β}^{n+1} . De la suite exacte longue de la paire $(Y, \bigvee_{\alpha} S_{\alpha}^n)$ on obtient :

$$\pi_{n+1}(Y, \bigvee_{\alpha} S_{\alpha}^n) \xrightarrow{\partial} \pi_n(\bigvee_{\alpha} S_{\alpha}^n) \longrightarrow \pi_n(Y) \longrightarrow 0 .$$

L'application ∂ envoie l'application caractéristique de e_{β}^{n+1} sur ϕ_{β} . On en déduit $\pi_n(Y) = G$.

Pour $n = 1$, exercice.

Pour obtenir à partir de l'espace Y ainsi construit un espace $K(G, n)$ il nous reste à « tuer » les groupes d'homotopie $\pi_i(Y)$, $i > n$, en ajoutant des cellules de dimension $i+1$. Formellement, on considère $(K(G, n), Y)$ le CW -modèle $(n+1)$ -connexe de la paire (CY, Y) .

12.3. Unicité du type d'homotopie de $K(G, n)$. Dans quelle mesure $K(G, n)$ est-il unique ?

PROPOSITION 12.3.1. *Le type d'homotopie de $K(G, n)$ est entièrement déterminé par G et n .*

DÉMONSTRATION.

LEMME 12.3.2. *Soit Y un CW -complexe de la forme $(\bigvee_{\alpha} S_{\alpha}^n) \cup_{\beta} e_{\beta}^{n+1}$ pour $n \geq 1$. Alors pour tout espace $Z \in \mathbf{Top}_*$ et tout homomorphisme $\psi : \pi_n(Y) \rightarrow \pi_n(Z)$ il existe $f : Y \rightarrow Z$ avec $f_* = \psi$.*

DÉMONSTRATION. Fixons z_0 un point base de Z , et définissons l'image du point base naturel de $\bigvee_{\alpha} S_{\alpha}^n$ par f comme étant z_0 . Notons $i_{\alpha} : S_{\alpha}^n \subset Y$ l'inclusion naturelle, définissons $f|_{S_{\alpha}^n}$ comme n'importe quelle application représentant $\psi([i_{\alpha}])$. A ce stade on a donc une application $f : Y^n \rightarrow Z$ vérifiant $f_*([i_{\alpha}]) = \psi([i_{\alpha}])$, et donc $f_*([\phi]) = \psi([\phi])$ pour tout $\phi : S^n \rightarrow Y^n$. Pour étendre f à e_{β}^{n+1} il suffit que $f \circ \phi_{\beta}$ soit homotopiquement nulle, où $\phi_{\beta} : S^n \rightarrow Y^n$ désigne l'application de recollement de la cellule e_{β}^{n+1} . Mais $f \circ \phi_{\beta}$ représente la classe d'homotopie $f_*([\phi_{\beta}]) = \psi([\phi_{\beta}])$ et $\psi([\phi_{\beta}]) = 0$ car $[\phi_{\beta}] = 0 \in \pi_n(Y)$. D'où une extension $f : Y \rightarrow Z$ qui a la propriété voulue par approximation cellulaire. \square

Finissons la preuve de la proposition. Soit K et K' deux $K(G, n)$, qu'on peut supposer être des CW -complexes. Sans perte de généralité on peut supposer que K est le $K(G, n)$ construit à la section précédente à partir d'un espace Y comme dans le lemme 12.3.2, par adjonction de cellules de dimension $\geq n+2$. D'après le lemme 12.3.2 on dispose d'une application $f : Y \rightarrow K'$ induisant un isomorphisme sur π_n . Pour étendre f à K par induction, remarquons que pour toute cellule e^{n+2} recollée via $\phi : S^{n+1} \rightarrow Y$ l'application $f \circ \phi$ est homotopiquement nulle dans K' puisque $\pi_{n+1}(K') = 0$. Donc f s'étend à K^{n+2} . Par induction on obtient $f : K \rightarrow K'$. C'est une équivalence faible entre CW -complexes, donc une équivalence d'homotopie. \square

12.4. Espaces de Moore et seconde construction de $K(G, n)$. Pour simplifier on suppose que le groupe abélien G est de type fini. Il se décompose donc en

$$G = \mathbb{Z}^r \oplus \mathbb{Z}/d_1\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/d_2\mathbb{Z} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}/d_k\mathbb{Z} ,$$

où $d_1|d_2|\cdots|d_k$.

Pour d un entier positif, définissons

$$\alpha_d : S^1 \rightarrow S^1$$

une application induisant la multiplication par d sur $\pi_1(S^1) \simeq \mathbb{Z}$. Si $\nu : S^1 \rightarrow S^1 \vee S^1$ désigne la comultiplication du H -cogroupe S^1 , on peut par exemple prendre

$$\alpha_d : S^1 \xrightarrow{\nu} S^1 \vee S^1 \xrightarrow{\nu \vee id} S^1 \vee S^1 \vee S^1 \rightarrow \cdots \rightarrow \bigvee_d S^1 \xrightarrow{\rho} S^1 ,$$

où $\rho : \bigvee_d S^1 \rightarrow S^1$ est l'application évidente.

DÉFINITION 12.4.1. *On appelle espace de Moore de type (G, n) l'espace*

$$M(G, n) = \underbrace{S^n \vee \cdots \vee S^n}_r \vee (S^n \cup_{\Sigma^{n-1}\alpha_{d_1}} e^{n+1}) \vee \cdots \vee (S^n \cup_{\Sigma^{n-1}\alpha_{d_k}} e^{n+1}) .$$

EXEMPLE 12.4.2. $M(\mathbb{Z}, n) = S^n$

THÉORÈME 12.4.3. *Si G est un groupe abélien et $n \geq 0$ alors $SP(M(G, n))$ est un $K(G, n)$.*

Ce théorème est un corollaire immédiat de la proposition 11.3.1 et théorème plus précis suivant :

THÉORÈME 12.4.4. *a) Pour tout $n \geq 1$, $SP(S^n)$ est un $K(\mathbb{Z}, n)$.*

b) Pour tout $n \geq 1$ et d entier positif $SP(S^n \cup_{\Sigma^{n-1}\alpha_d} e^{n+1})$ est un $K(\mathbb{Z}/d, n)$.

DÉMONSTRATION. Pour a) : c'est une application directe du corollaire 11.2.3 et du calcul $SP(S^1) = S^1 = K(\mathbb{Z}, 1)$.

Pour b) : Considérons la cofibration

$$S^n \hookrightarrow S^n \cup_{\Sigma^{n-1}\alpha_d} e^{n+1} ,$$

l'application quotient $S^n \cup_{\Sigma^{n-1}\alpha_d} e^{n+1} \longrightarrow S^{n+1}$ induit d'après le théorème de Dold-Thom une quasi-fibration

$$SP(S^n \cup_{\Sigma^{n-1}\alpha_d} e^{n+1}) \longrightarrow SP(S^{n+1})$$

de fibre $SP(S^n)$. On déduit de la suite longue d'homotopie et de a) que

$$\pi_i(SP(S^n \cup_{\Sigma^{n-1}\alpha_d} e^{n+1})) = 0 \text{ si } i \neq n, n+1 .$$

On a de plus la suite exacte courte

$$(1) \quad 0 \longrightarrow \pi_{n+1}(SP(S^n \cup_{\Sigma^{n-1}\alpha_d} e^{n+1})) \longrightarrow \pi_{n+1}(SP(S^{n+1})) \simeq \mathbb{Z} \\ \xrightarrow{\partial} \pi_n(SP(S^n)) \simeq \mathbb{Z} \longrightarrow \pi_n(SP(S^n \cup_{\Sigma^{n-1}\alpha_d} e^{n+1})) \longrightarrow 0 .$$

On vérifie que l'application bord n'est rien d'autre que la multiplication par d .

□

13. Tours de Whitehead et de Postnikov

Rappelons la proposition suivante, qui nous avait servi à démontrer l'unicité à équivalence d'homotopie près du CW-modèle n -connexe d'une paire (X, A) :

PROPOSITION 13.0.5. Soit

$$\begin{array}{ccc} Z & \xrightarrow{h} & Z' \\ f \downarrow & & \downarrow f' \\ X & \xrightarrow{g} & X' \end{array}$$

où $f : (Z, A) \longrightarrow (X, A)$ et $f' : (Z', A') \longrightarrow (X', A')$ sont des CW-modèles n -connexes (respectivement n' -connexes) et $g : (X, A) \longrightarrow (X', A')$. Si $n \geq n'$ il existe une application $h : Z \longrightarrow Z'$ rendant le diagramme commutatif à homotopie relativement à A près. De plus une telle application h est unique à homotopie relativement à A près.

13.1. Tours de Whitehead. Comme corollaire de cette proposition pour $A = \{*\}$, on obtient la

PROPOSITION 13.1.1. *Soit X un CW -complexe. Il existe une suite de fibrations $X_n \rightarrow X_{n-1}$*

$$\begin{array}{ccc}
 \vdots & & \\
 \downarrow & & \\
 X_3 & & \\
 \downarrow & \searrow & \\
 X_2 & & \\
 \downarrow & \searrow & \\
 X_1 & \longrightarrow & X
 \end{array}$$

telle que

- X_n est n -connexe.
- L'application $X_n \rightarrow X$ induit $\pi_i(X_n) \simeq \pi_i(X)$ pour $i > n$.

L'espace X_1 est un CW -complexe ayant le type d'homotopie du revêtement universel de la composante connexe par arc de X contenant $*$, et X_n doit être pensé comme « revêtement n -connexe » de X . Pour $n > 1$ de tels revêtements apparaissent rarement géométriquement.

Exemple : le fibré de Hopf $S^3 \rightarrow S^2$ est un revêtement 2-connexe.

Considérons la fibre d'homotopie F de $X_n \rightarrow X_{n-1}$, qui a le type d'homotopie d'un CW -complexe. Par la suite longue d'homotopie

$$\cdots \rightarrow \pi_n(X_n) \rightarrow \pi_n(X_{n-1}) \rightarrow \pi_{n-1}(F) \rightarrow \pi_{n-1}(X_n) \rightarrow \cdots,$$

on voit que la fibre d'homotopie F est un $K(\pi_n(X), n-1)$.

13.2. Tours de Postnikov. Soit $X \in \mathbf{Top}_*$. Bien que X ait les mêmes groupes d'homotopie que l'espace produit $\prod_i K(\pi_i(X), i)$, il n'a pas en général le même type d'homotopie. Néanmoins, on peut penser X comme un produit tordu d'espaces d'Eilenberg-MacLane au sens suivant :

PROPOSITION 13.2.1. *Soit X un CW -complexe. Il existe une suite de fibrations $X_n \rightarrow X_{n-1}$*

$$\begin{array}{ccc}
 \vdots & & \\
 \downarrow & & \\
 X_3 & & \\
 \downarrow & \nearrow & \\
 X_2 & & \\
 \downarrow & \nearrow & \\
 X_1 & \longleftarrow & X
 \end{array}$$

telle que

- la fibre de $X_n \rightarrow X_{n-1}$ est $K(\pi_n(X), n)$.
- L'application $X \rightarrow X_n$ est une $(n+1)$ -équivalence.

DÉMONSTRATION. On prend (X_n, X) le $(n + 1)$ -modèle connexe de (CX, X) .

□

14. Homologie

14.1. Définition axiomatique.

14.1.1. Théories homologiques réduites sur \mathbf{CW}_* .

DÉFINITION 14.1.1. On appelle *théorie homologique réduite sur \mathbf{CW}_** une collection de foncteurs $\tilde{\mathbb{H}}_* : \mathbf{Ho}(\mathbf{CW}_*) \rightarrow \mathbf{Ab}$, $*$ $\in \mathbb{Z}$, et de transformations naturelles $s_* : \tilde{\mathbb{H}}_* \rightarrow \tilde{\mathbb{H}}_{*+1} \circ \Sigma$, vérifiant les axiomes suivants :

- *Exactitude* : si $A \hookrightarrow X$ alors la suite

$$\tilde{\mathbb{H}}_q(A) \longrightarrow \tilde{\mathbb{H}}_q(X) \longrightarrow \tilde{\mathbb{H}}_q(X/A)$$

est exacte (rappelons que X/A et la cofibre $X \cup CA$ sont homotopiquement équivalents).

- *Suspension* : Pour tout entier q la suspension induit un isomorphisme naturel

$$s_q(X) : \tilde{\mathbb{H}}_q(X) \simeq \tilde{\mathbb{H}}_{q+1}(\Sigma X) .$$

- *Additivité* : Si $X = \vee_i X_i$ alors les inclusions $X_i \rightarrow X$ induisent un isomorphisme $\bigoplus_i \tilde{\mathbb{H}}_*(X_i) \simeq \tilde{\mathbb{H}}_*(X)$.

De plus, on dira que $\tilde{\mathbb{H}}_*$ est ordinaire si $\tilde{\mathbb{H}}_q(S^0) = 0$ pour $q \neq 0$. On notera G le groupe abélien $\tilde{\mathbb{H}}_0(S^0)$ et on dira que $\tilde{\mathbb{H}}_*$ est à coefficients dans G .

14.1.2. *Théories homologiques réduites sur \mathbf{Top}_*^{nd}* . Notons tout d'abord que la définition 14.1.1 s'étend naturellement à la catégorie \mathbf{Top}_*^{nd} des espaces topologiques pointés non-dégénérés comme suit :

DÉFINITION 14.1.2. On appelle *théorie homologique réduite sur \mathbf{Top}_*^{nd}* une collection de foncteurs $\tilde{\mathbb{H}}_* : \mathbf{Ho}(\mathbf{Top}_*^{nd}) \rightarrow \mathbf{Ab}$, $*$ $\in \mathbb{Z}$, et de transformations naturelles $s_* : \tilde{\mathbb{H}}_* \rightarrow \tilde{\mathbb{H}}_{*+1} \circ \Sigma$ vérifiant les axiomes suivants :

- *exactitude pour les cofibrations*
- *suspension*
- *additivité*
- *équivalence faible* : si $f : X \rightarrow Y$ est une équivalence faible alors $f_* : \tilde{\mathbb{H}}_*(X) \rightarrow \tilde{\mathbb{H}}_*(Y)$ est un isomorphisme.

Bien-sûr une théorie homologique réduite sur \mathbf{Top}_*^{nd} définit par restriction une théorie homologique réduite sur \mathbf{CW}_* . Réciproquement, une théorie homologique réduite sur \mathbf{CW}_* définit une théorie homologique réduite sur \mathbf{Top}_*^{nd} par CW -approximation : si $\Gamma : \mathbf{Top}_*^{nd} \rightarrow \mathbf{CW}_*$ est un foncteur de CW -approximation on définit $\tilde{\mathbb{H}}(X) := \tilde{\mathbb{H}}(\Gamma X)$ pour tout $X \in \mathbf{Top}_*^{nd}$.

14.1.3. *Théories homologiques pour les paires*. Soit \mathbf{CW}_2 la catégorie des CW -paires et $R : \mathbf{CW}_2 \rightarrow \mathbf{CW}_2$ le foncteur qui à une paire (X, A) associe la paire (A, \emptyset) .

DÉFINITION 14.1.3. Une *théorie homologique (généralisée) sur \mathbf{CW}_2* est la donnée d'une collection de foncteurs $\mathbb{H}_* : \mathbf{Ho}(\mathbf{CW}_2) \rightarrow \mathbf{Ab}$, $*$ $\in \mathbb{Z}$, et de transformations naturelles $\partial_* : \mathbb{H}_* \rightarrow \mathbb{H}_{*-1} \circ R$ vérifiant les axiomes :

– *Exactitude* : on a la suite exacte longue

$$\cdots \longrightarrow \mathbb{H}_q(A) \longrightarrow \mathbb{H}_q(X) \longrightarrow \mathbb{H}_q(X, A) \xrightarrow{\partial_q} \mathbb{H}_{q-1}(A) \longrightarrow \cdots ,$$

où $\mathbb{H}_q(X) := \mathbb{H}_q(X, \emptyset)$.

– *Excision* : Si $(X; A, B)$ est une triade excisive alors l'inclusion $(A, A \cap B) \longrightarrow (X, B)$ induit un isomorphisme

$$\mathbb{H}_*(A, A \cap B) \simeq \mathbb{H}_*(X, B) .$$

– *Additivité* : Si $(X, A) = \coprod_i (X_i, A_i)$ alors les inclusions $(X_i, A_i) \longrightarrow (X, A)$ induisent un isomorphisme

$$\bigoplus_i \mathbb{H}_*(X_i, A_i) \longrightarrow \mathbb{H}_*(X, A) .$$

Comme dans le cas réduit, on étend la théorie aux paires de **Top** à l'aide du théorème d'approximation cellulaire pour les paires. On définit ainsi une théorie homologique pour les paires de **Top**, qui vérifie les mêmes axiomes que la théorie pour les *CW*-paires, plus l'axiome d'équivalence faible (exercice : vérifier l'excision).

14.1.4. *Lien théorie réduite/théorie pour les paires.* Soit $\tilde{\mathbb{H}}_*$ une théorie réduite sur \mathbf{CW}_* . On lui associe une théorie \mathbb{H}_* sur \mathbf{CW}_2 de la façon suivante :

Soit (X, A) une *CW*-paire, on pose

$$\mathbb{H}_*(X, A) = \tilde{\mathbb{H}}_*(X/A)$$

(noter que X/A est naturellement un *CW*-complexe pointé).

Pour définir les morphismes de connection, remarquons que $X/A = X_+/A_+$ (où $X_+ = X \coprod \{*\}$). La suite longue de cofibration $A_+ \longrightarrow X_+ \longrightarrow X/A \xrightarrow{p} \Sigma A_+$ permet de définir un morphisme de connection $\partial_* : \mathbb{H}_*(X, A) \longrightarrow \mathbb{H}_{*-1}(X) := \tilde{\mathbb{H}}_*(X_+)$ comme le composé

$$\mathbb{H}_*(X, A) = \tilde{\mathbb{H}}_*(X_+/A_+) \xrightarrow{p_*} \tilde{\mathbb{H}}_*(\Sigma A_+) \xrightarrow{\Sigma^{-1}} \tilde{\mathbb{H}}_{*-1}(A_+) = \mathbb{H}_{*-1}(A) .$$

On démontre facilement le

THÉORÈME 14.1.4. *L'application qui à une théorie homologique sur \mathbf{CW}_2 associe une théorie homologique réduite sur \mathbf{CW}_* via $\tilde{\mathbb{H}}_*(X) = \mathbb{H}_*(X, *_X)$ est une bijection, d'inverse $(\mathbb{H}_*, \partial_*)$. De même pour \mathbf{Top}_2 et \mathbf{Top}_*^{nd} .*

DÉMONSTRATION. L'exactitude de \mathbb{H}_* se déduit de l'exactitude et de la suspension pour la théorie réduite. L'excision se déduit de $X/B = A/A \cap B$. L'additivité vient de l'additivité pour la théorie réduite en notant que la cofibre d'une union disjointe de flèches est le coproduit des cofibres des flèches. \square

14.2. Propriété de Mayer-Vietoris pour une théorie homologique. Soit \mathbb{H}_* une théorie homologique sur les paires d'espaces topologiques. Commençons par noter l'existence pour \mathbb{H}_* de l'analogue de la suite longue d'homotopie pour les paires.

PROPOSITION 14.2.1. *Pour un triple (X, A, B) on a une suite longue exacte*

$$\cdots \longrightarrow \mathbb{H}_q(A, B) \longrightarrow \mathbb{H}_q(X, B) \longrightarrow \mathbb{H}_q(X, A) \xrightarrow{\partial} \mathbb{H}_{q-1}(A, B) \longrightarrow \cdots .$$

DÉMONSTRATION. Par approximation cellulaire on peut supposer que (X, A, B) est un CW -triple. Mais alors $X/A = (X/B)/(A/B)$. La suite exacte demandée est alors la suite exacte longue pour \tilde{H}_* de la paire d'espaces pointés $(X/B, A/B)$. □

LEMME 14.2.2. *Soit $(X; A, B)$ une triade excisive. Alors les inclusions $(A, A \cap B) \rightarrow (X, A \cap B)$ et $(B, A \cap B) \rightarrow (X, A \cap B)$ induisent un isomorphisme*

$$\mathbb{H}_*(A, A \cap B) \oplus \mathbb{H}_*(B, A \cap B) \rightarrow \mathbb{H}_*(X, A \cap B) .$$

DÉMONSTRATION. Par CW -approximation on se ramène au cas où $(X; A, B)$ est une CW -triade. Dans ce cas $X/(A \cap B) = (A/A \cap B) \vee (B/A \cap B)$ et on conclut par l'axiome d'additivité. □

THÉORÈME 14.2.3 (Mayer-Vietoris). *Soit $(X; A, B)$ une triade excisive. Alors la suite longue*

$$\cdots \rightarrow \mathbb{H}_q(A \cap B) \rightarrow \mathbb{H}_q(A) \oplus \mathbb{H}_q(B) \rightarrow \mathbb{H}_q(X) \xrightarrow{\delta} \mathbb{H}_{q-1}(A \cap B) \rightarrow \cdots$$

est exacte, où la première flèche est induite du plongement diagonal de $A \cap B$ dans $A \times B$, la seconde est la différence des applications naturelles, et δ est le composé

$$\mathbb{H}_q(X) \rightarrow \mathbb{H}_q(X, B) \simeq \mathbb{H}_q(A, A \cap B) \xrightarrow{\partial} \mathbb{H}_{q-1}(A \cap B) .$$

DÉMONSTRATION. S'obtient facilement à partir de la proposition et du lemme précédent, et par chasse au diagramme. □

15. Un exemple de théorie homologique réduite ordinaire

15.0.1. *Définition.*

DÉFINITION 15.0.4. *Soit G un groupe abélien. On définit le foncteur « homologie réduite à coefficients dans G sur \mathbf{CW}_* » par*

$$\tilde{H}_n(X, G) = \pi_{n+1}(SP(X \wedge M(G, 1))) .$$

Quand $G = \mathbb{Z}$ on note simplement \tilde{H}_ pour $\tilde{H}_*(\cdot, \mathbb{Z})$.*

REMARQUE 15.0.5. $M(\mathbb{Z}, 1) = S^1$ donc $\tilde{H}_n(X, \mathbb{Z}) = \pi_{n+1}(SP(\Sigma X)) \simeq \pi_n(SP(X))$ si X est connexe par arc.

PROPOSITION 15.0.6. *Le foncteur $\tilde{H}_*(\cdot, G) : \mathbf{Ho}(\mathbf{CW}_*) \rightarrow C(\mathbf{Ab})$ est une théorie homologique réduite ordinaire à coefficients dans G .*

DÉMONSTRATION. Pour l'exactitude, soit $A \subset X \in \mathbf{CW}_*$, qui induit $A \wedge M(G, 1) \subset X \wedge M(G, 1)$, dont le cône est équivalent à $(X/A) \wedge M(G, 1)$. On déduit le résultat cherché du théorème de Dold-Thom. Pour l'axiome de suspension, remarquons que $\Sigma X \wedge M(G, 1) \simeq \Sigma(X \wedge M(G, 1))$ et le résultat par le corollaire 11.2.3. Pour l'additivité, notons que $(X \vee Y) \wedge M(G, 1) \simeq (X \wedge M(G, 1)) \vee (Y \wedge M(G, 1))$ et le résultat suit de $SP(X \vee Y) \simeq SP(X) \times SP(Y)$ (proposition 11.3.1). L'ordinarité découle du lemme suivant. □

LEMME 15.0.7. *Pour la n -sphère S^n , $n \geq 0$, on a $\tilde{H}_q(S^n, G) = \begin{cases} G & \text{si } q = n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.*

DÉMONSTRATION.

$$\begin{aligned} \tilde{H}_q(S^n, G) &= \pi_{q+1}(SP(S^n \wedge M(G, 1))) = \pi_{q+1}(SP(M(G, n+1))) \\ &= \pi_{q+1}(K(G, n+1)) . \end{aligned}$$

□

15.0.2. *Le théorème d'Hurewicz.*

DÉFINITION 15.0.8. *Soit X un CW -complexe pointé. L'inclusion $i : X \subset SP(X)$ induit un homomorphisme*

$$h_X : \pi_q(X) \longrightarrow \pi_q(SP(X)) \longrightarrow \pi_{q+1}(\Sigma SP(X)) = \tilde{H}_q(X) ,$$

appelé homomorphisme d'Hurewicz.

THÉORÈME 15.0.9. *Soit X un CW -complexe pointé $(n-1)$ -connexe, $n \geq 2$. Alors l'inclusion $i : X \subset SP(X)$ est une $(n+1)$ -équivalence.*

COROLLAIRE 15.0.10 (théorème d'isomorphisme d'Hurewicz). *Soit X un espace $(n-1)$ -connexe, $n \geq 2$. Alors le morphisme d'Hurewicz $h_X : \pi_q(X) \longrightarrow \tilde{H}_q(X)$ est un isomorphisme pour $q \leq n$ et un épimorphisme pour $q = n+1$.*

PREUVE DU THÉORÈME 15.0.9 : Comme X est un CW -complexe, à équivalence d'homotopie près on peut supposer que X^{n-1} est réduit à un point. On a donc $X^n = \vee_{\beta} S_{\beta}^n$ et X^{n+1} est le cône d'une application $\varphi^n : \vee_{\alpha} S_{\alpha}^n \longrightarrow \vee_{\beta} S_{\beta}^n$.

LEMME 15.0.11. (a) *Soit $f : X \longrightarrow Y$ avec X et Y $(n-1)$ -connexes, $n \geq 2$. Si $i : X \longrightarrow SP(X)$ et $j : Y \longrightarrow SP(Y)$ sont des $(n+1)$ -équivalences, alors l'inclusion $k : C_f \longrightarrow SP(C_f)$ est aussi une $(n+1)$ -équivalence.*

(b) *L'inclusion $\vee_{\alpha} S_{\alpha}^n \longrightarrow SP(\vee_{\alpha} S_{\alpha}^n)$ est une $(n+1)$ -équivalence.*

DÉMONSTRATION. *Pour (a) :* Se déduit du lemme des 5 et du diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccc} \pi_q(X) & \xrightarrow{f_*} & \pi_q(Y) & \longrightarrow & \pi_q(C_f) & \longrightarrow & \pi_{q-1}(X) \longrightarrow \dots \\ i_* \downarrow & & j_* \downarrow & & k_* \downarrow & & i_* \downarrow \\ \pi_q(SP(X)) & \longrightarrow & \pi_q(SP(Y)) & \longrightarrow & \pi_q(SP(C_f)) & \longrightarrow & \pi_{q-1}(SP(X)) \longrightarrow \dots \end{array}$$

L'exactitude de la première ligne suit du corollaire 10.0.11 au théorème d'excision homotopique. *Pour (b) :*

Si les α parcourent un ensemble fini, alors $SP(\vee_{\alpha} S_{\alpha}^n)$ est isomorphe au produit $\prod_{\alpha} SP(S_{\alpha}^n) = \prod_{\alpha} K(\mathbb{Z}, n)$ d'après la proposition 11.3.1 et le résultat s'en déduit. Passage à la colimite en général. □

On déduit du lemme que $X^{n+1} \longrightarrow SP(X^{n+1})$ est une $(n+1)$ -équivalence. Montrons par induction que $X^{n+k} \longrightarrow SP(X^{n+k})$ est une $(n+1)$ -équivalence. Le squelette X^{n+k+1} est le cône d'une application $\varphi^{n+k} : \vee_{\gamma} S_{\gamma}^{n+k} \longrightarrow X^{n+k}$. Les deux termes de ce cône sont $(n-1)$ -connexes, donc $X^{n+k+1} \longrightarrow$

$SP(X^{n+k+1})$ est une $(n+1)$ -équivalence d'après le lemme précédent. Ce qui conclut l'induction. Le théorème s'en déduit par passage à la colimite. \square

Rappelons que $h_{S^n} : \pi_n(S^n) \rightarrow H_n(S^n) \simeq \mathbb{Z}$ est un isomorphisme. Le morphisme d'Hurewicz s'interprète alors comme

LEMME 15.0.12. *Soit $\alpha : S^n \rightarrow X$. Alors $h_X([\alpha]) = \alpha_*(h_{S^n}([id_{S^n}]))$.*

15.0.3. *Le théorème de Whitehead dual.*

THÉORÈME 15.0.13. *Soient X et Y deux espaces pointés 1-connexes. Soit $f : X \rightarrow Y$ une application induisant un isomorphisme en homologie réduite. Alors f est une équivalence d'homotopie faible.*

DÉMONSTRATION. Quitte à remplacer Y par le cylindre \tilde{M}_f , on peut supposer que $f : X \subset Y$. On a alors le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccccc} \pi_q(X) & \xrightarrow{f_*} & \pi_q(Y) & \longrightarrow & \pi_q(Y, X) & \longrightarrow & \pi_{q-1}(X) & \xrightarrow{f_*} & \pi_{q-1}(Y) & \dots \\ h_X \downarrow & & h_Y \downarrow & & h_{(Y,X)} \downarrow & & h_X \downarrow & & h_Y \downarrow & \\ \tilde{H}_q(X) & \xrightarrow{f_*} & \tilde{H}_q(Y) & \longrightarrow & H_q(Y, X) & \longrightarrow & \tilde{H}_{q-1}(X) & \xrightarrow{f_*} & \tilde{H}_{q-1}(Y) & \end{array}$$

Par hypothèse $\pi_1(Y) = 0$ et $\pi_0(X) = 0$ donc $\pi_1(Y, X) = 0$. Comme $\pi_1(X) = 0$, par le théorème d'Hurewicz relatif on a $H_1(Y, X) = 0$ et $\pi_2(Y, X) \simeq H_2(Y, X)$. Par l'exactitude de la ligne d'homologie $H_2(Y, X) = 0$ et donc $\pi_2(Y, X) = 0$.

Par induction $\pi_i(Y, X) = 0$ et le résultat. \square

15.1. Construction de théories homologiques : où les spectres apparaissent. Comment construire d'autres théories homologiques que la théorie $\tilde{H}_*(\cdot, G)$ de la définition 15.0.4? Une réponse formelle est donnée par la notion de spectre, sur laquelle nous reviendrons ultérieurement.

DÉFINITION 15.1.1. *Un \mathbb{N} -spectre est la donnée d'une collection $(E_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'espaces de \mathbf{Top}_* et d'une collection de flèches $\sigma : \Sigma E_n \rightarrow E_{n+1}$.*

EXEMPLES 15.1.2. – Pour tout espace $X \in \mathbf{Top}_*$ la famille $(\Sigma^n X)_{n \in \mathbb{N}}$ muni des identifications canoniques $\sigma : \Sigma(\Sigma^n X) \rightarrow \Sigma^{n+1} X$, est un \mathbb{N} -spectre, appelé « suspension de X ». En particulier pour $X = S^0$ ce spectre s'appelle le spectre de la sphère.

– Soit G un groupe abélien. Notons qu'on dispose d'une équivalence d'homotopie $\sigma_* : K(G, n) \rightarrow \Omega K(G, n+1)$. Cette application est donc l'adjoint d'une application

$$\sigma : \Sigma K(G, n) \rightarrow K(G, n+1) ,$$

qui fait de $(K(G, n))_{n \in \mathbb{N}}$ un \mathbb{N} -spectre : le spectre d'Eilenberg-MacLane de G .

THÉORÈME 15.1.3. *Soit $(E_n)_{n \in \mathbb{N}}$ un \mathbb{N} -spectre tel que E_n est $n-1$ -connexe et a le type d'homotopie d'un CW-complexe pour tout $n \in \mathbb{N}$. Posons*

$$\tilde{E}_q(X) = \operatorname{colim}_n \pi_{q+n}(X \wedge E_n) ,$$

où la colimite est prise sur

$$\pi_{q+n}(X \wedge E_n) \xrightarrow{\Sigma} \pi_{q+n+1}(\Sigma(X \wedge E_n)) \simeq \pi_{q+n+1}(X \wedge \Sigma E_n) \xrightarrow{1_X \wedge \sigma} \pi_{q+n+1}(X \wedge E_{n+1}) .$$

Alors les foncteurs \tilde{E}_q définissent une théorie homologique réduite sur \mathbf{CW}_* .

DÉMONSTRATION. C'est un exercice d'application du théorème d'excision homotopique et du théorème de suspension de Freudenthal. Laissé au lecteur (c.f. [8, p.177]). \square

EXEMPLES 15.1.4. – la théorie homologique réduite définie par le spectre de la sphère est l'homotopie stable.

– la théorie homologique réduite définie par le spectre d'Eilenberg-MacLane d'un groupe abélien G est une théorie ordinaire à coefficients dans G . Comme telle (c.f. section suivante) elle coïncide avec $\tilde{H}_*(\cdot, G)$.

15.2. Unicité des théories homologiques ordinaires. Soit G un groupe abélien. On a déjà défini deux théories homologiques ordinaires réduites à coefficients dans G :

- $\tilde{H}_q(X, G) = \pi_{q+1}(SP(X \wedge M(G, 1)))$.
- $\tilde{H}_q(X, G) = \text{colim}_n \pi_{q+n}(X \wedge K(G, n))$.

On vérifie aussi que $\tilde{H}_q(X, G) = \pi_q(Z_0(X, G))$ définit aussi une théorie homologique réduite ordinaire à coefficients dans G . Rappelons encore deux autres constructions classiques.

15.2.1. *Homologie cellulaire.*

DÉFINITION 15.2.1. Soit $X \in \mathbf{CW}_*$ et $\{*\} = X^{-1} \subset X^0 \subset X^1 \subset \dots \subset X^n \subset \dots \subset X$ la filtration squelettale de X .

– Pour $n \geq 0$ on pose

$$C_n(X) = \pi'_n(X^n/X^{n-1}) \simeq \bigoplus_{j \in J^n} \mathbb{Z}$$

où J^n désigne l'ensemble des n -cellules de X et π'_n désigne π_n si $n \geq 2$, l'abélianisé de π_1 pour $n = 1$, et le groupe libre engendré par $\pi_0(X) - \{*\}$ si $n = 0$.

– On définit une différentielle $d_n : C_n(X) \rightarrow C_{n-1}(X)$ par la composition

$$\pi'_n(X^n, X^{n-1}) \xrightarrow{\partial} \pi'_{n-1}(X^{n-1}) \rightarrow \pi'_{n-1}(X^{n-1}, X^{n-2}) .$$

On vérifie facilement que $(C_\bullet(X), d)$ est un complexe. Etant donné une paire $(X, A) \in \mathbf{CW}_2$, on appelle l'homologie du complexe $(C_\bullet(X)/C_\bullet(A) \otimes G, d)$, où G est un groupe abélien, l'homologie cellulaire de (X, A) à coefficients dans G .

On vérifie facilement que l'homologie cellulaire à coefficients dans G définit une théorie homologique ordinaire à coefficients dans G .

15.2.2. *Homologie singulière.* Notons Δ^q le q -simplexe géométrique standard :

$$\Delta^q = \{(t_0, \dots, t_q) \in \mathbb{R}^{q+1} / \sum_i t_i = 1, t_i \geq 0 \forall i\} .$$

Pour $0 \leq m \leq q$ on dispose d'une application face

$$\begin{aligned} f_m^q : \quad \Delta^{q-1} &\longrightarrow \Delta^q \\ (t_0, \dots, t_{q-1}) &\mapsto (t_0, \dots, t_{m-1}, 0, t_m, \dots, t_{q-1}) \end{aligned}$$

Si $X \in \mathbf{Top}$, un q -simplexe singulier de X est une application continue

$$\sigma : \Delta^q \longrightarrow X .$$

DÉFINITION 15.2.2. Soit G un groupe abélien. On définit $\text{Sing}_q(X, G)$ comme le G -module libre de base les simplexes singuliers $\sigma : \Delta^q \longrightarrow X$. On munit $\text{Sing}_\bullet(X, G)$ d'une structure de complexe en posant

$$\begin{aligned} \partial : \text{Sing}_q(X, G) &\longrightarrow \text{Sing}_{q-1}(X, G) \\ \sigma &\longmapsto \sum_{m=0}^q (-1)^m \sigma \circ f_m^q \end{aligned}$$

Si maintenant (X, A) est une paire de \mathbf{Top} on définit le complexe

$$\text{Sing}_\bullet(X, A, G) = \text{Sing}_\bullet(X, G) / \text{Sing}_\bullet(A, G) .$$

DÉFINITION 15.2.3. On pose $H_q(X, A, G) = H_q(\text{Sing}_\bullet(X, A, G), \partial)$.

On vérifie classiquement qu'on définit ainsi une théorie homologique ordinaire pour les paires, à coefficients dans G .

15.2.3. *Unicité.* Dans cette section on montre que toutes les théories homologiques *ordinaires* à coefficients dans G coïncident, en montrant qu'elles coïncident avec l'homologie cellulaire à coefficients dans G .

Soit donc $\tilde{\mathbb{H}}_*$ une théorie homologique réduite ordinaire à coefficients dans G .

LEMME 15.2.4. Soit $X \in \mathbf{CW}_*$. Alors

$$\mathbb{H}_m(X^n, X^{n-1}) = \begin{cases} \bigoplus_{i \in J^n} \mathbf{G} & \text{si } m = n, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

où J^n désigne l'ensemble des n -cellules de X .

DÉMONSTRATION.

$$\begin{aligned} \mathbb{H}_m(X^n, X^{n-1}) &\simeq \tilde{\mathbb{H}}_m(X^n / X^{n-1}) \simeq \tilde{\mathbb{H}}_m\left(\bigvee_{i \in J^n} S^n\right) \\ &\simeq \bigoplus_{i \in J^n} \tilde{\mathbb{H}}_m(S^n) \end{aligned}$$

On déduit le résultat de l'axiome de suspension. □

DÉFINITION 15.2.5. Définissons le complexe $(C'_*(X), d_{\mathbb{H}})$ par

$$C'_n(X) = \mathbb{H}_n(X^n, X^{n-1}) = \bigoplus_{j \in J^n} \mathbf{G}$$

et $d_{\mathbb{H},n} : C'_n(X) \longrightarrow C'_{n-1}(X)$ défini par la composition

$$\mathbb{H}_n(X^n, X^{n-1}) \xrightarrow{\partial} \mathbb{H}_{n-1}(X^{n-1}) \longrightarrow \mathbb{H}_{n-1}(X^{n-1}, X^{n-2}) .$$

THÉORÈME 15.2.6. Soit $(X, A) \in \mathbf{CW}_2$.

(a) Le complexe $((C'_*(X)/C'_*(A)), d_{\mathbb{H}})$ est isomorphe au complexe $((C_*(X)/C_*(A)) \otimes G, d)$ de l'homologie cellulaire à coefficient dans G .

(b) L'homologie du complexe $((C'_*(X)/C'_*(A)), d_{\mathbb{H}})$ coïncide avec $\mathbb{H}_n(X, A)$.

COROLLAIRE 15.2.7. (a) Etant donné un groupe abélien G , il existe une unique théorie homologique ordinaire à coefficients dans G (à isomorphisme près).

(b) Si $X \in \mathbf{CW}$, $\mathbb{H}_m(X) = 0$ pour $m > \dim X$.

REMARQUE 15.2.8. Le corollaire (b) montre à quel point le théorème de Whitehead dual est étonnamment fort, au vu du

THÉORÈME 15.2.9 (Serre). Soit X un CW -complexe 1-connexe fini non contractible de dimension au moins 2, par exemple S^2 . Alors X a un nombre infini de groupes d'homotopie non-triviaux.

En effet si $f : X \rightarrow Y$ entre deux CW -complexes pointés finis 1-connexes induit un isomorphisme sur les groupes d'homologie réduite (en nombres finis), alors f induit un isomorphisme sur les groupes d'homotopie (en nombre infini).

PREUVE DU THÉORÈME 15.2.6 : Par souci de simplicité on se contente de donner la preuve dans le cas $A = \emptyset$ et $G = \mathbb{Z}$.

La première étape consiste à démontrer que la théorie homologique réduite ordinaire $\tilde{\mathbb{H}}_*$ vérifie le théorème d'Hurewicz. Définissons tout d'abord le morphisme d'Hurewicz pour $\tilde{\mathbb{H}}_*$. Fixons un générateur i_0 de $\tilde{\mathbb{H}}_0(S^0) \simeq \mathbb{Z}$ et choisissons des générateurs i_n de $\tilde{\mathbb{H}}_n(S^n)$ en posant inductivement $i_{n+1} = \Sigma i_n$.

DÉFINITION 15.2.10 (Morphisme d'Hurewicz). On définit

$$h_X : \pi_n(X) \rightarrow \tilde{\mathbb{H}}_n(X)$$

par

$$h([f]) = f_*(i_n) .$$

On vérifie facilement que h_X est un homomorphisme de groupe et que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \pi_n(X) & \xrightarrow{h_X} & \tilde{\mathbb{H}}_n(X) \\ \Sigma \downarrow & & \downarrow \Sigma \\ \pi_{n+1}(\Sigma X) & \xrightarrow{h_{\Sigma X}} & \tilde{\mathbb{H}}_{n+1}(\Sigma X) \end{array}$$

est commutatif.

PROPOSITION 15.2.11 (Hurewicz). Soit $X \in \mathbf{Top}_*$ $(n-1)$ -connexe. Alors $h : \pi_n(X) \rightarrow \tilde{\mathbb{H}}_n(X)$ est l'homomorphisme d'abelianisation si $n = 1$ et un isomorphisme pour $n > 1$.

DÉMONSTRATION. La preuve est essentiellement la même que précédemment. Le cas $X = \bigvee_{\alpha} S_{\alpha}^n$ découle des définitions. Sans perdre en généralité on peut supposer que X est un \mathbf{CW} -complexe avec $X^n = \bigvee_{\beta} S_{\beta}^n$ et X^{n+1} est le cône d'une application $\varphi^n : \bigvee_{\alpha} S_{\alpha}^n \rightarrow \bigvee_{\beta} S_{\beta}^n$. On a alors le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccc} \pi_n(\bigvee_{\alpha} S_{\alpha}^n) & \xrightarrow{\varphi_*} & \pi_n(\bigvee_{\beta} S_{\beta}^n) & \longrightarrow & \pi_n(X^{n+1}) & \longrightarrow & 0 \\ \downarrow h & & \downarrow h & & \downarrow h & & \\ \tilde{\mathbb{H}}_n(\bigvee_{\alpha} S_{\alpha}^n) & \xrightarrow{\varphi_*} & \tilde{\mathbb{H}}_n(\bigvee_{\beta} S_{\beta}^n) & \longrightarrow & \tilde{\mathbb{H}}_n(X^{n+1}) & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

La ligne inférieure est exacte car le quotient de X^{n+1} par $\bigvee_{\beta} S_{\beta}^n$ est un coproduit de $(n+1)$ -sphères qui n'ont pas de $(n-1)$ -homologie. La ligne supérieure est exacte : on applique le théorème d'excision homotopique pour obtenir $\pi_n(M_{\varphi}, \bigvee_{\beta} S_{\beta}^n) \simeq \pi_n(X^{n+1})$. On conclut du cas des coproduits de sphères que $h : \pi_n(X^{n+1}) \longrightarrow \tilde{\mathbb{H}}_n(X^{n+1})$ est un isomorphisme.

Par approximation cellulaire l'inclusion $X^{n+1} \longrightarrow X$ induit un isomorphisme sur π_n . Par suite longue d'homologie associée à $X^{n+k} \hookrightarrow X^{n+k+1} \longrightarrow \bigvee_{\gamma} S_{\gamma}^{n+k+1}$ et par récurrence on obtient aussi que l'inclusion $X^{n+1} \longrightarrow X$ induit un isomorphisme sur $\tilde{\mathbb{H}}_n$. D'où le résultat. \square

On peut maintenant finir la preuve du théorème 15.2.6.

Pour (a) : Il faut montrer que $d = d_{\mathbb{H}}$. Cela ressort du théorème d'Hurewicz, de la commutation de la suspension au morphisme d'Hurewicz et du diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccc} d_n : & \pi'_n(X^n/X^{n-1}) & \xrightarrow{\partial} & \pi'_n(\Sigma X^{n-1}) & \xrightarrow{\Sigma^{-1}} & \pi'_{n-1}(X^{n-1}) & \longrightarrow & \pi'_{n-1}(X^{n-1}/X^{n-2}) \\ & \downarrow h & & \downarrow h & & \downarrow h & & \downarrow h \\ d_{\mathbb{H},n} : & \tilde{\mathbb{H}}_n(X^n/X^{n-1}) & \xrightarrow{\partial} & \tilde{\mathbb{H}}_n(\Sigma X^{n-1}) & \xrightarrow{\Sigma^{-1}} & \tilde{\mathbb{H}}_{n-1}(X^{n-1}) & \longrightarrow & \tilde{\mathbb{H}}_{n-1}(X^{n-1}/X^{n-2}) \end{array}$$

Pour (b) : Considérons le diagramme

$$\begin{array}{ccccc} \cdots & \longrightarrow & \mathbb{H}_{n+1}(X^{n+1}, X^n) & \xrightarrow{d_{\mathbb{H},n+1}} & \mathbb{H}_n(X^n, X^{n-1}) & \xrightarrow{d_{\mathbb{H},n}} & \mathbb{H}_{n-1}(X^{n-1}, X^{n-2}) \\ & & \downarrow \partial & \nearrow (1) & \downarrow \partial & \nearrow (2) & \\ & & \mathbb{H}_n(X^n) & & \mathbb{H}_{n-1}(X^{n-1}) & & \\ & & \downarrow & & & & \\ & & \mathbb{H}_n(X^{n+1}) & & & & \\ & & \downarrow & & & & \\ & & 0 & & & & \end{array}$$

Les injections viennent de ce que $\tilde{\mathbb{H}}_m(X^n) = 0$ si $m > n$: il suffit par induction de contempler la suite longue de la cofibration $\bigvee_{\alpha} S_{\alpha}^k \hookrightarrow X^k \longrightarrow X^{k+1}$ et d'utiliser l'ordinarité de $\tilde{\mathbb{H}}$.

Notons que la verticale de gauche d'une part, les flèches (1), ∂ , et (2) d'autre part, forment des suites exactes. On en déduit $\ker d_{\mathbb{H},n} = \ker \partial = \mathbb{H}^n(X^n)$ et $\text{Im } d_{\mathbb{H},n+1} = \text{Im } \partial$. Donc $\ker d_{\mathbb{H},n}/\text{Im } d_{\mathbb{H},n+1} = \mathbb{H}^n(X^n)/\text{Im } \partial = \mathbb{H}_n(X^{n+1}) = \mathbb{H}_n(X)$. \square

16. Cohomologie

16.1. Définition.

DÉFINITION 16.1.1. *On appelle théorie cohomologique réduite sur \mathbf{CW}_* une collection de foncteurs $\tilde{\mathbb{H}}^* : \mathbf{Ho}(\mathbf{CW}_*)^{op} \longrightarrow Ab$, $*$ $\in \mathbb{Z}$, et de transformations naturelles $s^* : \tilde{\mathbb{H}}^{*+1} \circ \Sigma \longrightarrow \tilde{\mathbb{H}}^*$ vérifiant les axiomes suivants :*

– *Exactitude : si $A \hookrightarrow X$ alors la suite*

$$\tilde{\mathbb{H}}^q(X/A) \longrightarrow \tilde{\mathbb{H}}^q(X) \longrightarrow \tilde{\mathbb{H}}^q(A)$$

est exacte (rappelons que X/A et la cofibre $X \cup CA$ sont homotopiquement équivalents).

– *Suspension* : Pour tout entier q la suspension induit un isomorphisme naturel

$$s^q(X) : \tilde{\mathbb{H}}^{q+1}(\Sigma X) \simeq \tilde{\mathbb{H}}^q(X) .$$

– *Additivité* : Si $X = \bigvee_i X_i$ alors les inclusions $X_i \longrightarrow X$ induisent un isomorphisme $\tilde{\mathbb{H}}^*(X) \longrightarrow \prod_i \tilde{\mathbb{H}}^*(X_i)$.

De plus, on dira que $\tilde{\mathbb{H}}^*$ est ordinaire si $\tilde{\mathbb{H}}^q(S^0) = 0$ pour $q \neq 0$. On notera G le groupe abélien $\tilde{\mathbb{H}}^0(S^0)$ et on dira que $\tilde{\mathbb{H}}^*$ est à coefficients dans G .

De même que pour l'homologie, cette définition s'étend alors à la catégorie \mathbf{Top}_*^{nd} des espaces topologiques pointés non-dégénérés par CW -approximation. Une théorie cohomologique sur \mathbf{Top}_*^{nd} vérifie les axiomes d'exactitude pour les cofibrations, de suspension, d'additivité et d'équivalence faible.

16.2. Construction : les Ω -spectres.

DÉFINITION 16.2.1. Un \mathbb{N} -spectre (E_n) est un Ω -spectre si la connexion adjointe $E_n \xrightarrow{\sigma_*} \Omega E_{n+1}$ déduite de $\Sigma E_n \xrightarrow{\sigma} E_{n+1}$ est une équivalence faible pour tout $n \in \mathbb{N}$.

THÉORÈME 16.2.2. Soit $(E_n)_{n \in \mathbb{N}}$ un Ω -spectre et définissons

$$\tilde{E}^n(X) = \begin{cases} [X, E_n] & \text{si } n \geq 0 \\ [X, \Omega^n E_0] & \text{si } n < 0. \end{cases}$$

Alors les foncteurs (\tilde{E}^n) définissent une théorie cohomologique réduite sur \mathbf{CW}_* .

REMARQUE 16.2.3. Comme E_n est faiblement équivalent à ΩE_{n+1} , E_n est faiblement équivalent à un espace de lacet infini. En particulier $[X, E_n]$ est bien un groupe abélien.

DÉMONSTRATION. L'exactitude vient de ce que $A \hookrightarrow X \longrightarrow X/A$ est coexacte. L'axiome de suspension se déduit de $\Omega E_{n+1} \simeq E_n$. L'additivité vient de ce que \vee est un coproduit. \square

REMARQUE 16.2.4. Nous verrons plus loin que toute théorie cohomologique réduite est représentable par un Ω -spectre.

16.3. Un exemple.

DÉFINITION 16.3.1. Soit G un groupe abélien. On définit le foncteur « cohomologie réduite à coefficients dans G sur \mathbf{CW}_* » par

$$\tilde{H}^n(X, G) = [X, K(G, n)] .$$

Comme $(K(G, n))_{n \in \mathbb{N}}$ est un Ω -spectre, on obtient bien ainsi une théorie cohomologique réduite, dont on vérifie immédiatement qu'elle est ordinaire à coefficients dans G :

LEMME 16.3.2. Pour la n -sphère S^n , $n \geq 0$, on a $\tilde{H}^q(S^n, G) = \begin{cases} G & \text{si } q = n, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$

DÉMONSTRATION. $\tilde{H}^q(S^n, G) = [S^q, K(G, n)]_* = \pi_q(K(G, n))$. \square

16.4. Théories cohomologiques pour les paires. Soit \mathbf{CW}_2 la catégorie des CW -paires et $R : \mathbf{CW}_2 \rightarrow \mathbf{CW}_2$ le foncteur qui à une paire (X, A) associe la paire (A, \emptyset) .

DÉFINITION 16.4.1. Une théorie cohomologique (généralisée) sur \mathbf{CW}_2 est la donnée d'une collection de foncteurs $\mathbb{H}^* : \mathbf{Ho}(\mathbf{CW}_2)^{op} \rightarrow Ab$, $*$ $\in \mathbb{Z}$, et de transformations naturelles $\partial^* : \mathbb{H}^* \circ R \rightarrow \mathbb{H}^{*+1}$ vérifiant les axiomes :

– Exactitude : on a la suite exacte longue

$$\cdots \rightarrow \mathbb{H}^q(X, A) \rightarrow \mathbb{H}^q(X) \rightarrow \mathbb{H}^q(A) \xrightarrow{\partial^q} \mathbb{H}^{q+1}(X, A) \rightarrow \cdots ,$$

où $\mathbb{H}^q(X) := \mathbb{H}^q(X, \emptyset)$.

– Excision : Si $(X; A, B)$ est une triade excisive alors l'inclusion $(A, A \cap B) \rightarrow (X, B)$ induit un isomorphisme

$$\mathbb{H}^*(X, B) \simeq \mathbb{H}^*(A, A \cap B) .$$

– Additivité : Si $(X, A) = \sqcup_i (X_i, A_i)$ alors les inclusions $(X_i, A_i) \rightarrow (X, A)$ induisent un isomorphisme

$$\mathbb{H}^*(X, A) \rightarrow \prod_i \mathbb{H}^*(X_i, A_i) .$$

Comme dans le cas réduit, on étend la théorie aux paires de \mathbf{Top} à l'aide du théorème d'approximation cellulaire pour les paires. On définit ainsi une théorie cohomologique pour les paires de \mathbf{Top} , qui vérifie les mêmes axiomes que la théorie pour les CW -paires, plus l'axiome d'équivalence faible.

16.5. Lien théorie réduite/théorie pour les paires. Comme pour l'homologie, soit $\tilde{\mathbb{H}}^*$ une théorie cohomologique réduite sur \mathbf{CW}_* . On lui associe une théorie \mathbb{H}^* sur \mathbf{CW}_2 de la façon suivante. Soit (X, A) une CW -paire, on pose

$$\mathbb{H}^*(X, A) = \tilde{\mathbb{H}}^*(X/A)$$

(noter que X/A est naturellement un CW -complexe pointé).

La suite longue de cofibration $A_+ \rightarrow X_+ \rightarrow X/A \xrightarrow{p} \Sigma A_+$ permet de définir un morphisme de connection $\partial_* : \mathbb{H}^*(A) \rightarrow \mathbb{H}^{*+1}(X, A) := \tilde{\mathbb{H}}^{*+1}(X/A)$ comme le composé

$$\mathbb{H}^*(A) = \tilde{\mathbb{H}}^*(A_+) \xrightarrow{\Sigma} \tilde{\mathbb{H}}^{*+1}(\Sigma A_+) \xrightarrow{p^*} \tilde{\mathbb{H}}^{*+1}(X/A) = \mathbb{H}^{*+1}(X, A) .$$

On a encore le

THÉORÈME 16.5.1. L'application qui à une théorie cohomologique sur \mathbf{CW}_2 associe une théorie cohomologique réduite sur \mathbf{CW}_* via $\tilde{\mathbb{H}}^*(X) = \mathbb{H}^*(X, *_X)$ est une bijection, d'inverse $(\mathbb{H}^*, \partial^*)$. De même pour \mathbf{Top}_2 et \mathbf{Top}_*^{nd} .

16.6. Propriété de Mayer-Vietoris pour une théorie cohomologique. On obtient en cohomologie des résultats semblables à ceux démontrés en homologie. Soit \mathbb{H}^* une théorie cohomologique généralisée sur les paires d'espaces topologiques.

PROPOSITION 16.6.1. Pour un triple (X, A, B) on a une suite longue exacte

$$\cdots \rightarrow \mathbb{H}^q(X, A) \rightarrow \mathbb{H}^q(X, B) \rightarrow \mathbb{H}^q(A, B) \xrightarrow{\partial} \mathbb{H}^{q+1}(X, A) \rightarrow \cdots .$$

LEMME 16.6.2. *Soit $(X; A, B)$ une triade excisive. Alors les inclusions $(A, A \cap B) \rightarrow (X, A \cap B)$ et $(B, A \cap B) \rightarrow (X, A \cap B)$ induisent un isomorphisme*

$$\mathbb{H}^*(X, A \cap B) \simeq \mathbb{H}^*(A, A \cap B) \oplus \mathbb{H}^*(B, A \cap B) .$$

THÉORÈME 16.6.3 (Mayer-Vietoris). *Soit $(X; A, B)$ une triade excisive. Alors la suite longue*

$$\cdots \rightarrow \mathbb{H}^{q-1}(A \cap B) \xrightarrow{\delta^*} \mathbb{H}^q(A) \oplus \mathbb{H}^q(B) \rightarrow \mathbb{H}^q(X) \rightarrow \mathbb{H}^q(A \cap B) \rightarrow \cdots$$

est exacte, où δ^ est le composé*

$$\mathbb{H}^{q-1}(A \cap B) \xrightarrow{\partial} \mathbb{H}^q(A, A \cap B) \simeq \mathbb{H}^q(X, B) \rightarrow \mathbb{H}^q(X) .$$

16.7. Cohomologies singulière, cellulaire et unicité des théories cohomologiques ordinaires.

16.7.1. *Cohomologie cellulaire.* Etant donné un groupe abélien G et $(X, A) \in \mathbf{CW}_2$, on définit la cohomologie cellulaire de (X, A) à coefficient dans G comme la cohomologie du complexe

$$C^\bullet(X, A; G) = \text{Hom}(C_\bullet(X, A), G) .$$

16.7.2. *Cohomologie singulière.* Etant donné un groupe abélien G et une paire (X, A) de \mathbf{Top} , on définit la cohomologie singulière de (X, A) à coefficients dans G comme la cohomologie du complexe

$$\text{Sing}^\bullet(X, A, G) = \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\text{Sing}_\bullet(X, A, \mathbb{Z}), G) .$$

16.7.3. *Unicité.* En recopiant la preuve donnée pour l'homologie on montre encore le

THÉORÈME 16.7.1. *A isomorphisme près il existe une unique théorie cohomologique réduite ordinaire à coefficient dans G : la cohomologie cellulaire à coefficients dans G .*

16.8. **Dualité homologie ordinaire/cohomologie ordinaire.** Soit G un groupe abélien. On a alors les jolies expressions duales suivantes :

$$\tilde{H}_n(X, G) = [S^n, Z_0(G, X)]$$

et

$$\tilde{H}^n(X, G) = [X, Z_0(G, S^n)] .$$

16.9. **Produit sur la cohomologie.** Soit G, G' deux groupes abéliens, $G \otimes G'$ leur produit tensoriel. On dispose alors d'un produit extérieur sur la cohomologie ordinaire

$$\tilde{H}^p(X, G) \otimes \tilde{H}^q(X', G') \rightarrow \tilde{H}^{p+q}(X \wedge X', G \otimes G') ,$$

qui induit (en considérant $X' = X = Y_+$, $G' = G$, diagonale $\Delta : X \rightarrow X \wedge X$ et le produit $\pi : G \otimes G \rightarrow G$) une structure d'anneau sur la cohomologie non-réduite

$$H^p(Y, G) \otimes H^q(Y, G) \rightarrow H^{p+q}(Y \times Y, G \otimes G) \xrightarrow{\Delta^* \otimes \pi} H^{p+q}(Y, G) .$$

Il suffit pour cela de construire une application canonique

$$(2) \quad K(G, p) \wedge K(G', q) \rightarrow K(G \otimes G', p + q) .$$

La construction la plus simple de cette application s'obtient via le foncteur 0-cycle (c.f. section 11.4) : l'application (2) s'écrit encore

$$Z_0(S^p, G) \wedge Z_0(S^q, G') \rightarrow Z_0(S^{p+q}, G \otimes G) .$$

Remarquons que pour $X, X' \in \mathbf{CW}_*$ on dispose d'une application naturelle

$$Z_0(X, G) \times Z_0(X', G') \longrightarrow Z_0(X \wedge X', G \otimes G')$$

donnée par

$$\left(\sum_i g_i x_i, \sum_j g'_j x'_j \right) \longmapsto \sum_{i,j} (g_i \otimes g'_j)(y_i \wedge y_j) .$$

Comme cette application est bilinéaire elle factorise en

$$Z_0(X, G) \wedge Z_0(X', G') \longrightarrow Z_0(X \wedge X', G \otimes G') .$$

On obtient ainsi l'application cherchée pour $X = S^p$, $X' = S^q$.

Alternativement en termes homologiques plus classiques l'application (2) est l'élément de

$$\begin{aligned} \tilde{H}^{p+q}(K(G, p) \wedge K(G', q), G \otimes G') &\simeq \text{Hom}(\tilde{H}_{p+q}(K(G, p) \wedge K(G', q), \mathbb{Z}), G \otimes G') \\ &\simeq \text{Hom}(\tilde{H}_p(K(G, p), \mathbb{Z}) \otimes \tilde{H}_q(K(G', q), \mathbb{Z}), G \otimes G') \\ &\simeq \text{Hom}(\pi_p(K(G, p)) \otimes \pi_q(K(G', q)), G \otimes G') \\ &= \text{Hom}(G \otimes G', G \otimes G') \end{aligned}$$

correspondant à l'identité de $G \otimes G'$. Le premier isomorphisme découle du théorème des coefficients universels, le second de la formule de Künneth et du fait que $K(G, p) \wedge K(G', q)$ est $p + q - 1$ -connexe, les deux derniers des propriétés des espaces d'Eilenberg-MacLane.

17. Homologie et cohomologie à coefficients locaux

Soit (X, A) une paire de **Top**, l'espace X étant supposé 0-connexe. Soit $x \in A$ un point de A , notons $\pi = \pi_1(X, x)$ le groupe fondamental $\pi_1(X, x)$, \tilde{X} le revêtement universel de X vu comme π -espace à droite et \tilde{A} la préimage de A dans X . Soit

$$\rho : \pi \longrightarrow \text{Aut}(G)$$

un morphisme de groupe, où G désigne un groupe abélien. La donnée de ρ équivaut à la donnée du système local

$$\mathcal{G}_\rho = \tilde{X} \times_{\pi, \rho} G$$

de fibre G sur X . Dans cette section on définit l'homologie et la cohomologie de la paire (X, A) à coefficients dans \mathcal{G}_ρ . On notera $\mathbb{Z}[\pi]$ l'anneau (non-commutatif en général, unitaire) du groupe π .

17.1. Définition algébrique.

17.1.1. *Approche cellulaire.* Supposons $(X, A) \in \mathbf{CW}_2$. Munissons (\tilde{X}, \tilde{A}) de sa structure de CW -paire déduite de celle de (X, A) . Le complexe singulier $C_\bullet(\tilde{X}, \tilde{A}, \mathbb{Z})$ devient ainsi naturellement un $\mathbb{Z}[\pi]$ -module à droite.

La représentation $\rho : \pi \longrightarrow \text{Aut}(G)$ fait de G un $\mathbb{Z}[\pi]$ -module à gauche. On définit alors

$$(3) \quad H_*(X, A, \mathcal{G}_\rho) = H_*(C_\bullet(\tilde{X}, \tilde{A}, \mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}[\pi]} G, \partial_{\text{cell}}) .$$

Munissons $C_\bullet(\tilde{X}, \tilde{A}, \mathbb{Z})$ de sa structure de $\mathbb{Z}[\pi]$ -module à gauche déduite de sa structure naturelle de $\mathbb{Z}[\pi]$ -module à droite et définissons

$$(4) \quad H^*(X, A, \mathcal{G}_\rho) = H^*(\text{Hom}_{\mathbb{Z}[\pi]}(C_\bullet(\tilde{X}, \tilde{A}, \mathbb{Z}), G), \delta_{\text{cell}}) .$$

Les différentielles ∂_{cell} et δ_{cell} désignent les différentielles cellulaires naturellement étendues.

17.1.2. *Approche singulière.* Soit (X, A) une paire de **Top** avec X 0-connexe. On définit $H_*(X, A, \mathcal{G}_\rho)$ et $H^*(X, A, \mathcal{G}_\rho)$ de manière similaire au cas cellulaire en remplaçant dans les définitions (3) et (4) le complexe cellulaire $C_\bullet(\tilde{X}, \tilde{A}, \mathbb{Z})$ par le complexe $\text{Sing}_\bullet(\tilde{X}, \tilde{A}, \mathbb{Z})$ qui est lui aussi naturellement un $\mathbb{Z}[\pi]$ -module à droite.

On démontre encore que si (X, A) est une CW -paire, (co)homologie singulière à coefficient dans \mathcal{G}_ρ et (co)homologie cellulaire à coefficient dans \mathcal{G}_ρ coïncident.

17.1.3. *Exemples.*

- (1) Pour $\rho : \pi \longrightarrow \text{Aut } G$ le morphisme trivial on a $H_*(X, A, \mathcal{G}_\rho) = H_*(X, A, G)$ (idem pour la cohomologie).
- (2) $H_*(X, A, \mathbb{Z}[\pi]) \simeq H_*(\tilde{X}, \mathbb{Z})$.
- (3) On montre avec un peu plus d'efforts que $H^*(X, A, \mathbb{Z}[\pi])$ coïncide avec la cohomologie à support compact $H_c^*(\tilde{X}, \mathbb{Z})$.

17.2. Définition géométrique.

17.2.1. *Approche cellulaire.* Soit (X, A) une CW -paire et notons $A \subset X^{-1} \subset X^0 \subset \dots \subset X^n \subset \dots \subset X$ la filtration squelettale associée. Notons comme d'habitude J_n l'ensemble des n -cellules de X . Pour tout $j \in J_n$ choisissons un point $x_j^n \in e_j^n$ et notons G_j la fibre $\mathcal{G}_{x_j^n}$ du système local \mathcal{G}_ρ au point x_j^n .

Si $e_i^{n-1} \subset \overline{e_j^n}$ le système local $\mathcal{G}_{\overline{e_j^n}}$ est localement trivial au voisinage de x_i^{n-1} . Si on fixe un chemin $\gamma_{i,j} : [0, 1] \longrightarrow \overline{e_j^n}$ tel que $\gamma_{i,j}(0) = x_i^{n-1}$, $\gamma_{i,j}(1) = x_j^n$ et $\gamma([0, 1]) \subset e_j^n$ le transport parallèle le long de $\gamma_{i,j}$ définit un isomorphisme

$$h_{i,j} : G_j \simeq G_i \quad ,$$

indépendant de la classe d'homotopie de $\gamma_{i,j}$. En particulier les h_{ij} vérifient la relation de cocycle :

$$(5) \quad h_{ij} \cdot h_{jk} = h_{ik} \quad .$$

Définissons alors le groupe abélien gradué $C_\bullet(X, A, \mathcal{G}_\rho)$ par

$$C_n(X, A, \mathcal{G}_\rho) = \bigoplus_{j \in J_n} G_j \quad .$$

Pour les différentielles, si $f \in C_n(X, A, \mathcal{G}_\rho)$, définissons :

$$df(e_i^{n-1}) = \sum_{j \in J_n} [e_i^{n-1} : e_j^n] h_{ij}(f(e_j^n)) \in G_i \quad ,$$

et

$$\delta(e_i^{n+1}) = \sum_{j \in J_n} [e_i^{n+1} : e_j^n] h_{ij}(f(e_j^n)) \in G_i \quad .$$

On vérifie facilement que la relation de cocycle (5) implique $d^2 = \delta^2 = 0$.

On peut alors définir :

$$\begin{cases} H_n(X, A, \mathcal{G}_\rho) = H_n(C_\bullet(X, A, \mathcal{G}_\rho), d) \quad . \\ H^n(X, A, \mathcal{G}_\rho) = H^n(C^\bullet(X, A, \mathcal{G}_\rho), \delta) \quad . \end{cases}$$

On vérifie facilement que ces groupes sont indépendants du choix des points x_j^n , $j \in J_n$, $n \geq 0$.

17.2.2. *Approche singulière.* Définissons le groupe abélien gradué $\text{Sing}_\bullet(X, A, \mathcal{G}_\rho)$ par

$$\text{Sing}_k(X, A, \mathcal{G}_\rho) = \left\{ \sum_{i=1}^m a_i \cdot \sigma_i, \sigma_i : \Delta^k \longrightarrow X, a_i \in \mathcal{G}_{\sigma_i(0)} \right\},$$

où $0 \in \Delta^k$ désigne le point base $(1, 0, \dots, 0)$.

Pour la différentielle : là encore le problème est d'identifier les fibres de \mathcal{G}_ρ au dessus de points différents. En effet, notons que pour $m > 0$ l'opérateur de face

$$f_m^k : \Delta_{k-1} \longrightarrow \Delta^k$$

satisfait bien $f_m^k(0) = 0$ alors que $f_0^k(0) = (0, 1, 0, \dots, 0)$. Notons $\gamma(t) = (t, 1-t, 0, \dots, 0)$ le chemin reliant $(0, 1, 0, \dots, 0)$ à $0 = (1, 0, \dots, 0)$ dans Δ^k . Le transport parallèle le long de ce chemin définit un isomorphisme de groupes

$$\gamma_\sigma : \mathcal{G}_{\sigma((0,1,0,\dots,0))} \longrightarrow \mathcal{G}_{\sigma(0)}$$

pour tout simplexe singulier $\sigma : \Delta^k \longrightarrow X$.

Définissons alors

$$\partial : \text{Sing}_k(X, \mathcal{G}_\rho) \longrightarrow \text{Sing}_{k-1}(X, \mathcal{G}_\rho)$$

par

$$\partial(a \sigma) = \gamma_\sigma(a) \sigma \circ f_0^k + \sum_{m=1}^k (-1)^m a \sigma \circ f_m^k.$$

On vérifie facilement que $\partial^2 = 0$ et on pose

$$H_*(X, \mathcal{G}_\rho) = H_*(\text{Sing}_\bullet(X, \mathcal{G}_\rho), \partial).$$

Dualement si $\text{Sing}^\bullet(X, \mathcal{G}_\rho)$ désigne le groupe abélien des fonctions sur $\text{Sing}_\bullet(X, \mathbb{Z})$ qui à $\sigma : \Delta^k \longrightarrow X$ associe $c(\sigma) \in \mathcal{G}_{\sigma(0)}$, on définit la différentielle $\delta : \text{Sing}^k(X, \mathcal{G}_\rho) \longrightarrow \text{Sing}^{k+1}(X, \mathcal{G}_\rho)$ par :

$$\delta c(\sigma) = (-1)^k (\gamma_\sigma^{-1} c(\partial_0 \sigma)) + \sum_{i=1}^{k+1} (-1)^i c(\partial_i \sigma).$$

On a encore $\delta^2 = 0$ et on pose

$$H^*(X, \mathcal{G}_\rho) = H^*(\text{Sing}^\bullet(X, \mathcal{G}_\rho), \delta).$$

Ces définitions s'étendent immédiatement au cas des paires.

17.3. Le cas des fibrations.

LEMME 17.3.1. *Soit $F \hookrightarrow E \xrightarrow{p} B$ une fibration de **Top**, avec B 0-connexes. Soit b un point de B . Il existe un morphisme de groupes canonique*

$$\rho : \pi_1(B, b) \longrightarrow \text{Aut } E_b$$

où $\text{Aut } E_b$ désigne le groupe des classes d'homotopie des équivalence d'homotopie de la fibre $E_b = p^{-1}(\{b\}) \simeq F$.

DÉMONSTRATION. Tout chemin $\gamma : I \longrightarrow B$ se relève en un chemin $\tilde{\gamma} : I \longrightarrow E$, qui définit ainsi une équivalence d'homotopie $F_{\gamma(0)} \xrightarrow{\sim} F_{\gamma(1)}$. Par la propriété de relèvement des homotopies pour les fibrations, la classe d'homotopie de cette homotopie ne dépend que de la classe d'homotopie de γ . Ce qui donne en particulier l'application $\pi_1(B, b) \longrightarrow \text{Aut } E_b$, dont on vérifie immédiatement que c'est un morphisme de groupes. \square

COROLLAIRE 17.3.2. Soit $F \hookrightarrow E \xrightarrow{p} B$ une fibration de **Top**, avec B 0-connexe et F n -simple. Alors cette fibration définit un système local $\pi_i(\mathcal{E})$, $i \leq n$, sur B , de fibre le groupe d'homotopie $\pi_i(F)$.

COROLLAIRE 17.3.3. Soit $F \hookrightarrow E \xrightarrow{p} B$ une fibration de **Top**, avec B 0-connexe. Soit G une théorie (co)homologique sur **Top**. Alors pour tout point b de B il existe une représentation canonique $\rho : \pi_1(B, b) \rightarrow \text{Aut } G(E_b)$.

On notera \mathcal{G}_ρ le système local sur B ainsi associé à G .

18. Théorie de l'obstruction

Dans cette section on donne une introduction à la théorie de l'obstruction. On étudie le problème d'extension, avant d'énoncer le résultat analogue pour le problème de relèvement.

18.1. Problème d'extension. Etant donné un diagramme de **CW**

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & Y \\ \downarrow i & & \\ X & & \end{array} ,$$

existe-t-il une extension

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & Y \\ \downarrow i & \nearrow & \\ X & & \end{array}$$

de f à X ?

Quitte à remplacer X par le cylindre M_i , on peut bien-sûr supposer $A \hookrightarrow X$. Le résultat principal de cette section est le :

THÉORÈME 18.1.1. Soit $(X, A) \in \mathbf{CW}_2$ et $X^{-1} = A \subset X^0 \subset X^1 \subset \dots \subset X^n \subset \dots \subset X$ la filtration squelettale de X .

Soit n un entier strictement positif et $Y \in \mathbf{CW}$ 0-connexe et n -simple (c.f. définition 6.7.3).

Soit $f : X^n \rightarrow Y$ une application continue.

- Il existe $\theta^{n+1}(f) \in Z^{n+1}(X, A, \pi_n Y)$ un cocycle cellulaire tel que $\theta^{n+1}(f) = 0$ si et seulement si f s'étend en $f : X^{n+1} \rightarrow Y$.
- La classe de cohomologie $[\theta^{n+1}(f)] \in H^{n+1}(X, A, \pi_n Y)$ s'annule si et seulement si la restriction $f|_{X^{n-1}} : X^{n-1} \rightarrow Y$ s'étend en $f : X^{n+1} \rightarrow Y$.

18.2. Construction de la cochaîne d'obstruction.

18.2.1. Construction géométrique. Notons J_n l'ensemble des n -cellules de la paire (X, A) . Rappelons que

$$\begin{aligned} C^{n+1}(X, A, \pi_n Y) &= \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(C_{n+1}(X, A), \pi_n Y) \\ &= \text{Map}(\{e_i^{n+1} / i \in J_{n+1}\}, \pi_n Y) . \end{aligned}$$

Définissons pour tout $i \in J_{n+1}$

$$\theta^{n+1}(f)(e_i^{n+1}) = [S^n \xrightarrow{\phi_i} X^n \xrightarrow{f} Y] \in \pi_n(Y) ,$$

où $\phi_i : S^n \rightarrow X^n$ désigne l'application de recollement de e_i^{n+1} . On étend $\theta^{n+1}(f)$ par linéarité en un élément $\theta^{n+1}(f) \in C^{n+1}(X, A, \pi_n Y)$. Comme une application $h : S^n \rightarrow X$ est homotopiquement triviale si et seulement si elle s'étend en $h : D^{n+1} \rightarrow X$, il est clair que $\theta^{n+1}(f) = 0$ si et seulement si $f : X^n \rightarrow Y$ s'étend en $f : X^{n+1} \rightarrow Y$.

18.2.2. *Construction algébrique.* De manière équivalente la cochaîne $\theta^{n+1}(f)$ s'obtient en considérant le diagramme :

$$\begin{array}{ccc} C_{n+1}(X, A) = H_{n+1}(X^{n+1}, X^n) & \xrightarrow{\theta^{n+1}(f)} & \pi_n(Y) \\ \uparrow h & \nearrow f_* & \\ \pi_{n+1}(X^{n+1}, X^n) & \xrightarrow{\partial} & \pi_n(X^n) \end{array}$$

où h désigne le morphisme d'Hurewicz. Comme le noyau de h est

$$\ker h = \{x \cdot \gamma(x)^{-1}, \gamma \in \pi_1(X_n), x \in \pi_{n+1}(X^{n+1}, X^n)\},$$

le morphisme π_1 -équivariant $f_* \partial : \pi_{n+1}(X^{n+1}, X^n) \rightarrow \pi_n(Y)$ factorise bien via $H_{n+1}(X^{n+1}, X^n)$ car Y est n -simple.

18.3. Propriétés de la cochaîne $\theta^{n+1}(f)$. Le théorème 18.1.1 est une conséquence immédiate de la

PROPOSITION 18.3.1. (a) $\theta^{n+1}(f)$ ne dépend que de la classe d'homotopie de $f : X^n \rightarrow Y$.

(b) $\theta^{n+1}(f) \in Z^{n+1}(X, A, \pi_n Y)$.

(c) Si $g : X^n \rightarrow Y$ vérifie $g|_{X^{n-1}} \stackrel{H}{\sim} f|_{X^{n-1}}$ le choix de l'homotopie H définit une cochaîne $c(f, H, g) \in C^n(X, A, \pi_n Y)$ telle que

$$\delta c(f, H, g) = \theta^{n+1}(f) - \theta^{n+1}(g).$$

(d) étant donnés

- $f : X^n \rightarrow Y$
- $H : X^{n-1} \times I \rightarrow Y$ avec $H_0 = f|_{X^{n-1}}$
- $c \in C^n(X, A, \pi_n Y)$

il existe $g : X^n \rightarrow Y$ vérifiant $H_1 = g|_{X^{n-1}}$ et $c = c(f, H, g)$.

DÉMONSTRATION. La propriété (a) découle immédiatement de la définition de $\theta^{n+1}(f)$.

Pour (b), il suffit de contempler le diagramme :

$$\begin{array}{ccccccc} C_{n+2}(X, A) & \xrightarrow{\delta} & C_{n+1}(X, A) & \xrightarrow{\theta^{n+1}(f)} & \pi_n(Y) & & \\ \parallel & & \parallel & & \parallel & & \\ H_{n+2}(X^{n+2}, X^{n+1}) & \xrightarrow{\partial} & H_{n+1}(X^{n+1}) & \xrightarrow{\theta^{n+1}(f)} & \pi_n(Y) & & \\ \uparrow h & & \uparrow h & & \uparrow f_* & & \\ \pi_{n+2}(X^{n+2}, X^{n+1}) & \longrightarrow & \pi_{n+1}(X^{n+1}) & \longrightarrow & \pi_{n+1}(X^{n+1}, X^n) & \longrightarrow & \pi_n(X^n) \\ & & & & \searrow 0 & & \end{array}$$

Pour (c) : munissons $(X \times I, A \times I)$ de sa structure naturelle de CW -paire. Donc :

$$(X \times I)^n = X^n \times \partial I \cup X^{n-1} \times I .$$

La donnée de l'homotopie H entre $g|_{X^{n-1}}$ et $f|_{X^{n-1}}$ définit donc une application

$$(f, H, g) : (X \times I)^n \longrightarrow G$$

et donc aussi un cocycle

$$\theta(f, H, g) \in Z^{n+1}(X \times I, A \times I, \pi_n Y) .$$

Notons $c(f, H, g) \in C^n(X, A, \pi_n Y)$ la restriction de $\theta(f, H, g)$ aux cellules $e_i^n \times I$ de $(X \times I)^{n+1}$:

$$\forall i \in J_n, \quad c(f, H, g)(e_i^n) = (-1)^{n+1} \theta(f, H, g)(e_i^n \times I) .$$

La propriété de cocycle de $\theta(f, H, g)$ se réécrit alors

$$\delta c = \theta^{n+1}(f) - \theta^{n+1}(g) .$$

Pour (d) : vue la définition de $c(f, H, g)$ il suffit de montrer que pour tout $i \in J_n$, il existe une extension

$$\partial(e_i^n \times I) \xrightarrow{G} Y$$

à l'application

$$T = e_i^n \times \{0\} \cup S^{n-1} \xrightarrow{f \cup (H \circ (\phi_i \times 1_I))} Y$$

telle que

$$[G] = c(e_i^n) \in [\partial(e_i^n \times I), Y] \simeq \pi_n(Y) ,$$

(où comme d'habitude $\phi_i : S^{n-1} \rightarrow X^{n-1}$ désigne l'application de recollement de e_i^n).

On posera alors $g|_{e_i^n} = G|_{e_i^n \times \{1\}}$.

Pour ce faire choisissons $\psi : S^n = \partial(e_i^n \times I) \rightarrow Y$ un représentant quelconque de $c(e_i^n)$. Comme T est contractile il existe une homotopie $\tilde{\psi} : \psi|_T \sim f|_T$. Par la propriété d'extension des homotopies :

$$\begin{array}{ccc} T = e_i^n \times \{0\} \cup S^{n-1} \times I & \xrightarrow{\tilde{\psi}} & Y^I \\ \downarrow & \nearrow G & \downarrow \\ \partial(e_i^n \times I) & \xrightarrow{\psi} & Y \end{array} .$$

□

18.4. Problème d'extension des homotopies. Sous les mêmes hypothèses sur Y , soit $(X, A) \in \mathbf{CW}_*$, n un entier strictement positif et

$$f, g : X \longrightarrow Y$$

telles que $f|_A \stackrel{H}{\sim} g|_A$. Peut-on étendre l'homotopie H à X ?

C'est un cas particulier du problème d'extension :

$$\begin{array}{ccc} X \times \{0, 1\} \cup A \times I & \xrightarrow{(f, H, g)} & Y \\ \downarrow & \nearrow & \\ X \times I & & \end{array} .$$

Supposons H étendue à $X^{n-1} \times I$. L'obstruction à l'étendre à $X^n \times I$ est dans

$$\begin{aligned} H^{n+1}(X \times I, X \times \{0, 1\} \cup A \times I, \pi_n(Y)) &\simeq \tilde{H}^{n+1}(X \times I / (X \times \{0, 1\} \cup A \times I), \pi_n(Y)) \\ &\simeq \tilde{H}^{n+1}\Sigma(X/A), \pi_n(Y) \simeq H^n(X, A, \pi_n(Y)) \end{aligned}$$

18.5. Problème de relèvement. Considérons le problème dual du problème d'extension : soit

$$\begin{array}{ccc} & E & \\ & \downarrow p & \\ X & \xrightarrow{f} & B \end{array}$$

un diagramme de **CW**, existe-t-il un relèvement

$$\begin{array}{ccc} & E & \\ & \nearrow & \downarrow p \\ X & \xrightarrow{f} & B \end{array}$$

de f à E ?

Notons F la fibre d'homotopie de $E \xrightarrow{p} B$ et supposons F n -simple. Par la proposition 17.3.2 la fibration p définit un système local $\pi_n(\mathcal{E})$ sur B de fibre $\pi_n(F)$. L'analogue du théorème 18.1.1 est le

THÉORÈME 18.5.1. *Soit $X \in \mathbf{CW}$ et $p : E \rightarrow B$ une fibration de fibre F n -simple. Soit $f : X \rightarrow B \in \mathbf{CW}$ et $g : X^n \rightarrow E$ un relèvement de f en restriction au n -squelette X^n de X , $n > 0$.*

- *Il existe $\theta^{n+1}(g) \in Z^{n+1}(X, \pi_n \mathcal{E})$ un cocycle cellulaire tel que $\theta^{n+1}(g) = 0$ si et seulement si f se relève en $g : X^{n+1} \rightarrow E$.*
- *La classe de cohomologie $[\theta^{n+1}(g)] \in H^{n+1}(X, \pi_n \mathcal{E})$ s'annule si et seulement si la restriction $g|_{X^{n-1}} : X^{n-1} \rightarrow E$ s'étend en un relèvement $g : X^{n+1} \rightarrow E$ de f au $(n+1)$ -squelette X^{n+1} .*

La preuve, analogue au cas d'extension, est laissée au lecteur.

18.6. Quelques exemples.

18.6.1. *Classe d'Euler.* La théorie des obstructions peut servir à définir les classes caractéristiques de fibrés. Soit par exemple $E^n \rightarrow B$ un fibré vectoriel réel de rang n . L'existence d'une section partout non-nulle de E^n équivaut à l'existence d'une section du fibré en sphère $S^{n-1}(E)$ associé à E^n . Comme S^{n-1} est $n-2$ -connexe, l'unique obstruction à l'existence d'une telle section est un élément de $H^n(B, \pi_{n-1}(S^{n-1})) \simeq H^n(B, \mathbb{Z})$: la classe d'Euler de $E^n \rightarrow B$.

18.6.2. *Produit de Whitehead.* Soit $X \in \mathbf{CW}_*$ et $f : S^k \rightarrow X$, $g : S^l \rightarrow X$. Comme $S^k \times S^l$ s'obtient à partir de $S^k \vee S^l$ par recollement d'une unique cellule e^{n+m} , il existe une unique obstruction à étendre

$$f \vee g : S^k \vee S^l \rightarrow X$$

en

$$S^k \times S^l \rightarrow X .$$

C'est un élément de

$$H_{\text{cell}}^{k+l}(S^k \times S^l, S^k \vee S^l, \pi_{k+l-1}(X)) \simeq \pi_{k+l-1}(X) .$$

On définit ainsi un produit :

$$[\cdot, \cdot] : \pi_k(X) \times \pi_l(X) \rightarrow \pi_{k+l-1}(X) ,$$

qui coïncide avec le commutateur usuel sur $\pi_1(X)$. En réindexant $L_k = \pi_{k+1}(X)$, on vérifie que $(L_*(X), [\cdot, \cdot])$ est une algèbre de Lie graduée : si $x_i \in L_i$, on a :

$$\begin{aligned} [x_i, x_j] &= (-1)^{ij} [x_j, x_i] . \\ (-1)^{ij} [[x_i, x_j], x_k] + (-1)^{jk} [[x_j, x_k], x_i] + (-1)^{ik} [[x_k, x_i], x_j] &= 0 . \end{aligned}$$

19. Suites spectrales

Dans cette section \mathcal{A} désigne une catégorie abélienne, \mathcal{A}^\bullet et $\mathcal{A}^{\bullet,\bullet}$ les catégories abéliennes \mathbb{Z} -graduées et \mathbb{Z} -bigraduées correspondantes.

DÉFINITION 19.0.1. *Soit \mathcal{A} une catégorie abélienne.*

(1) *Une suite spectrale E dans \mathcal{A} est la donnée d'un entier $r_0 \in \mathbb{N}$ et pour tout entier $r \geq r_0$:*

(i) *d'un objet $E_r \in \mathcal{A}$ (appelé la « r -ième page » de la suite spectrale E).*

(ii) *d'une différentielle $d_r : E_r \rightarrow E_r$ (i.e. $d_r^2 = 0$).*

(iii) *d'un isomorphisme $E_{r+1} \simeq H_*(E_r, d_r)$.*

(2) *Un morphisme $f : E \rightarrow E'$ de suites spectrales dans \mathcal{A} est une collection de flèches $f_r : E_r \rightarrow E'_r \in \mathcal{A}$ telle que les diagrammes*

$$\begin{array}{ccc} E_r & \xrightarrow{f_r} & E'_r \\ d_r \downarrow & & \downarrow d'_r \\ E_r & \xrightarrow{f_r} & E'_r \end{array}$$

et

$$\begin{array}{ccc} E_{r+1} & \xrightarrow{f_{r+1}} & E'_{r+1} \\ \downarrow \sim & & \downarrow \sim \\ H_*(E_r, d_r) & \xrightarrow{H_*(f_r)} & H_*(E'_r, d_r) \end{array}$$

commutent.

On définit ainsi la catégorie $SS(\mathcal{A})$ des suites spectrales dans \mathcal{A} . C'est bien-sûr une catégorie abélienne.

REMARQUES 19.0.2. (1) La catégorie \mathcal{A} sera le plus souvent bigraduée, par exemple la catégorie des modules bigradués sur un anneau (en topologie algébrique) ou la catégorie des faisceaux de modules bigradués sur un faisceau en anneau (en géométrie algébrique).

(2) Dans la définition 19.0.1 on n'a pas précisé la nature des différentielles. Si \mathcal{A} est (multi)graduée, le degré total des d_r sera toujours 1 (on parle alors de suite spectrale cohomologique) ou -1 (on parle alors de suite spectrale homologique et on note (E^r, d^r) plutôt que (E_r, d_r)).

(3) dans le cas où \mathcal{A} est bigraduée, les différentielles d_r le seront également :

– dans le cas cohomologique,

$$d_r : E_r^{p,q} \longrightarrow E_r^{p+r, q-r+1}$$

est de bidegré $(r, -r + 1)$.

– dans le cas homologique

$$d^r : E_{p,q}^r \longrightarrow E_{p-r, q+r-1}^r$$

est de bidegré $(-r, r + 1)$

(4) l'entier r_0 sera le plus souvent 0, 1 ou 2.

19.1. Que calcule une suite spectrale ? Notons

$$Z_{r_0} = \ker d_{r_0} \text{ et } B_{r_0} = \text{Im } d_{r_0} \text{ .}$$

Comme $d_{r_0}^2 = 0$ on a $B_{r_0} \subset Z_{r_0} \subset E_{r_0}$.

Par définition $E_{r_0+1} = Z_{r_0}/B_{r_0}$. Notons

$$\overline{Z_{r_0+1}} = \ker d_{r_0+1} \text{ et } \overline{B_{r_0+1}} = \text{Im } d_{r_0+1} \text{ .}$$

Comme $d_{r_0+1}^2 = 0$ on a $\overline{B_{r_0+1}} \subset \overline{Z_{r_0+1}} \subset E_{r_0+1}$. Relevons les sous-quotients : $\overline{Z_{r_0+1}}$ et $\overline{B_{r_0+1}}$ s'écrivent de manière unique

$$\overline{Z_{r_0+1}} = Z_{r_0+1}/B_{r_0} \text{ et } \overline{B_{r_0+1}} = B_{r_0+1}/B_{r_0} \text{ .}$$

Finalement

$$B_{r_0} \subset B_{r_0+1} \subset Z_{r_0+1} \subset Z_{r_0} \text{ .}$$

En itérant ce relèvement de sous-quotients, une suite spectrale (E_r, d_r) peut donc être pensée comme une double suite de sous-objets de E_{r_0} :

$$B_{r_0} \subset B_{r_0+1} \subset \cdots \subset B_r \subset \cdots \subset Z_r \subset \cdots \subset Z_{r_0+1} \subset Z_{r_0}$$

avec

$$\begin{cases} E_r = Z_r/B_r \\ 0 \longrightarrow Z_{r+1}/B_r \longrightarrow E_{r+1} \xrightarrow{d_{r+1}} B_{r+1}/B_r \longrightarrow 0 \\ Z_r/Z_{r+1} \simeq B_{r+1}/B_r \end{cases} \text{ .}$$

Notons alors

$$Z_\infty = \bigcap_n Z_n \text{ l'espaces des « cycles survivants » .}$$

$$B_\infty = \bigcup_n B_n \text{ l'espace des « bords éventuels » .}$$

L'objet calculé par la suite spectrale (E_r, d_r) est $E_\infty := Z_\infty/B_\infty$.

19.2. Suite spectrale d'un complexe filtré. Dans cette section on décrit l'exemple le plus simple de suite spectrale : la suite spectrale associée à un complexe filtré (cohomologique, le lecteur traitera par lui-même le cas homologique analogue).

Soit (A^\bullet, d) un complexe cohomologique dans \mathcal{A} . On souhaite calculer $H^*(A^\bullet, d) \in \mathcal{A}^\bullet$.

DÉFINITION 19.2.1. Une \mathbb{Z} -filtration décroissante de (A^\bullet, d) est la donnée pour tout $p \in \mathbb{Z}$ d'un sous-complexe $(F^p A^\bullet, d)$ de (A^\bullet, d) satisfaisant pour tout $p \in \mathbb{Z}$

$$F^{p+1} A^\bullet \subset F^p A^\bullet \text{ .}$$

Remarquons que si $(A^\bullet, d, F^\bullet)$ est un complexe cohomologique \mathbb{Z} -filtré dans \mathcal{A} alors

- la différentielle d induit une différentielle, encore notée d , sur le gradué $\text{Gr}_F^\bullet A^\bullet \in \mathcal{A}^\bullet$ (où $(\text{Gr}_F^p A^\bullet)^k = F^p A^k / F^{p+1} A^k$).
- la filtration F induit une filtration, encore notée F , sur $H^*(A^\bullet, d)$ en posant

$$F^p H^k(A^\bullet, d) = \text{Im } [H^k(F^p A^\bullet, d) \longrightarrow H^k(A^\bullet, d)] \text{ .}$$

THÉORÈME 19.2.2 (Leray). Soit $(A^\bullet, d, F^\bullet)$ un complexe cohomologique filtré dans la catégorie abélienne \mathcal{A} .

(1) Il existe une suite spectrale cohomologique naturelle $(E_r)_{r \geq 0}$ dans $\mathcal{A}^{\bullet, \bullet}$, de termes :

- $E_0^{p,q} = \text{Gr}_F^p A^{p+q} = F^p A^{p+q} / F^{p+1} A^{p+q}$ et $d_0 : E_0 \rightarrow E_0$ est déduite de d .
- $E_1^{p,q} = H^{p+q}(\text{Gr}_F^p A^\bullet, d)$ et la différentielle $d_1 : E_1^{p,q} \rightarrow E_1^{p+1,q}$ s'identifie à la flèche de connexion

$$\delta : H^{p+q}(\text{Gr}_F^p A^\bullet, d) \rightarrow H^{p+q+1}(\text{Gr}_F^{p+1} A^\bullet, d)$$

apparaissant dans la suite exacte longue associée à la suite exacte courte

$$0 \rightarrow \text{Gr}_F^{p+1} A^\bullet \rightarrow F^{p+1} A^\bullet / F^{p+2} A^\bullet \rightarrow \text{Gr}_F^p A^\bullet \rightarrow 0 .$$

(2) si de plus la filtration est exhaustive (i.e. $A^\bullet = \cup_p F^p A^\bullet$) et séparée (i.e. $\cap_p F^p A^\bullet = 0$) alors « la suite spectrale (E_r, d_r) converge vers $H^*(A^\bullet, d)$ » au sens où pour $p+q$ fixé et pour r assez grand

$$E_\infty^{p,q} = E_r^{p,q} = \text{Gr}_F^p H^{p+q}(A^\bullet, d) .$$

REMARQUE 19.2.3. La terminologie établie « la suite spectrale (E_r, d_r) converge vers $H^*(A^\bullet, d)$ » est malheureuse : la suite spectrale calcule seulement le gradué de $H^*(A^\bullet, d)$ pour la filtration sur $H^*(A^\bullet, d)$ déduite de F .

DÉMONSTRATION. Posons

$$Z_r^{p,q} = F^p A^{p+q} \cap d^{-1}(F^{p+r} A^{p+q+1}) .$$

Notons que :

$$\begin{cases} Z_{r-1}^{p+1,q-1} = F^{p+1} A^{p+q} \cap d^{-1}(F^{p+r} A^{p+q+1}) \subset Z_r^{p,q} \\ dZ_{r-1}^{p-r+1,q+r-2} \subset F^p A^{p+q} \cap dF^{p-r+1} A^{p+q-1} \subset Z_r^{p,q} \end{cases}$$

et posons

$$B_r^{p,q} = Z_{r-1}^{p+1,q-1} + dZ_{r-1}^{p-r+1,q+r-2} \subset Z_r^{p,q} .$$

Posons $E_r^{p,q} = Z_r^{p,q} / B_r^{p,q}$. Comme $d : Z_r^{p,q} \rightarrow Z_r^{p+r,q-r+1}$ et $d : B_r^{p,q} \rightarrow B_r^{p+r,q-r+1}$, la différentielle d induit bien une différentielle

$$d_r : E_r^{p,q} \rightarrow E_r^{p+r,q-r+1} .$$

Il reste à vérifier les propriétés nécessaires.

(a) Par définition $Z_0^{p,q} = F^p A^{p+q}$ et $B_0^{p,q} = Z_0^{p+1,q-1} = F^{p+1} A^{p+q}$, donc $E_0^{p,q} = \text{Gr}_F^p A^{p+q}$. De plus la différentielle induite est simplement $d : \text{Gr}_F^p A^{p+q} \rightarrow \text{Gr}_F^p A^{p+q+1}$.

(b) Vérifions que $E_{r+1}^{p,q} \simeq H^{p,q}(E_r^{\bullet, \bullet}, d_r)$.

Si $z \in Z_{r+1}^{p,q}$, $dz \in Z_{r-1}^{p+r+1,q-r} \subset B_r^{p+r,q-r+1}$ donc la classe \bar{z} de z dans $E_r^{p,q}$ vérifie $d_r \bar{z} = 0$.

On construit ainsi une flèche

$$Z_{r+1}^{p,q} \rightarrow \ker d_r : E_r^{p,q} \rightarrow E_r^{p+r,q-r+1} .$$

Si $z = z_1 + dz_2 \in B_{r+1}^{p,q} = Z_r^{p+1,q-1} + dZ_r^{p-r,q-r+1}$, comme $Z_r^{p+1,q-1} \subset Z_{r-1}^{p+1,q-1} \subset B_r^{p,q}$, on a $\bar{z} = \overline{dz_2}$. Comme $z_2 \in Z_r^{p-r,q+r-1}$, $\overline{dz_2} = d_r(\bar{z})$. La flèche précédente induit donc une flèche

$$B_{r+1}^{p,q} \rightarrow \text{Im } d_r : E_r^{p-r,q+r-1} \rightarrow E_r^{p,q} ,$$

et donc par passage au quotient une flèche

$$Z_r^{p,q} / B_r^{p,q} \rightarrow \frac{\ker d_r : E_r^{p,q} \rightarrow E_r^{p+r,q-r+1}}{\text{Im } d_r : E_r^{p-r,q+r-1} \rightarrow E_r^{p,q}} .$$

Montrons que cette dernière flèche est surjective. Soit $z \in Z_r^{p,q}$ tel que $\bar{z} \in \ker d_r$. Donc $dz \in B_r^{p+r, q-r+1} = dZ_{r-1}^{p+1, q-1} + Z_{r-1}^{p+r+1, q-r}$ et il existe $w \in Z_{r-1}^{p+1, q-1}$ tel que

$$d(z - w) \in Z_{r-1}^{p+r-1, q-r} .$$

Mais alors $d(z - w) \in F^{p+r+1}A^{p+q+1}$ et $z - w \in Z_{r+1}^{p,q}$. Comme $\bar{w} = 0$ car $Z_{r-1}^{p+1, q-1} \subset B_r^{p,q}$, on a par ailleurs $\bar{z} = \overline{z - w}$ et le résultat.

L'injectivité se démontre aussi facilement.

- (c) On a en particulier $E_1^{p,q} = H^{p,q}(E_0^{\bullet, \bullet}, d_0) = H^{p+q}(\text{Gr}_F^p A^\bullet, d_0)$. Reste à comprendre la différentielle d_1 . Si $\bar{z} \in E_1^{p,q}$, $d_1(\bar{z}) = dz \bmod B_1^{p+1, q}$ où $z \in Z_1^{p,q}$ représente \bar{z} . C'est exactement la définition de la flèche δ .
- (d) Pour la convergence : soit $n = p + q$ fixé. Par l'hypothèse de séparation pour $k \geq n$ assez grand on a $F^k A^n = F^k A^{n-1} = F^k A^{n+1} = 0$. Mais alors :

$$B_{k+1}^{p,q} = Z_k^{p+1, q-1} + dZ_k^{p-k, q+k-1} = Z_k^{p+1, q-1}$$

car $Z_k^{p-k, q+k-1} = F^p A^n \cap \text{Im } d$ puisque $p - k \leq 0$. Finalement

$$E_{k+1}^{p,q} \simeq \frac{\text{Im } [H^n(F^p A^\bullet, d) \longrightarrow H^n(A^\bullet, d)]}{\text{Im } [H^n(F^{p+1} A^\bullet, d) \longrightarrow H^n(A^\bullet, d)]} = \text{Gr}_F^p H^n(A^\bullet, d) .$$

□

19.2.1. *Exemples de filtrations.* On rencontre le plus souvent l'une des deux filtrations suivantes :

– la « filtration bête » : on pose

$$F^p A^k = \begin{cases} 0 & \text{si } k < p \\ A^k & \text{si } k \geq p \end{cases} .$$

- filtration de $\text{Tot} A^\bullet$: soit $(A^{\bullet, \bullet}, d_1, d_2)$ un complexe double dans \mathcal{A} supporté en degrés positifs. Notons $(\text{Tot} A^\bullet, D)$ le complexe simple associé : $\text{Tot} A^k = \bigoplus_{p+q=k} A^{p,q}$, $D = d_1 + (-1)^p d_2$. On pose $F^p \text{Tot} A^k = \bigoplus_{r+s=k, r \geq p} A^{r,s}$.

Ces deux filtrations sont très liées. Supposons que \mathcal{A} a suffisamment d'injectifs. Si on résout un complexe (A^\bullet, d) de \mathcal{A} par un complexe double d'injectifs $(I^{\bullet, \bullet}, d_1, d_2)$ c'est-à-dire :

$$\begin{cases} i^p : A^p \hookrightarrow I^{p, \bullet} \\ i^p \circ d = d_1 \circ i^{p-1} \\ \text{Im } i^p = \ker d_2 \end{cases}$$

alors

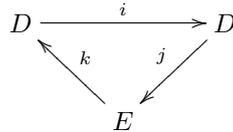
$$(\text{Tot} I^\bullet, d_1 + (-1)^p d_2) \stackrel{q.i.}{\simeq} (A^\bullet, d) \text{ et } (F^p \text{Tot} I^\bullet, d_1 + (-1)^p d_2) \stackrel{q.i.}{\simeq} (F^p A^\bullet, d)$$

où on considère la filtration de complexe double sur $\text{Tot} I^\bullet$ et la filtration bête sur (A^\bullet, d) . On obtient ainsi un quasi-isomorphisme filtré

$$(A^\bullet, d, F^p A^\bullet) \stackrel{q.i.}{\simeq} ((\text{Tot} I^\bullet, d_1 + (-1)^p d_2), F^p \text{Tot} I^\bullet) .$$

19.3. Suite spectrale associée à un couple exact. Alors que la suite spectrale associée à un complexe filtré est souvent suffisante pour expliquer les suites spectrales apparaissant en géométrie algébrique, ce n'est pas le cas en général pour les suites spectrales de la topologie algébrique. Dans cette section on définit la notion de couple exact et la suite spectrale associée. Toutes les suites spectrales connues s'obtiennent à partir d'un couple exact.

DÉFINITION 19.3.1. *Un couple exact dans une catégorie abélienne \mathcal{A} est un diagramme dans \mathcal{A}*

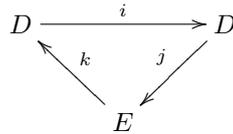


exact en chaque objet :

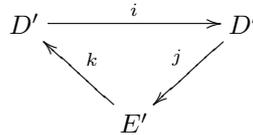
$$\text{Im } i = \ker j, \quad \text{Im } j = \ker k, \quad \text{Im } k = \ker i .$$

Posons alors $d = j \cdot k : E \rightarrow E$. Alors $d^2 = (j \cdot k) \cdot (j \cdot k) = j \cdot (k \cdot j) \cdot k = 0$ puisque $k \cdot j = 0$. Ainsi (E, d) est un objet différentiel de \mathcal{A} .

19.3.1. *Couple dérivé d'un couple exact.* Soit



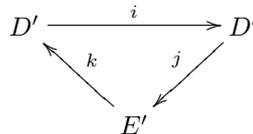
un couple exact dans \mathcal{A} et $d = jk$. Notons $E' = H_*(E, d)$ et $D' = i(D) = \ker j$. Considérons le diagramme



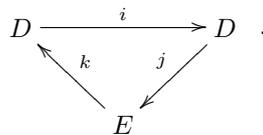
défini par

- $i' = i|_{i(D)}$.
- La flèche $j' : D' \rightarrow E'$ est définie par $j'(i(x)) = \overline{j(x)}$ (la classe de $j(x)$ dans E'). La flèche j' est bien définie : si $i(x) = i(y)$ alors $x - y \in \text{Im } k$ et $j(x - y) \in j(\text{Im } k) = d(E)$ donc $\overline{j(x - y)} = 0$.
- La flèche $k' : E' \rightarrow J'$ est définie par $k'(\bar{e}) = k(e)$. Si $\bar{e} = \bar{f}$ alors $e - f = dx$ pour un $x \in E$ donc $k(x - y) = k(dx) = k(j \cdot k(x)) = 0$ car $k \cdot j = 0$.

PROPOSITION 19.3.2. *Le couple*



est un couple exact, appelé couple dérivé du couple exact



On notera $d' = j' \cdot k' : E' \rightarrow E'$.

DÉMONSTRATION. Exercice laissé au lecteur. □

COROLLAIRE 19.3.3. *Soit*

$$\begin{array}{ccc} D & \xrightarrow{i} & D \\ & \swarrow k & \searrow j \\ & E & \end{array}$$

un couple exact dans une catégorie abélienne \mathcal{A} . On définit une suite spectrale $(E_r, d_r)_{r \geq 1}$ dans \mathcal{A} , dite suite spectrale associée au couple exact, en posant :

$$\begin{cases} E_1 = E, & d_1 = d . \\ E_{r+1} = E'_r, & r \geq 1 . \\ d_{r+1} = d'_r . \end{cases}$$

REMARQUE 19.3.4. Dans le cas où \mathcal{A} est bigraduée et i, j, k sont de bidegrés respectifs $(-1, 1)$, $(0, 0)$ et $(1, 0)$ les flèches i_r, j_r, k_r sont de bidegrés respectifs $(-r, r)$, $(r-1, 1-r)$ et $(1, 0)$ respectivement et la différentielle $d_r = j_r \cdot k_r$ est du bidegré attendu $(r, 1-r)$.

19.4. La suite spectrale d'un complexe filtré comme suite spectrale d'un couple exact.

Soit $(A^\bullet, d, F^\bullet)$ un complexe filtré dans \mathcal{A} . Notons $D^{p,q} = H^{p+q}(F^p A)$ et $E^{p,q} = H^{p+q}(\text{Gr}^p A^\bullet, d)$. La suite exacte longue déduite de la suite exacte courte

$$0 \longrightarrow F^{p+1} A^\bullet \xrightarrow{i} F^p A^\bullet \xrightarrow{j} \text{Gr}^p A^\bullet \longrightarrow 0$$

définit un couple exact dans $\mathcal{A}^{\bullet, \bullet}$

$$\begin{array}{ccc} D^{p+1, q-1} & \xrightarrow{i} & D^{p, q} \\ & \swarrow k & \searrow j \\ & E^{p, q} & \end{array}$$

où k désigne l'homomorphisme bord

$$H^{p+q}(\text{Gr}^p A^\bullet, d) \xrightarrow{k} H^{p+q+1}(F^{p+1} A^\bullet, d) .$$

On vérifie facilement que la suite spectrale associée à ce couple exact dans $\mathcal{A}^{\bullet, \bullet}$ coïncide avec la suite spectrale associée au complexe filtré $(A^\bullet, d, F^\bullet)$.

19.5. Convergence de la suite spectrale associée à un couple exact.

PROPOSITION 19.5.1. *Soit*

$$\begin{array}{ccc} D & \xrightarrow{i} & D \\ & \swarrow k & \searrow j \\ & E & \end{array}$$

un couple exact dans une catégorie abélienne bigraduée $\mathcal{A}^{\bullet, \bullet}$. Posons

$$\begin{cases} Z_r^{p,q} = k^{-1}(\text{Im } i^{r-1} : D^{p+r, q-r+1} \longrightarrow D^{p+1, q}) \\ B_r^{p,q} = j(\ker i^{r-1} : D^{p, q} \longrightarrow D^{p-r+1, q-1+r}) \end{cases} .$$

Alors ces sous-modules de $E^{p,q}$ déterminent la suite spectrale associée au couple exact

$$\begin{array}{ccc} D & \xrightarrow{i} & D \\ & \swarrow k & \searrow j \\ & E & \end{array} .$$

En particulier $E_r^{p,q} \simeq Z_r^{p,q}/B_r^{p,q}$. De plus

$$E_\infty^{p,q} \simeq \frac{\cap_r k^{-1}(\text{Im } i^{r-1} : D^{p+r, q-r+1} \longrightarrow D^{p+1, q})}{\cup_r j(\ker i^{r-1} : D^{p, q} \longrightarrow D^{p-r+1, q-1+r})} .$$

DÉMONSTRATION. Exercice. □

20. La suite spectrale de Leray-Serre-Atiyah-Hirzebruch

Dans cette section $F \hookrightarrow E \xrightarrow{p} B$ désigne une fibration dans **Top** de fibre F . On supposera toujours que B est un CW -complexe 0-connexe. Rappelons que dans ces conditions on obtient une représentation

$$\rho : \pi_1(B) \longrightarrow \text{Aut } F ,$$

où $\text{Aut } F$ désigne le groupe des classes d'homotopies des équivalences d'homotopie de F . En particulier si G désigne une théorie (co)homologique sur **Top** la représentation précédente induit une représentation

$$\rho : \pi_1(B) \longrightarrow \text{Aut}(G(F)) .$$

On notera $\mathcal{G}(F)$ le système local sur B associé à cette représentation.

On cherche à calculer $G(E)$ en utilisant la filtration

$$E^0 \subset E^1 \subset \dots \subset E^p \subset \dots \subset E ,$$

où $E^p = p^{-1}(B^p)$ désigne la préimage dans E du p -squelette B^p de B .

THÉORÈME 20.0.2 (Leray-Serre-Atiyah-Hirzebruch). *Soit $F \hookrightarrow E \xrightarrow{p} B$ une fibration dans **Top** de fibre F , avec $B \in \mathbf{CW}$ 0-connexe. Soit G une théorie homologique sur **Top**. Il existe une suite spectrale*

$$E_{p,q}^2 = H_p(B, \mathcal{G}_q(F)) \implies G_{p+q}(E)$$

(pour la filtration sur $G_{p+q}(E)$ donnée par $F_p G_{p+q}(E) = \text{Im } (G_{p+q}(E^p) \longrightarrow G_{p+q}(E))$).

THÉORÈME 20.0.3 (Leray-Serre-Atiyah-Hirzebruch). *Soit $F \hookrightarrow E \xrightarrow{p} B$ une fibration dans **Top** de fibre F , avec $B \in \mathbf{CW}$ 0-connexe. Soit G une théorie cohomologique sur **Top**.*

Supposons que B est un CW -complexe de dimension finie ou bien qu'il existe $N \in \mathbb{Z}$ tel que $G^q(F) = 0$ pour $q < N$.

Il existe une suite spectrale

$$E_2^{p,q} = H^p(B, \mathcal{G}^q(F)) \implies G^{p+q}(E)$$

(pour la filtration sur $G^{p+q}(E)$ donnée par $F^p G^{p+q}(E) = \ker(G^{p+q}(E) \longrightarrow G^{p+q}(E^p))$).

DÉMONSTRATION. Leray et Serre prouvent ces théorèmes dans le cas où G est une théorie homologique ordinaire, en considérant la filtration sur le complexe $\text{Sing}_*(E)$ (ou $\text{Sing}^*(E)$) induite par la filtration de E via les E^p et en appliquant la suite spectrale d'un complexe filtré.

Pour une théorie (co)homologique quelconque ne s'obtenant pas comme (co)homologie d'un complexe de (co)chaînes facilement décrivible, Atiyah-Hirzebruch remarquent que le théorème reste valable en utilisant la suite spectrale d'un couple exact canoniquement déterminé par la filtration (E^p) de E .

Donnons la preuve dans le cas homologique, le lecteur l'adaptera au cas cohomologique. La suite longue d'homologie de la paire (E^p, E^{p-1}) définit un couple exact de groupes abéliens bigradués

$$\begin{array}{ccc} D_{p-1, q+1} = G_{p+q}(E^{p-1}) & \xrightarrow{i} & D_{p, q} = G_{p+q}(E^p) \\ & & \searrow j \\ D_{p-1, q} = G_{p+q-1}(E^{p-1}) & & E_{p, q} = G_{p+q}(E^p, E^{p-1}) \\ & \swarrow k & \end{array}$$

La suite spectrale de ce couple exact commence en

$$\begin{array}{ccc} E_{p, q}^1 = E_{p, q} & \xrightarrow{d=j \cdot k} & E_{p-1, q}^1 \\ \parallel & & \parallel \\ G_{p+1}(E^p, E^{p-1}) & \longrightarrow & G_{p+q-1}(E^{p-1}, E^{p-2}) \end{array}$$

où la différentielle n'est rien d'autre que l'homomorphisme de connexion de la suite exacte longue pour G du triple (E^p, E^{p-1}, E^{p-2}) . On a alors

$$\begin{aligned} E_{p, q}^2 &= \frac{\ker d : E_{p, q}^1 \longrightarrow E_{p-1, q}^1}{\text{Im } d : E_{p+1, q}^1 \longrightarrow E_{p, q}^1} \\ &= \frac{\ker d : G_{p+q}(E^p, E^{p-1}) \longrightarrow G_{p+q-1}(E^{p-1}, E^{p-2})}{\text{Im } d : G_{p+q+1}(E^{p+1}, E^p) \longrightarrow G_{p+q}(E^p, E^{p-1})} . \end{aligned}$$

Le théorème 20.0.2 suit alors immédiatement du lemme suivant :

LEMME 20.0.4. *Il existe une famille canonique d'isomorphismes*

$$G_{p+q}(E^p, E^{p-1}) \xrightarrow{\lambda} C_p(B, \mathcal{G}_q(F))$$

rendant commutatif les diagrammes

$$(6) \quad \begin{array}{ccc} G_{p+q}(E^{p-1}, E^{p-2}) & \xrightarrow{d} & G_{p+q-1}(E^{p-1}, E^{p-2}) \\ \sim \downarrow & & \sim \downarrow \\ C_p(B, \mathcal{G}_q(F)) & \xrightarrow{d} & C_{p-1}(B, \mathcal{G}_q(F)) \end{array}$$

DÉMONSTRATION. Décrivons l'isomorphisme

$$G_{p+q}(E^p, E^{p-1}) \simeq C_p(B, \mathcal{G}_q(F)) .$$

Pour $j \in J_p$, où J_p désigne l'ensemble des p -cellules de B , notons $\Phi_j^p : D_j^p \rightarrow \overline{e_j^p} \subset B^p$ l'application caractéristique de la cellule e_j^p de B . On dispose donc d'un homéomorphisme relatif :

$$(\coprod_{i \in J_p} D_i^p, \coprod_{i \in J_p} \partial D_i^p) \xrightarrow[\Phi]{\sim} (B^p, B^{p-1}) \quad ,$$

où $\Phi = \coprod_{i \in J_p} \Phi_j^p$, donc aussi

$$(\Phi^* E, \Phi^* E|_{\coprod_{i \in J_p} \partial D_i^p}) \xrightarrow[\Phi]{\sim} (E^p, E^{p-1}) \quad .$$

Donc

$$\begin{aligned} G_{p+q}(E^p, E^{p-1}) &= G_{p+q}(\Phi^* E, \Phi^* E|_{\coprod_{i \in J_p} \partial D_i^p}) \\ &= \oplus_{i \in J_p} G_{p+q}(\Phi_i^p)^* E, (\Phi_i^p)^* E|_{D_i^p} \end{aligned}$$

où la deuxième égalité résulte de l'axiome d'additivité pour G .

Comme D_i^p est contractile la fibration $(\Phi_i^p)^* E$ est triviale. Notons F_i la fibre au dessus du point 0 de D_i^p , on en déduit

$$\begin{aligned} G_{p+q}(E^p, E^{p-1}) &= \oplus_{i \in J_p} G_{p+q}(F_i \times D_i^p, F_i \times \partial D_i^p) \\ &\simeq \oplus_{j \in J_p} G_q(F_j) = C_p(B, \mathcal{G}_q(F)) \quad , \end{aligned}$$

où on a utilisé que pour tout $X \in \mathbf{Top}$,

$$\begin{aligned} G_n(X \times D^p, X \times \partial D^p) &= \tilde{G}_n(X \times D^p / X \times \partial D^p) \\ &= \tilde{G}_n(X \times S^p / X \times \{1\}) \\ &= \tilde{G}_n(\Sigma^p(X \coprod \{*\})) \\ &= \tilde{G}_{n-p}(X \coprod \{*\}) = G_{n-p}(X) \quad . \end{aligned}$$

Le fait que le diagramme (6) commute est laissé en exercice (non-trivial!) au lecteur. □

□

21. Applications de la suite spectrale de Leray-Serre

21.1. Calcul de $H_*(\Omega S^k)$. Considérons la fibration

$$\Omega S^k \hookrightarrow PS^k \twoheadrightarrow S^k \quad ,$$

où PS^k désigne l'espace (contractile) des chemins de S^k . La suite spectrale homologique de Leray-Serre pour cette fibration est dans le premier cadran, de premier terme

$$E_{p,q}^2 = H_p(S^k, H_q(\Omega S^k)) = \begin{cases} H_q(\Omega S^k) & \text{si } p = 0 \text{ ou } p = k, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Donc

$$E^2 = E^3 = \dots = E^k$$

et

$$E^{k+1} = E^{k+2} = \dots = E^\infty \quad .$$

Ainsi la suite spectrale dégénère en E^{k+1} .

Comme $H_n(PS^k) = 0$ pour $n > 0$, on a $E_{p,q}^\infty = 0$ pour $p + q \neq 0$. Comme E est une suite spectrale dans le premier cadran, on en déduit $E_{p,q}^\infty = 0$ pour $(p, q) \neq (0, 0)$.

Finalement :

$$0 = E_{p,q}^\infty = E_{p,q}^{k+1} = \begin{cases} \ker d^k : E_{k,q}^k \longrightarrow E_{0,q+k-1}^k & \text{si } p = k , \\ \operatorname{coker} d^k : E_{k,q}^k \longrightarrow E_{0,q+k-1}^k & \text{si } p = 0 , \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Ainsi

$$\begin{array}{ccc} E_{k,q}^k & \xrightarrow{d^k} & E_{0,q+k-1}^k \\ \parallel & & \parallel \\ E_{k,q}^2 & \xrightarrow{d^k} & E_{0,q+k-1}^2 \end{array} .$$

D'où

$$H_q(\Omega S^k) = H_{q+k-1}(\Omega S^k) .$$

Comme $H_0(\Omega S^k) = \mathbb{Z}$ on en déduit par induction sur q :

$$H_q(\Omega S^k) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{si } q = a(k-1), a \geq 0, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

21.2. Caractéristique d'Euler. Rappelons que si $Z \in \mathbf{Top}$ est tel que tous ses nombres de Betti $b_i(Z) = \operatorname{rk} H_i(Z, \mathbb{Z})$ sont nuls sauf un nombre fini, on définit sa caractéristique d'Euler par

$$\chi(Z) = \sum_n (-1)^n \operatorname{rk} H_n(Z, \mathbb{Z}) .$$

PROPOSITION 21.2.1. *Soit $F \hookrightarrow E \rightarrow B$ une fibration de fibre F . Supposons que $\pi_1(B)$ agisse trivialement sur $H_*(F)$. Si $\chi(B)$ et $\chi(F)$ sont définis alors $\chi(E)$ aussi et*

$$\chi(E) = \chi(B) \cdot \chi(F) .$$

DÉMONSTRATION. Considérons la suite spectrale de Leray-Serre à coefficients rationnels de cette fibration. Le \mathbb{Q} -espace vectoriel

$$E_{p,q}^2 = H_p(B, H_q(F, \mathbb{Q})) = H_p(B, \mathbb{Q}) \otimes H_q(F, \mathbb{Q})$$

est de dimension finie sur \mathbb{Q} , nul sauf pour un nombre fini de couples (p, q) . En particulier la suite spectrale dégénère et $E_{p,q}^\infty = E_{p,q}^r$ pour r suffisamment grand.

Considérons le complexe

$$E_n^r := \bigoplus_p E_{p,n-p}^r .$$

D'une part

$$\chi(E_\bullet^2) = \chi(B) \cdot \chi(F)$$

en tant que produit de complexes. D'autre part

$$\chi(E_\bullet^r) = \chi(H_*(E^r, d^r)) = \chi(E_\bullet^\infty) .$$

Finalement

$$\chi(E_\bullet^2) = \chi(E_\bullet^\infty) .$$

Comme $H_n(E, \mathbb{Q}) = \bigoplus_p \operatorname{Gr}_p H_n(E, \mathbb{Q}) \simeq E_n^\infty$, on en déduit finalement :

$$\chi(B) \cdot \chi(F) = \chi(E_\bullet^2) = \chi(E_\bullet^\infty) = \chi(E) .$$

□

21.3. Théorèmes d'Hurewicz et Whitehead dual modulo une classe de Serre.

21.3.1. Classes de Serre.

DÉFINITION 21.3.1. Soit \mathcal{C} une collection de groupes abéliens. La collection \mathcal{C} vérifie l'axiome :

(I) si pour toute suite exacte de groupes abéliens $0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C$, les groupes $A, C \in \mathcal{C}$ si et seulement si $B \in \mathcal{C}$. On dit alors que \mathcal{C} est une classe.

(II_A) si pour tout $A, B \in \mathcal{C}$ alors $A \otimes B \in \mathcal{C}$ et $\text{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(A, B) \in \mathcal{C}$.

(II_B) si pour tout $A \in \mathcal{C}$ et tout groupe abélien B , $A \otimes B \in \mathcal{C}$.

(III) si pour tout $A \in \mathcal{C}$ et tout $n \in \mathbb{N}$, $H_n(A, \mathbb{Z}) := H_n(K(A, 1), \mathbb{Z}) \in \mathcal{C}$.

(IV) si toute somme directe (finie ou infinie) de groupes de \mathcal{C} est dans \mathcal{C} .

On montre facilement que l'axiome (II_B) implique l'axiome (II_A), et que l'axiome (IV) implique les axiomes (II_B) et (III).

DÉFINITION 21.3.2. Une collection \mathcal{C} de groupes abéliens est une classe de Serre si elle vérifie les axiomes (I), (II_A) et (III). C'est une classe de Serre forte si elle vérifie de plus l'axiome (II_B).

EXEMPLES 21.3.3. (1) la collection des groupes abéliens de type fini (resp. des groupes abéliens finis, resp. des groupes abéliens finis dont l'ordre n'est divisible que par les nombres premiers appartenant à une famille donnée) forme une classe de Serre.

(2) la collection des groupes abéliens de torsion (resp. des groupes abéliens de torsion dont les p -composantes sont nulles pour une famille donnée de premiers p) est une classe de Serre forte (elle vérifie évidemment l'axiome (IV)).

21.3.2. Les théorèmes.

DÉFINITION 21.3.4. Soit \mathcal{C} une classe de Serre. Un morphisme de groupes abéliens $f : A \rightarrow B$ est un monomorphisme mod \mathcal{C} si $\ker f \in \mathcal{C}$, un épimorphisme mod \mathcal{C} si $\text{coker } f \in \mathcal{C}$, un isomorphisme mod \mathcal{C} si $\ker f \in \mathcal{C}$ et $\text{coker } f \in \mathcal{C}$.

THÉORÈME 21.3.5 (Hurewicz mod \mathcal{C}). (a) Soit \mathcal{C} une classe de Serre. Soit $X \in \mathbf{Top}$ un espace 0-connexe abélien. Si $\pi_i(X) \in \mathcal{C}$ pour $i < n$ alors $H_i(X) \in \mathcal{C}$ pour $i < n$ et le morphisme d'Hurewicz $h : \pi_n(X) \rightarrow H_n(X)$ est un isomorphisme mod \mathcal{C} .

(b) (version relative) Soit \mathcal{C} une classe de Serre forte. Soit (X, A) une paire de \mathbf{Top} avec A et X simplement connexes et $\pi_2(X, A) = 0$. Si $\pi_i(X, A) \in \mathcal{C}$ pour $i < n$ alors $H_i(X, A) \in \mathcal{C}$ pour $i < n$ et le morphisme d'Hurewicz $h : \pi_n(X, A) \rightarrow H_n(X, A)$ est un isomorphisme mod \mathcal{C} .

REMARQUE 21.3.6. On retrouve le théorème d'Hurewicz classique en prenant pour \mathcal{C} la classe de Serre des groupes à un élément.

COROLLAIRE 21.3.7 (Whitehead dual mod \mathcal{C}). Soit \mathcal{C} une classe de Serre forte. Soit $f : X \rightarrow Y$ une application entre espaces 1-connexes et telle que $f_* : \pi_2(X) \rightarrow \pi_2(Y)$ est surjective. Alors les assertions suivantes sont équivalentes :

(a) $f_* : \pi_i(X) \rightarrow \pi_i(Y)$ est un \mathcal{C} -isomorphisme pour $i < n$ et un \mathcal{C} -épimorphisme pour $i = n$.

(b) $f_* : H_i(X) \rightarrow H_i(Y)$ est un \mathcal{C} -isomorphisme pour $i < n$ et un \mathcal{C} -épimorphisme pour $i = n$.

DÉMONSTRATION. Similaire à la preuve du théorème de Whitehead dual à partir du théorème de Hurewicz relatif. \square

COROLLAIRE 21.3.8. *Soit \mathcal{C} une classe de Serre. Soit X un espace 0-connexe abélien. Alors $\pi_n(X) \in \mathcal{C}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ si et seulement si $H_n(X) \in \mathcal{C}$ pour tout $n > 0$.*

DÉMONSTRATION. Le cas où X est simplement connexe découle immédiatement du théorème de Whitehead dual mod \mathcal{C} pour l'application canonique $f : X \rightarrow \{*\}$. On peut aussi (exercice laissé au lecteur dans le cas X 0-connexe abélien) adapter immédiatement la preuve du théorème 21.3.5 donnée ci-dessous. \square

Prenons pour \mathcal{C} la classe de Serre des groupes abéliens de type fini, on en déduit en particulier le :

COROLLAIRE 21.3.9. *Pour tout entiers i, k le groupe $\pi_i(S^k)$ est de type fini.*

REMARQUE 21.3.10. La condition « X abélien » dans les théorèmes 21.3.5 et 21.3.8 est nécessaire. Par exemple $\pi_2(S^1 \vee S^2)$ n'est pas de type fini bien que tous les $H_n(S^1 \vee S^2)$, $n > 0$, le soient.

Avant de démontrer le théorème 21.3.5, commençons par le

LEMME 21.3.11. *Soit \mathcal{C} une classe de Serre. Soit $F \hookrightarrow E \rightarrow B$ une fibration d'espaces 0-connexes et telle que $\pi_1(B)$ agit trivialement sur $H_*(F)$.*

(a) *Si $H_n(F) \in \mathcal{C}$ et $H_n(B) \in \mathcal{C}$ pour tout $n > 0$ alors $H_n(E) \in \mathcal{C}$ aussi.*

(b) *Si $H_n(F) \in \mathcal{C}$ et $H_n(E) \in \mathcal{C}$ pour tout $n > 0$ alors $H_n(B) \in \mathcal{C}$ aussi.*

DÉMONSTRATION. Pour (a) : La suite spectrale homologique de Leray-Serre s'écrit

$$E_{p,q}^2 = H_p(B, \mathcal{H}_q(F)) = H_p(B, H_q(F)) = H_p(B) \otimes H_q(F) \oplus \text{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(H_{p-1}(B), H_q(F))$$

d'après le théorème des coefficients universels. Par hypothèse $H_p(B)$ et $H_q(F)$ appartiennent à \mathcal{C} pour $p > 0$, $q > 0$ donc aussi $H_p(B) \otimes H_q(F)$ et $\text{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(H_{p-1}(B), H_q(F))$ par l'axiome (II_A) (et les propriétés évidentes de H_0).

Par induction sur r , comme $E_{p,q}^r$ est un sous-quotient de $E_{p,q}^2$, on déduit de l'axiome (I) que $E_{p,q}^r \in \mathcal{C}$, pour tout $r \geq 2$, $(p, q) \neq (0, 0)$.

Donc aussi $\text{Gr}_p H^n(E) = E_{p, n-p}^\infty \in \mathcal{C}$. Par induction décroissante sur p et par l'axiome (I) on en déduit que pour tout $n > 0$, et tout $p \geq 0$, $F_p H_n(E) \in \mathcal{C}$, donc (cas $p = 0$) $H_n(E) \in \mathcal{C}$.

Pour (b) : Par hypothèse $H_n(E) \in \mathcal{C}$ pour $n > 0$. D'après l'axiome (I) les filtrés $F_p H_n(E)$ aussi, puis les gradués $E_{p, n-p}^\infty$.

Supposons par induction croissante sur k que $H_p(B) \in \mathcal{C}$ pour $0 < p < k$. Mais alors comme dans le cas (a) on en déduit que $E_{p,q}^2 \in \mathcal{C}$ pour $p < k$, $(p, q) \neq (0, 0)$. Puis par l'axiome (I) : $E_{p,q}^r \in \mathcal{C}$ pour $p < k$, $(p, q) \neq (0, 0)$, $r \geq 2$. Comme

$$0 \longrightarrow E_{k,0}^{r+1} \longrightarrow E_{k,0}^r \xrightarrow{d_r} \text{Im } d_r \longrightarrow 0 ,$$

et comme $\text{Im } d_r \subset E_{k-r, r-1}^r \in \mathcal{C}$ on déduit de l'axiome (I) que $E_{k,0}^{r+1} \in \mathcal{C}$ si et seulement si $E_{k,0}^r \in \mathcal{C}$. Par induction descendante sur r on déduit de $E_{k,0}^\infty \in \mathcal{C}$ que $E_{k,0}^2 = H_k(B)$ appartient à \mathcal{C} . \square

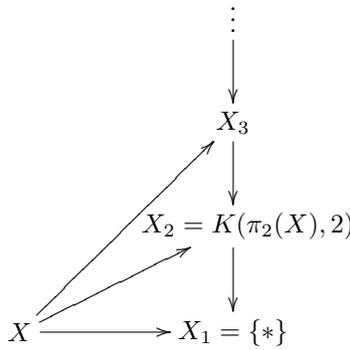
COROLLAIRE 21.3.12. *Soit \mathcal{C} une classe de Serre et $G \in \mathcal{C}$. Alors $H_k(K(G, n), \mathbb{Z}) \in \mathcal{C}$ pour tous $k, n > 0$.*

DÉMONSTRATION. Considérons la fibration

$$K(G, n - 1) \hookrightarrow PK(G, n) \simeq \{*\} \twoheadrightarrow K(G, n) .$$

Par le lemme précédent, cas (b), et par récurrence, il suffit de démontrer le résultat pour $n = 1$. Mais c'est l'axiome (III) des classes de Serre. \square

PREUVE DU THÉORÈME 21.3.5 : on se contente de démontrer (a) dans le cas où X est simplement connexe, les difficultés (mineures) supplémentaires dans le cas abélien et le cas relatif sont laissées au lecteur. Soit alors



une tour de Postnikov pour X . Pour tout entier $i > 1$ notons

$$(7) \quad F_i \simeq K(\pi_i(X), i) \hookrightarrow X_i \twoheadrightarrow X_{i-1}$$

la fibration naturelle.

Soit $i < n$. Comme $\pi_i(X) \in \mathcal{C}$ et $F_i = K(\pi_i(X), i)$ il découle du corollaire 21.3.12 que $H_k(F_i, \mathbb{Z}) \in \mathcal{C}$ pour tout entier $k > 0$. Par récurrence sur i on déduit du lemme 21.3.11, (a) que $H_k(X_i, \mathbb{Z}) \in \mathcal{C}$ pour tout $i < n$ et tout $k > 0$. Comme $X \twoheadrightarrow X_{n-1}$ est une n -équivalence, la flèche $H_k(X, \mathbb{Z}) \twoheadrightarrow H_k(X_{n-1}, \mathbb{Z})$ est un isomorphisme pour $k < n$ et donc $H_k(X, \mathbb{Z}) \in \mathcal{C}$ pour $k < n$.

Considérons alors la suite spectrale de Leray-Serre

$$H_p(X_{n-1}, H_q(F_n, \mathbb{Z})) \implies F_p H_{p+q}(X_n, \mathbb{Z})$$

associée à la fibration

$$F_n \hookrightarrow X_n \twoheadrightarrow X_{n-1} .$$

Comme le premier groupe d'homotologie non-trivial de $F_n = K(\pi_n(X), n)$ est en degré n la page E^2 n'a que des zéros entre les lignes 0 et n et la première différentielle intéressante est

$$H_{n+1}(X_{n-1}, \mathbb{Z}) \xrightarrow{d^{n+1}} H_n(F_n) \twoheadrightarrow E_{0,n}^\infty .$$

Par ailleurs la projection canonique $H_n(X_n, \mathbb{Z}) \twoheadrightarrow \text{Gr}_n H_n(X_n, \mathbb{Z}) = E_{n,0}^\infty = H_n(X_{n-1}, \mathbb{Z})$ a pour noyau

$$F_{n-1} H_n(X_n, \mathbb{Z}) = \cdots = F_1 H_n(X_n, \mathbb{Z}) = F_0 H_n(X_n, \mathbb{Z}) = \text{Gr}_0 H_n(X_n, \mathbb{Z}) = E_{0,n}^\infty ,$$

puisque tous les $\text{Gr}_i H_n(X_n, \mathbb{Z})$ sont nuls pour $1 \leq i \leq n - 1$.

Finalement on obtient une suite exact à 5 termes :

$$\begin{array}{ccccccc}
 H_{n+1}(X_{n-1}, \mathbb{Z}) & \xrightarrow{d^{n+1}} & H_n(F_n, \mathbb{Z}) & \longrightarrow & H_n(X_n, \mathbb{Z}) & \longrightarrow & H_n(X_{n-1}, \mathbb{Z}) \longrightarrow 0 \\
 & & \searrow & & \nearrow & & \\
 & & & & E_{0,n}^\infty & & \\
 & & \nearrow & & \searrow & & \\
 0 & & & & & & 0
 \end{array}$$

Comme $H_{n+1}(X_{n-1}, \mathbb{Z}) \in \mathcal{C}$ et $H_n(X_{n-1}, \mathbb{Z}) \in \mathcal{C}$, on déduit de cette suite exacte que la flèche naturelle

$$H_n(F_n, \mathbb{Z}) \longrightarrow H_n(X_n, \mathbb{Z})$$

est un isomorphisme mod \mathcal{C} . On déduit du diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc}
 \pi_n(F_n) & \xrightarrow{\sim} & \pi_n(X_n) \\
 \downarrow h \sim & & \downarrow h \\
 H_n(F_n, \mathbb{Z}) & \longrightarrow & H_n(X_n, \mathbb{Z})
 \end{array}$$

que le morphisme d'Hurewicz $h : \pi_n(X_n) \longrightarrow H_n(X_n, \mathbb{Z})$ est un isomorphisme mod \mathcal{C} . Comme $X \longrightarrow X_n$ est une $(n+1)$ -équivalence, cette flèche coïncide avec le morphisme d'Hurewicz $h : \pi_n(X) \longrightarrow H_n(X, \mathbb{Z})$ et le résultat.

21.4. Structure multiplicative. La suite spectrale *cohomologique* de Leray-Serre est bien-plus efficace que la suite spectrale homologique, du fait de sa compatibilité avec la structure d'anneau de la cohomologie.

DÉFINITION 21.4.1. Soit R un anneau commutatif unitaire. Une suite spectrale de R -algèbres bigraduées est une suite spectrale cohomologique

$$((E_r^{\bullet, \bullet}, \psi : E_r \otimes_R E_r \longrightarrow E_r), d_r)$$

dans la catégorie des R -algèbres bigraduées telle que

(a) $d_r : E_r \longrightarrow E_r$ est une dérivation. En d'autres termes (E_r, d_r) est une algèbre différentielle bigraduée.

(b) le produit $\psi_{r+1} : E_{r+1} \otimes E_{r+1} \longrightarrow E_{r+1}$ est induit par $\psi_r :$

$$\psi_{r+1} : E_{r+1} \otimes E_{r+1} \xrightarrow{\sim} H^*(E_r) \otimes_R H^*(E_r) \xrightarrow{p} H^*(E_r \otimes E_r) \xrightarrow{H^*(\psi_r)} H^*(E_r) \xrightarrow{\sim} E_{r+1} ,$$

où le morphisme p vient du théorème de Künneth :

$$0 \longrightarrow \bigoplus_{p+q=n} H^p(E_r) \otimes_R H^q(E_r) \xrightarrow{p} H^n(E_r \otimes E_r) \longrightarrow \bigoplus_{p+q=n-1} \mathrm{Tor}_1^R(H^p(E_r), H^q(E_r)) \longrightarrow 0 .$$

DÉFINITION 21.4.2. Si (A^\bullet, F^\bullet) est une R -algèbre graduée filtrée, on dira que la suite spectrale de R -algèbres bigraduées $((E_r, \psi_r), d_r)$ converge vers (A^\bullet, F^\bullet) si les R -algèbres bigraduées $\bigoplus_{p,q} E_\infty^{p,q}$ et $\bigoplus_{p,q} \mathrm{Gr}_F^p A^{p+q}$ coïncident.

Soit R un anneau commutatif unitaire. Soit $F \hookrightarrow E \twoheadrightarrow B$ une fibration de **Top**. Considérons la suite spectrale de Leray-Serre à coefficients dans R associée à cette fibration. La page E_2 (avec $E_2^{p,q} = H_p(B, \mathcal{H}^q(F, R))$) munie de la différentielle d_2 est naturellement une R -algèbre différentielle bigraduée, qui

fait de la suite spectrale de Leray-Serre à coefficients dans R une suite spectrale de R -algèbres bigraduées. On démontre sans difficulté le

THÉORÈME 21.4.3. *La suite spectrale de Leray-Serre à coefficient dans un anneau R commutatif unitaire converge vers $(H^\bullet(E, R), F^\bullet)$ en tant que suite spectrale de R -algèbres bigraduées.*

21.5. Calcul de $H^*(SU(n), R)$.

PROPOSITION 21.5.1. *Soit R un anneau commutatif unitaire. Soit $SU(n)$ le groupe spécial unitaire d'un espace hermitien réel de signature $(n, 0)$. Alors on a des isomorphismes canoniques de R -algèbres*

$$H^*(SU(n), R) \simeq H^*(S^3 \times S^5 \times S^{2n-1}, R) \simeq \Lambda_R[x_3, x_5, \dots, x_{2n-1}]$$

(où $\Lambda_R[x_3, x_5, \dots, x_{2n-1}]$ désigne la R -algèbre extérieure engendrée par x_3, \dots, x_{2n-1} avec x_i de degré i).

DÉMONSTRATION. La preuve se fait par induction sur n .

Pour $n = 2$: $SU(2)$ est homéomorphe à S^3 (sphère unité des quaternions) et on a bien $H^*(S^3, R) = \Lambda_R[x_3]$.

Supposons le résultat vrai pour $SU(i)$, $i < n$ et considérons la fibration

$$SU(n-1) \hookrightarrow SU(n) \rightarrow S^{2n-1} .$$

Comme $H^*(S^{2n-1}, R) \simeq \Lambda_R[y_{2n-1}]$ et $H^*(SU(n-1), R) \simeq \Lambda_R[x_3, \dots, x_{2n-3}]$, la R -algèbre bigraduée E_2 de la suite spectrale de Leray Serre s'écrit

$$E_2 \simeq \Lambda_R[y_{2n-1}] \otimes_R \Lambda_R[x_3, \dots, x_{2n-3}]$$

et

$$d_2 : E_2^{p,q} \longrightarrow E_2^{p+2,q-1}$$

est nulle. Donc la suite spectrale (E_r, d_r) dégénère en E_2 . On peut alors montrer que $H^*(SU(n), R)$ s'identifie à

$$\text{Tot}(E_\infty^{\bullet,\bullet}) = \text{Tot}(E_2^{\bullet,\bullet}) \simeq \Lambda_R[x_3, \dots, x_{2n-3}, x_{2n-1}] .$$

□

21.6. Calcul de $H^*(K(\mathbb{Z}, n), \mathbb{Q})$.

PROPOSITION 21.6.1.

$$H^*(K(\mathbb{Z}, n), \mathbb{Q}) = \begin{cases} \mathbb{Q}[x_n] & \text{si } n \text{ est pair,} \\ \Lambda_{\mathbb{Q}}[x_n] & \text{si } n \text{ est impair.} \end{cases}$$

DÉMONSTRATION. Là encore la preuve est par récurrence sur n .

Pour $n = 1$, $K(\mathbb{Z}, 1) = S^1$ et $H^*(S^1, \mathbb{Q}) = \Lambda_{\mathbb{Q}}[x_1]$ (dans ce cas le résultat est bien-sûr encore vrai à coefficients dans \mathbb{Z}).

Supposons le résultat pour $K(\mathbb{Z}, k)$, $k < n$ et considérons la suite spectrale cohomologique de Leray-Serre pour la fibration

$$K(\mathbb{Z}, n-1) \hookrightarrow PK(\mathbb{Z}, n) \simeq \{*\} \rightarrow K(\mathbb{Z}, n) .$$

On a donc $E_2^{p,q} = H^p(K(\mathbb{Z}, n), \mathbb{Q}) \otimes_{\mathbb{Q}} H^q(K(\mathbb{Z}, n-1), \mathbb{Q})$.

Si $n = 2k$: par hypothèse de récurrence la page E_2 a seulement deux lignes non-nulles $q = 0$ et $q = 2k - 1$. Ainsi toutes les différentielles d_i , $i \neq 2k - 1$, sont nulles et

$$\begin{cases} E_2 = E_3 = \cdots = E_{2k-1}, \\ E_{2k} = \cdots = E_\infty . \end{cases}$$

La différentielle d_{2k-1} est de la forme

$$d_{2k-1} : \mathbb{Q}\beta \otimes H^*(K(\mathbb{Z}, 2k), \mathbb{Q}) \longrightarrow H^*(K(\mathbb{Z}, 2k), \mathbb{Q}) ,$$

où β désigne un générateur de $H^{2k-1}(K(\mathbb{Z}, 2k-1), \mathbb{Q})$.

Comme $PK(\mathbb{Z}, 2k)$ est contractile, $\alpha = d_{2k-1}(\beta)$ est un générateur de $H^{2k}(K(\mathbb{Z}, 2k), \mathbb{Q})$.

Par la propriété de dérivation de d_{2k-1} pour les suites spectrales d'algèbres,

$$\forall t \in \mathbb{N}, d_{2k-1}(\beta \otimes \alpha^t) = \alpha \otimes \alpha^t = \alpha^{t+1} .$$

Par induction sur t on en déduit facilement

$$H^*(K(\mathbb{Z}, 2k), \mathbb{Q}) \simeq \mathbb{Q}[\alpha] .$$

Si $n = 2k + 1$: cette fois l'unique différentielle non-nulle sur le générateur $1 \otimes \alpha$ de $E_2^{0,2k} = H^0(K(\mathbb{Z}, 2k+1), \mathbb{Q}) \otimes H^{2k}(K(\mathbb{Z}, 2k), \mathbb{Q})$ est d_{2k+1} . Comme $E_\infty = 0$, on en déduit que l'application qui à α associe β induit un isomorphisme :

$$E_{2k+1}^{0,2k} \xrightarrow[\sim]{d_{2k+1}} E_{2k+1}^{2k+1,0} .$$

Par la propriété de dérivation de d_{2k+1} pour les suite spectrale d'algèbres, on en déduit

$$d_{2k+1}(\alpha^2) = 2\alpha \otimes d_{2k+1}\alpha = 2\alpha \otimes \beta$$

et donc l'application qui à α^2 associe $2\alpha \otimes \beta$ définit un isomorphisme

$$E_{2k+1}^{0,4k} \xrightarrow[\sim]{d_{2k+1}} E_{2k+1}^{2k+1,2k} .$$

Finalement par récurrence sur le degré on obtient le résultat. □

21.7. Application aux $\pi_i(S^n)$.

THÉORÈME 21.7.1 (Serre). *Soit n un entier naturel impair. Alors $\pi_i(S^n)$ est fini pour $i \neq n$.*

DÉMONSTRATION. Si $n = 1$ le théorème est évident.

Soit donc $n > 1$ un entier impair. Notons $f : S^n \longrightarrow K(\mathbb{Z}, \mathbb{N})$ une application induisant un isomorphisme sur les π_n . D'après la proposition 21.6.1 la flèche $f_* : H_*(S^n, \mathbb{Q}) \longrightarrow H_*(K(\mathbb{Z}, n), \mathbb{Q})$ est un isomorphisme.

Soit alors \mathcal{C} la classe de Serre des groupes abéliens de torsion. La remarque précédente se réénonce en disant que $f_* : H_\bullet(S^n, \mathbb{Z}) \longrightarrow H_\bullet(K(\mathbb{Z}, n), \mathbb{Z})$ est un isomorphisme mod \mathcal{C} .

D'après le théorème de Whitehead dual mod \mathcal{C} (theorem 21.3.7),

$$f_* : \pi_*(S^n) \longrightarrow \pi_*(K(\mathbb{Z}, n))$$

est un isomorphisme mod \mathcal{C} : ses noyaux et conoyaux sont des groupes abéliens de torsion. D'après le corollaire 21.3.7 ce sont aussi des groupes de type fini. Finalement ce sont des groupes finis et le résultat. □

Théorie élémentaire des catégories de modèles

1. Catégories de modèles

1.1. Motivation. Une motivation principale pour l'étude du formalisme des catégories de modèles est le problème de la *localisation*, c'est-à-dire de l'inversion d'une classe de flèches dans une catégorie.

DÉFINITION 1.1.1 (localisation). Soit \mathcal{C} une catégorie et $W \subset \mathcal{C}$ une classe de morphismes. Un foncteur $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ est une localisation de \mathcal{C} par rapport à W si

- (1) $F(w)$ est un isomorphisme pour tout w dans W .
- (2) $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ est universel pour cette propriété : si $G : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}'$ est un foncteur envoyant les flèches de W sur des isomorphismes alors il existe un unique foncteur $G' : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}'$ rendant commutatif le diagramme

$$\begin{array}{ccc}
 \mathcal{C} & \xrightarrow{F} & \mathcal{D} \\
 & \searrow G & \downarrow G' \\
 & & \mathcal{D}'
 \end{array}$$

Par universalité deux localisations de \mathcal{C} relativement à W sont canoniquement isomorphes. Une telle localisation, si elle existe, sera notée $\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}[W^{-1}]$.

On peut montrer « abstraitement » que si \mathcal{C} est petite alors $\mathcal{C}[W^{-1}]$ existe (c.f. [3]). Un problème important est d'obtenir une description suffisamment explicite de $\mathcal{C}[W^{-1}]$ pour pouvoir calculer $\text{Hom}_{\mathcal{C}[W^{-1}]}(X, Y)$ entre deux objets X, Y de \mathcal{C} .

Exemple : Soit \mathcal{A} une catégorie abélienne et $C_+(\mathcal{A})$ la catégorie des complexes homologiques positifs $C_\bullet, \bullet \geq 0$, d'objets de \mathcal{A} . Soit W la classe des quasi-isomorphismes de $C_+(\mathcal{A})$. Si la catégorie \mathcal{A} possède assez de projectifs la localisée $C_+(\mathcal{A})[W^{-1}]$ n'est autre que la catégorie dérivée $D_+(\mathcal{A})$. L'algèbre homologique classique résout le problème du calcul de $\text{Hom}_{D_+(\mathcal{A})}(X, Y)$ en terme de « résolutions » : on remplace tout complexe par un complexe quasi-isomorphe formé de projectifs et les $\text{Hom}_{D_+(\mathcal{A})}$ s'obtiennent entre de tels complexes comme les $\text{Hom}_{C_+(\mathcal{A})}$ modulo homotopie de complexes. Ainsi

$$D_+(\mathcal{A}) \simeq C_+(\mathcal{A}_{\text{proj}}) / \sim_{\text{homotopie}} ,$$

où $\mathcal{A}_{\text{proj}}$ désigne la sous-catégorie pleine de \mathcal{A} formée des objets projectifs.

Un but de la théorie des catégories de modèles est de fournir un formalisme analogue dans un cadre non-abélien.

1.2. Définition.

DÉFINITION 1.2.1. Une catégorie de modèle est une catégorie \mathcal{C} munie de trois classes de flèches fermées par composition et contenant toutes les identités :

- (i) la classe W des équivalences faibles (notées $\xrightarrow{\sim}$).
- (ii) la classe Fib des fibrations (notées \twoheadrightarrow).
- (iii) la classe Cof des cofibrations (notées \hookrightarrow).

Une flèche de $W \cap \text{Cof}$ est appelée une cofibration acyclique, une flèche de $W \cap \text{Fib}$ une fibration acyclique.

On demande que les axiomes suivants soient satisfaits :

MC1 Toutes les petites limites et colimites existent dans \mathcal{C} .

MC2 Si f et g sont des flèches composables de \mathcal{C} et si 2 des 3 flèches f , g et gf sont dans W alors la troisième aussi (on dira que W vérifie la propriété « 2 sur 3 »).

MC3 W , Cof et Fib sont stables par rétraction : si

$$\begin{array}{ccccc}
 & & \text{id} & & \\
 & \curvearrowright & & \curvearrowleft & \\
 A & \longrightarrow & X & \longrightarrow & A \\
 \downarrow f & & \downarrow g & & \downarrow f \\
 B & \longrightarrow & Y & \longrightarrow & B \\
 & \curvearrowleft & & \curvearrowright & \\
 & & \text{id} & &
 \end{array}$$

et si g appartient à W , C ou F alors f aussi.

MC4 Etant donné un diagramme

$$\begin{array}{ccc}
 A & \xrightarrow{f} & X \\
 \downarrow i & \nearrow h & \downarrow p \\
 B & \xrightarrow{g} & Y
 \end{array}$$

un relèvement h existe si

- i est une cofibration et p est une fibration acyclique
- ou
- i est une cofibration acyclique et p est une fibration.

MC5 Toute flèche f se factorise de deux manières :

- $f = pi$ où p est une fibration et i une cofibration acyclique.
- et
- $f = pi$ où i est une cofibration acyclique et p une fibration.

Par l'axiome **MC1**, une catégorie de modèle a un objet initial \emptyset et un objet final $*$.

DÉFINITION 1.2.2 (Objets fibrants et cofibrants). Un objet A de \mathcal{C} est dit cofibrant si $\emptyset \rightarrow A$ est une cofibration et fibrant si $A \rightarrow *$ est une fibration.

Ces objets vont jouer un rôle crucial dans la définition de la catégorie homotopique $\mathbf{Ho}(\mathcal{C})$ de la catégorie de modèle \mathcal{C} .

Les exemples suivants seront développés plus longuement plus loin :

Exemple 1 : Dans $C_+(\mathcal{A})$ on définit une structure de catégorie de modèle en définissant $f : M_\bullet \rightarrow N_\bullet$ une équivalence faible si c'est un quasi-isomorphisme, une cofibration si pour tout $k \geq 0$ la flèche f_k :

$M_k \rightarrow N_k$ de \mathcal{A} est un monomorphisme de conoyau un projectif, une fibration si pour tout $k \geq 1$ la flèche $f_k : M_k \rightarrow N_k$ est un épimorphisme. Les objets cofibrants sont les complexes formés de projectifs. Tous les complexes sont fibrants.

Exemple 2 : On munit **Top** d'une structure de catégorie de modèle comme suit : les équivalences faibles sont les équivalences faibles d'homotopie, les fibrations les fibrations de Serre, et les cofibrations les rétractes de flèches $X \rightarrow Y$ obtenues par recollement généralisé de cellules.

1.3. Redondance des axiomes.

DÉFINITION 1.3.1. *Etant donné un diagramme*

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & X \\ i \downarrow & \nearrow h & \downarrow p \\ B & \xrightarrow{g} & Y \end{array}$$

on dit que i a la propriété de relèvement à gauche (LLP) relativement à p et que p a la propriété de relèvement à droite (RLP) relativement à i .

PROPOSITION 1.3.2. *Soit \mathcal{C} une catégorie de modèle.*

- (i) *Les cofibrations (resp. cofibrations acycliques) de \mathcal{C} sont les flèches ayant la LLP relativement aux fibrations acycliques (resp. aux fibrations).*
- (ii) *Les fibrations (resp. fibrations acycliques) de \mathcal{C} sont les flèches ayant la RLP relativement aux cofibrations acycliques (resp. aux cofibrations).*

DÉMONSTRATION. L'axiome **MC4** implique que les flèches concernées possèdent bien les propriétés de relèvement requises. Montrons la réciproque. Remarquons d'abord que si \mathcal{C} est une catégorie de modèle alors \mathcal{C}^{op} aussi en prenant comme équivalences faibles, fibrations, cofibrations les flèches opposées respectivement des équivalences faibles, cofibrations et fibrations de \mathcal{C} . Donc par dualité (ii) implique (i). Pour montrer (ii), soit $p : X \rightarrow Y$ ayant la RLP relativement à toutes les cofibrations acycliques. Montrons que p est une fibration.

Factorisons p en $X \xrightarrow{\sim} X' \twoheadrightarrow Y$ par **MC5**. On a le diagramme

$$\begin{array}{ccc} X & \xlongequal{\quad} & X \\ \sim \downarrow i & \nearrow h & \downarrow p \\ X' & \twoheadrightarrow & Y \end{array}$$

par l'hypothèse. Ceci implique que $p : X \rightarrow Y$ est un rétracte de la fibration $X' \twoheadrightarrow Y$, et donc une fibration par l'axiome **MC3** :

$$\begin{array}{ccccc} X & \longrightarrow & X' & \xrightarrow{h} & X \\ p \downarrow & & \downarrow & & \downarrow p \\ Y & \longrightarrow & Y & \xlongequal{\quad} & Y \end{array}$$

□

Ainsi, dans une catégorie de modèle, deux des classes W , C et F définissent la troisième : si on connaît C et F , on connaît aussi les fibrations acycliques et les cofibrations acycliques, et les flèches de W

sont celles admettant une décomposition pi avec p fibration acyclique et i cofibration acyclique. Vérifier qu'une catégorie \mathcal{C} munie de trois classes de flèches W , C et F est une catégorie de modèle revient donc à vérifier des conditions de compatibilité.

1.4. Stabilité par changement de base/cobase.

COROLLAIRE 1.4.1. *Soit \mathcal{C} une catégorie de modèle. Alors les cofibrations et les cofibrations acycliques sont stables par changement de cobase, les fibrations et fibrations acycliques par changement de base.*

DÉMONSTRATION. C'est évident par la proposition précédente. □

2. Théorie homotopique des catégories de modèles

2.1. Homotopies (à gauche). L'axiomatique des catégories de modèles définie par Quillen permet de définir de bonnes notions d'homotopie entre flèches. Quelques précautions s'imposent par rapport au cas topologique :

- étant donné un objet $X \in \mathcal{C}$ il y a de nombreux choix possibles pour les notions de cylindre ou d'espace de chemin pour X .
- on va définir deux notions duales : homotopie à droite et homotopie à gauche, qui ne coïncident pas en général.
- l'homotopie à droite ou à gauche n'est pas en général une relation d'équivalence.

DÉFINITION 2.1.1 (cylindre). *Soit $A \in \mathcal{C}$. Un cylindre pour A est un objet $A \wedge I \in \mathcal{C}$ vérifiant la factorisation*

$$\begin{array}{ccc} A \amalg A & \xrightarrow{i} & A \wedge I \\ & \searrow \nabla & \downarrow q \\ & & A \end{array}$$

On dit que $A \wedge I$ est un bon cylindre si $A \amalg A \xrightarrow{i} A \wedge I$ est une cofibration, un très bon cylindre si de plus $A \wedge I \xrightarrow{q} A$ est une fibration (nécessairement acyclique).

Exemples :

- Pour tout $A \in \mathcal{C}$, A est un cylindre pour A ; ce n'est en général pas un bon cylindre.
- Dans $\mathcal{C} = C_+(\mathcal{A})$: soit $C_\bullet \in C_+(\mathcal{A})$. On définit le cylindre standard $C_\bullet \wedge I$ par $(C_\bullet \wedge I)_n = C_n \oplus C_{n-1} \oplus C_n$ avec différentielle $\partial(x, a, y) = (\partial x + a, -\partial a, \partial y + a)$. C'est un bon cylindre (et alors un très bon cylindre) si C_\bullet est cofibrant.
- Dans $\mathcal{C} = \mathbf{Top}_*$: si $A \in \mathbf{Top}_*$, $A \wedge I$ (topologique) est un cylindre pour A . C'est un bon cylindre (et alors un très bon cylindre) si A est un CW -complexe.

REMARQUE 2.1.2. Par l'axiome de factorisation **MC5** appliquée à la codiagonale $\nabla : A \amalg A \rightarrow A$, tout objet A de \mathcal{C} admet au moins un très bon cylindre.

DÉFINITION 2.1.3 (homotopie à gauche). Une homotopie (à gauche) reliant deux flèches $f, g : A \rightarrow X$ de \mathcal{C} est

$$\begin{array}{ccc} A \amalg A & \xrightarrow{i} & A \wedge I \\ & \searrow f \amalg g & \downarrow H \\ & & X \end{array},$$

où $A \wedge I$ est un cylindre de A . L'homotopie est dite bonne (respectivement très bonne) si $A \wedge I$ est un bon (resp. très bon) cylindre pour A . On note $f \stackrel{l}{\sim} g$.

Exemples :

- Dans l'exemple de $C_+(\mathcal{A})$, une homotopie entre deux morphismes de complexes *via le cylindre standard* ($C \wedge I$) coïncide avec la notion usuelle d'homotopie de chaîne.
- Dans \mathbf{Top}_* une homotopie à gauche via l'objet cylindre $A \wedge I$ (topologique) est une homotopie au sens usuel.

REMARQUE 2.1.4. Si $f \stackrel{l}{\sim} g : A \rightarrow X$ via l'homotopie $H : A \wedge I \rightarrow X$ et si f est une équivalence faible, alors g aussi. En effet notons $in_0, in_1 : A \rightarrow A \amalg A$ les deux flèches naturelles et $i_0, i_1 : A \rightarrow A \amalg A \rightarrow A \wedge I$ les deux applications qui s'en déduisent. Comme

$$A \xrightarrow{i_0} A \wedge I \xrightarrow{\sim} A$$

est l'identité de A il résulte de **MC2** que i_0 et i_1 sont des équivalences faibles. Mais alors si $f = Hi_0$ est une équivalence faible, H aussi par **MC2**, et donc aussi $g = Hi_1$.

LEMME 2.1.5. Si $f \stackrel{l}{\sim} g$ il existe une bonne homotopie reliant f à g .

DÉMONSTRATION. Soit $A \amalg A \rightarrow A \wedge I$ un cylindre pour une homotopie à gauche $H : A \wedge I \rightarrow X$ reliant f à g . Par **MC5** cette application factorise en $A \amalg A \hookrightarrow (A \wedge I)' \xrightarrow{\sim} A \wedge I$, et $(A \wedge I)'$ est un bon cylindre. La composée $(A \wedge I)' \xrightarrow{\sim} A \wedge I \xrightarrow{H} X$ est une bonne homotopie à gauche reliant f à g . □

LEMME 2.1.6. Si A est cofibrant alors $\stackrel{l}{\sim}$ est une relation d'équivalence sur $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, X)$.

DÉMONSTRATION. Pour la réflexivité on prend A comme cylindre pour A et f une homotopie à gauche entre f et f . Pour la symétrie, échanger les facteurs de $A \amalg A$ (même homotopie). Reste la transitivité.

SOUS-LEMME 2.1.7. Si A est cofibrant et $A \wedge I$ est un bon cylindre pour A alors $i_0, i_1 : A \rightarrow A \wedge I$ sont des cofibrations acycliques.

DÉMONSTRATION. On a vu dans la remarque précédente que ce sont toujours des équivalences faibles. On a le diagramme de pushout

$$\begin{array}{ccc} \emptyset & \longrightarrow & A \\ \downarrow & & \downarrow in_0 \\ A & \xrightarrow{in_1} & A \amalg A \end{array},$$

donc in_0 est une cofibration. Mais alors la composée

$$i_0 : A \xrightarrow{in_0} A \amalg A \hookrightarrow A \wedge I$$

Soit alors $H : A \wedge I \longrightarrow X$ une très bonne homotopie entre f et g . Choisissons un bon cylindre $A' \amalg A' \xrightarrow{j} A' \simeq A'$ pour A' . Par **MC4** on a le diagramme

$$\begin{array}{ccccc} A' \amalg A' & \xrightarrow{h \amalg h} & A \amalg A & \xrightarrow{i} & A \wedge I \\ \downarrow j & \nearrow k & & & \downarrow \sim \\ A' \wedge I & \xrightarrow{\sim} & A' & \xrightarrow{h} & A \end{array} .$$

La flèche Hk est l'homotopie recherchée.

□

□

2.2. Homotopies (à droite). Par passage à la catégorie opposée on obtient les notions duales :

DÉFINITION 2.2.1. Un objet chemin pour $X \in \mathcal{C}$ est un objet X^I de \mathcal{C} et un diagramme

$$X \simeq X^I \xrightarrow{p} X \times X$$

factorisant la diagonale de X . Il est dit bon si $X^I \longrightarrow X \times X$ est une fibration et très bon si de plus $X \xrightarrow{\sim} X^I$.

LEMME 2.2.2. Si X est fibrant et X^I est un bon objet chemin pour X alors les deux projections $p_0, p_1 : X^I \longrightarrow X$ sont des fibrations acycliques.

DÉFINITION 2.2.3. Deux flèches $f, g : A \longrightarrow X$ sont dites homotopes à droite (noté $f \overset{r}{\sim} g$) s'il existe un objet chemin X^I pour X et une homotopie à droite $H : A \longrightarrow X^I$ vérifiant

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{(f,g)} & X \times X \\ H \downarrow & \nearrow H & \\ X^I & & \end{array}$$

LEMME 2.2.4. Si $f \overset{r}{\sim} g : A \longrightarrow X$ il existe une bonne homotopie à droite de f à g .

LEMME 2.2.5. Si X est fibrant alors $\overset{r}{\sim}$ est une relation d'équivalence sur $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, X)$.

DÉFINITION 2.2.6. On note $\pi^r(A, X)$ l'ensemble des classes d'équivalences de $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, X)$ pour la relation d'équivalence engendrée par $\overset{r}{\sim}$.

LEMME 2.2.7. Si A est cofibrant alors la composition dans \mathcal{C} induit une composition

$$\pi^r(A, X) \times \pi^r(X, Y) \longrightarrow \pi^r(A, Y) .$$

2.3. Homotopies à droite et à gauche. Le lemme liant les homotopies à droite et à gauche est le

LEMME 2.3.1. Soit $f, g : A \longrightarrow X$ dans \mathcal{C} .

(1) Supposons $f \stackrel{l}{\sim} g$. Si A est cofibrant et X^I est un bon espace de chemin fixé pour X , alors il existe une homotopie à droite

$$\begin{array}{ccc} & & X^I \\ & \nearrow H & \downarrow p \\ A & \xrightarrow{f \times g} & X \times X \end{array} .$$

(2) Dualement supposons $f \stackrel{r}{\sim} g$. Si X est fibrant et si $A \wedge I$ est un bon cylindre fixé pour A , alors il existe une homotopie à gauche

$$\begin{array}{ccc} A \amalg A & \xrightarrow{f+g} & X \\ \downarrow i & \nearrow H & \\ A \wedge I & & \end{array} .$$

DÉMONSTRATION. Les affirmations (1) et (2) sont duales, il suffit donc de démontrer (2). Notons $h : A \rightarrow X^I$ une homotopie à droite reliant f à g , où X^I est un bon espace de chemin pour X . Comme X est fibrant, les projections $p_i : X^I \rightarrow X$, $i = 0, 1$, sont des fibrations acycliques. Notons

$$A \amalg A \xrightarrow{i_0+i_1} A \wedge I \rightarrow A$$

le bon cylindre fixé. On a le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc} A \amalg A & \xrightarrow{f \amalg id} & X \amalg A & \xrightarrow{q+h} & X^I \\ \downarrow i_0+i_1 & \nearrow K & & & \downarrow p_0 \sim \\ A \wedge I & \xrightarrow{\quad} & A & \xrightarrow{f} & X \end{array}$$

La composée $p_1 \circ K : A \wedge I \rightarrow X$ est une homotopie à gauche H reliant f à g .

□

COROLLAIRE 2.3.2. Soit $f, g : A \rightarrow X$ deux morphismes de \mathcal{C} . Supposons A cofibrant et X fibrant, et $A \amalg A \hookrightarrow A \wedge I \xrightarrow{\sim} A$ (respectivement $X \xrightarrow{\sim} X^I \rightarrow X \times X$) un bon cylindre pour A (respectivement un bon espace de chemin pour X). Alors les conditions suivantes sont équivalentes :

- (i) $f \stackrel{l}{\sim} g$.
- (ii) Il existe une homotopie à droite $h : A \rightarrow X^I$ reliant f à g .
- (iii) $f \stackrel{r}{\sim} g$.
- (iv) Il existe une homotopie à gauche $H : A \wedge I \rightarrow X$ reliant f à g .

Donc si A est cofibrant et X fibrant, toutes les notions d'homotopie sur $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, X)$ coïncident. On notera $f \sim g$ et $\pi(A, X)$ désignera l'ensemble des classes d'équivalences de $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, X)$ pour \sim .

2.4. Théorèmes de Whitehead et Whitehead dual dans les catégories de modèles.

THÉORÈME 2.4.1. Soit \mathcal{C} une catégorie de modèle et X et Y deux objets de \mathcal{C} à la fois fibrants et cofibrants.

- (a) (Whitehead) Si $f : X \rightarrow Y$ est une équivalence faible alors f est une équivalence d'homotopie.
- (b) (Whitehead inverse) Si $f : X \rightarrow Y$ est une équivalence d'homotopie alors f est une équivalence faible.

Exemples :

- (1) Dans la catégorie $\mathcal{C} = C_+(\mathcal{A})$ toute équivalence faible entre complexes de projectifs est une homotopie entre ces complexes.
- (2) Whitehead classique : dans $\mathcal{C} = \mathbf{Top}$ toute équivalence faible entre CW-complexes est une équivalence d'homotopie.

DÉMONSTRATION. *Pour (a) :* Remarquons d'abord qu'on peut supposer que f est une fibration acyclique : en effet toute équivalence faible se factorise en la composée d'une fibration acyclique et d'une cofibration acyclique, et le cas des cofibrations acycliques est dual du cas des fibrations acycliques.

Comme Y est cofibrant, on a le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \emptyset & \longrightarrow & X \\ \downarrow & \nearrow \phi & \downarrow f \\ Y & \xrightarrow{1_Y} & Y \end{array} .$$

Soit $X \amalg X \hookrightarrow X \wedge I \rightarrow X$ un bon objet cylindre pour X . Le diagramme

$$\begin{array}{ccc} X \amalg X & \xrightarrow{(\phi f, 1_X)} & X \\ \downarrow & \nearrow h & \downarrow f \\ X \wedge I & \xrightarrow{fj} & Y \end{array}$$

fournit une homotopie entre $\phi f : X \rightarrow X$ et 1_X .

Pour (b) : exercice (un peu pénible).

□

2.5. Remplacement cofibrant ou fibrant.

DÉFINITION 2.5.1. *Soit $X \in \mathcal{C}$. On appelle remplacement cofibrant de X une fibration acyclique $QX \xrightarrow{\sim} X$ avec QX cofibrant. Dualement on appelle remplacement fibrant de X une cofibration acyclique $X \xrightarrow{\sim} FX$ avec FX fibrant.*

Exemples : Dans la catégorie $\mathcal{C} = C_+(\mathcal{A})$, un remplacement cofibrant d'un objet A de \mathcal{A} est une résolution projective de A .

Bien-sûr remplacements fibrants et remplacements cofibrants existent pour tout objet de \mathcal{C} par **MC5**. En général on ne peut pas imposer que Q et F sont des endofoncteurs de \mathcal{C} .

Pour tout objet X de \mathcal{C} choisissons un triple

$$X \xleftarrow{\sim p_X} QX \xrightarrow{\sim j_X} RQX$$

où

- (i) QX est un remplacement cofibrant de X et RQX est un remplacement fibrant de QX . Remarquons que RQX est à la fois fibrant et cofibrant dans \mathcal{C} .

(2) Si X est cofibrant alors $QX = X$ et si QX est fibrant alors $RQX = QX$.

LEMME 2.5.2. Soit $f : X \rightarrow Y$ dans \mathcal{C} . Dans le diagramme

$$\begin{array}{ccccc} X & \xleftarrow[p_X]{\sim} & QX & \xrightarrow[j_X]{\sim} & RQX \\ \downarrow f & & \downarrow f_1 & & \downarrow f_2 \\ Y & \xleftarrow[p_Y]{\sim} & QY & \xrightarrow[j_Y]{\sim} & RQY \end{array}$$

la flèche f_2 est uniquement déterminée à homotopie près. Si de plus f est une équivalence faible, f_2 aussi.

DÉMONSTRATION. Commençons par remarquer que la flèche f_1 s'obtient à partir du diagramme

$$\begin{array}{ccc} \emptyset & \longrightarrow & QY \\ \downarrow & \nearrow f_1 & \downarrow p_Y \\ QX & \xrightarrow{f \circ p_X} & Y \end{array} .$$

En particulier si f est une équivalence faible, $f \circ p_X$ aussi et donc f_1 aussi. De même la flèche f_2 s'obtient à partir de

$$\begin{array}{ccc} QX & \xrightarrow{j_Y \circ f_1} & RQY \\ \downarrow j_X \sim & \nearrow f_2 & \downarrow \\ RQX & \longrightarrow & \{*\} \end{array} .$$

En particulier si f_1 est une équivalence faible, $j_Y \circ f_1$ aussi et donc f_2 aussi. Finalement si f est une équivalence faible, tout choix f_2 également.

Supposons qu'on remplace f_1, f_2 par f'_1, f'_2 respectivement. Montrons que f_1 et f'_1 sont homotopes à gauche, puis que f_2 et f'_2 sont homotopes. Considérons le diagramme (pour tout choix d'un bon cylindre $QX \wedge I$ de QX) :

$$\begin{array}{ccc} QX \amalg QX & \xrightarrow{(f_1, f'_1)} & QY \\ \downarrow i & \nearrow & \downarrow p_Y \\ QX \wedge I & \longrightarrow & QX \xrightarrow{f \circ p_X} Y \end{array} .$$

Donc f_1 et f'_1 sont homotopes à gauche. Les flèches $j_Y \circ f_1, j_Y \circ f'_1 : QX \rightarrow RQY$ sont donc homotopes à gauche, donc à droite car QX est cofibrant et RQY est fibrant. Il existe ainsi une bonne homotopie à droite

$$\begin{array}{ccc} & & RQY^I \\ & \nearrow h & \downarrow p \\ QX & \longrightarrow & RQY \times RQY \end{array} .$$

$(j_Y \circ f_1, j_Y \circ f'_1)$

On obtient le diagramme

$$\begin{array}{ccc} QX & \xrightarrow{h} & RQY^I \\ \downarrow \sim j_X & \nearrow H & \downarrow p \\ RQX & \longrightarrow & RQY \times RQY \end{array} .$$

(f_2, f'_2)

Ce qui démontre que f_2 et f'_2 sont homotopes à droite, donc homotopes.

□

2.6. Catégorie homotopique.

DÉFINITION 2.6.1. (1) On note $\pi(\mathcal{C}_{cf})$ la catégorie dont les objets sont les objets de \mathcal{C} à la fois cofibrants et fibrants, et les morphismes les classes d'homotopie d'applications. Il découle du lemme précédent que le foncteur $RQ : \mathcal{C} \rightarrow \pi(\mathcal{C}_{cf})$ défini par $RQ(X) = RQX$ et $RQ(f) = [f_2]$ est bien défini.

(2) On définit la catégorie homotopique $\mathbf{Ho}(\mathcal{C})$ de la catégorie de modèle \mathcal{C} comme la catégorie ayant les mêmes objets que \mathcal{C} , et $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Ho}(\mathcal{C})}(X, Y) = \mathrm{Hom}_{\pi(\mathcal{C}_{cf})}(RQX, RQY)$. On définit un foncteur $p : \mathcal{C} \rightarrow \mathbf{Ho}(\mathcal{C})$ par $p(X) = X$, $p(f) = RQ(f)$. Ce foncteur envoie équivalence faible sur isomorphismes (d'après le lemme précédent et le théorème de Whitehead).

THÉORÈME 2.6.2. Soit \mathcal{C} une catégorie de modèle.

(a) Le foncteur $p : \mathcal{C} \rightarrow \mathbf{Ho}(\mathcal{C})$ est un modèle petit pour la localisation de \mathcal{C} par rapport à W : pour tout foncteur $G : \mathcal{C} \rightarrow D$ envoyant les équivalences faibles sur des isomorphismes, il existe un unique foncteur $\tilde{G} : \mathbf{Ho}(\mathcal{C}) \rightarrow D$ rendant commutatif le diagramme :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C} & \xrightarrow{p} & \mathbf{Ho}(\mathcal{C}) \\ & \searrow G & \downarrow \tilde{G} \\ & & D \end{array} .$$

(b) Le foncteur $p : \mathcal{C} \rightarrow \mathbf{Ho}(\mathcal{C})$ induit une équivalence de catégorie $\bar{p} : \pi(\mathcal{C}_{cf}) \rightarrow \mathbf{Ho}(\mathcal{C})$.

(c) Le foncteur p détecte les équivalences faibles : si $f : X \rightarrow Y$ dans \mathcal{C} est tel que $p(f)$ est un isomorphisme dans $\mathbf{Ho}(\mathcal{C})$ alors f est une équivalence faible dans \mathcal{C} .

Exemples :

- La catégorie homotopique de **Top** (espaces compactement engendrés) est équivalente à la catégorie des CW -complexes avec les classes d'homotopies usuelles d'applications continues.
- La catégorie dérivée de $C_+(\mathcal{A})$ est équivalente à la catégorie des complexes de projectifs avec morphismes les classes d'homotopie de morphismes de complexes.

DÉMONSTRATION. Pour (a) : Comme les objets de $\mathbf{Ho}(\mathcal{C})$ sont les mêmes que ceux de \mathcal{C} , la définition de \tilde{G} sur les objets est évidente. Pour définir \tilde{G} sur les morphismes, notons tout d'abord le

LEMME 2.6.3. Sous les hypothèses du théorème, si $f \stackrel{\mathcal{L}}{\sim} g : A \rightarrow X$ ou $f \stackrel{L}{\sim} g : A \rightarrow X$ alors $G(f) = G(g)$.

DÉMONSTRATION. Supposons $f \stackrel{L}{\sim} g : A \rightarrow X$ et soit $H : A \wedge I \rightarrow X$ une homotopie à gauche reliant f et g à travers un bon cylindre

$$A \amalg A \xrightarrow{C^{i_0+i_1}} A \wedge I \xrightarrow{w} A .$$

Comme $w i_0 = w i_1 = 1_A$, on obtient $G(w)G(i_0) = G(w)G(i_1)$. Comme $w \in W$, $G(w)$ est un isomorphisme et on en déduit $G(i_0) = G(i_1)$. Comme $H i_0 = f$ et $H i_1 = g$ on en déduit $G(f) = G(H)G(i_0) = G(H)G(i_1) = G(g)$. L'autre cas est dual de celui-ci.

□

Soit alors $\phi \in \text{Hom}_{\mathbf{Ho}(\mathcal{C})}(X, Y) = \text{Hom}_{\pi(\mathcal{C}_{cf})}(RQX, RQY)$ représenté par une flèche $f_2 : RQX \rightarrow RQY$, unique à homotopie près. D'après le lemme précédent $G(f_2) : G(RQX) \rightarrow G(RQY)$ ne dépend que de ϕ . Le diagramme

$$\begin{array}{ccc} X & \xleftarrow[\sim]{p_X} QX & \xrightarrow[\sim]{j_X} RQX \\ & & \downarrow f_2 \\ Y & \xleftarrow[\sim]{p_Y} QY & \xrightarrow[\sim]{j_Y} RQY \end{array}$$

permet de définir $\tilde{G}(\phi) = G(p_Y)G(j_Y)^{-1}G(f_2)G(j_X)G(p_X)^{-1}$ ne dépendant que de ϕ . On vérifie facilement que \tilde{G} est un foncteur, relevant G .

Pour (b) : Le foncteur \bar{p} est clairement pleinement fidèle et essentiellement surjectif, donc une équivalence de catégorie.

Pour (c) : Supposons $p(f)$ un isomorphisme dans $\mathbf{Ho}(\mathcal{C})$. Donc $f_2 : RQX \rightarrow RQY$ a un inverse à homotopie près. On conclut d'après Whitehead dual. □

3. Foncteurs dérivés

Le problème est le suivant : étant donné un diagramme

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C} & \xrightarrow{p} & \mathbf{Ho}(\mathcal{C}) \\ & \searrow F & \\ & & D \end{array}$$

où \mathcal{C} désigne une catégorie de modèle et D une catégorie quelconque, comment étendre le mieux possible le foncteur F à un foncteur défini sur la catégorie homotopique $\mathbf{Ho}(\mathcal{C})$? En général F n'envoie pas équivalence faible de \mathcal{C} sur isomorphisme de D et ne factorise donc pas naturellement via $\mathbf{Ho}(\mathcal{C})$.

DÉFINITION 3.0.4. *Soit \mathcal{C} une catégorie de modèle et $F : \mathcal{C} \rightarrow D$ un foncteur.*

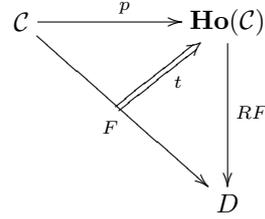
(a) *Un foncteur dérivé à gauche pour F est une paire $(LF : \mathbf{Ho}(\mathcal{C}) \rightarrow D, t : LF \circ p \rightarrow F)$*

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C} & \xrightarrow{p} & \mathbf{Ho}(\mathcal{C}) \\ & \searrow F & \downarrow LF \\ & & D \end{array} \quad \begin{array}{c} \nearrow t \\ \nearrow t \end{array}$$

universelle « depuis la gauche » : pour toute autre telle paire (G, s) il existe une unique transformation naturelle $s' : G \rightarrow LF$ vérifiant

$$\begin{array}{ccc} G \circ p & \xrightarrow{s' \circ p} & LF \circ p \xrightarrow{t} F \\ & \searrow s & \nearrow \end{array} .$$

(b) *Dualement un foncteur dérivé à droite pour F est une paire (RF, t)*



universelle « depuis la droite » : pour toute autre paire (G, s) il existe une unique transformation naturelle de foncteurs $s' : RF \rightarrow G$ vérifiant

$$\begin{array}{ccc}
 F & \xrightarrow{t} & RF \circ p \xrightarrow{s' \circ p} G \circ p \\
 & \searrow s & \nearrow
 \end{array}$$

- REMARQUES 3.0.5. (1) Par universalité un foncteur dérivé à gauche LF pour F , s'il existe, est unique à unique transformation naturelle près. De même pour un foncteur dérivé à droite.
 (2) Si F envoie équivalences faibles de \mathcal{C} sur isomorphismes de D , la factorisation $F' : \mathbf{Ho}(\mathcal{C}) \rightarrow D$ induite est un foncteur dérivé à gauche (et à droite) pour F .

Généralisons cette dernière remarque pour donner un critère d'existence de LF .

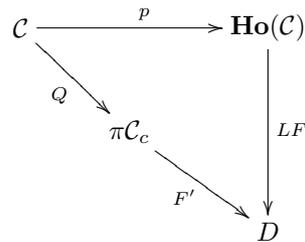
DÉFINITION 3.0.6. *On notera \mathcal{C}_c (resp. \mathcal{C}_f) la sous-catégorie pleine de \mathcal{C} engendrée par les objets cofibrants (resp. fibrants); et $\pi\mathcal{C}_c$ (resp. $\pi\mathcal{C}_f$) la catégorie formée des objets cofibrants (resp. fibrants) de \mathcal{C} et ayant comme morphismes $\text{Hom}_{\pi\mathcal{C}_c}(A, B) = \pi^r(A, B)$ (resp. $\pi^l(A, B)$), c.f. définitions 2.1.8 et 2.2.6.*

Supposons que $F : \mathcal{C} \rightarrow D$ envoie $W \cap \mathcal{C}_c$ sur $Iso(D)$. En particulier F vérifie les hypothèses du

LEMME 3.0.7. *Soit $F : \mathcal{C}_c \rightarrow D$ un foncteur envoyant les $\xrightarrow{\sim}$ entre objets de \mathcal{C}_c sur des isomorphismes de D . Si $f \xrightarrow{\sim} g : A \rightarrow B$ avec $A, B \in \mathcal{C}_c$, alors $F(f) = F(g)$.*

DÉMONSTRATION. Soit $H : A \rightarrow B^I$ une très bonne homotopie à droite reliant f à g . L'objet B est cofibrant et $w : B \xrightarrow{\sim} B^I$ donc B^I est cofibrant. Par hypothèse sur F , comme w est une cofibration acyclique entre objets cofibrants la flèche $F(w)$ est un isomorphisme. Comme $F(p_0)F(w) = F(p_1)F(w) (= F(1_B))$, on en déduit $F(p_0) = F(p_1)$. Comme $f = p_0 \circ H$ et $g = p_1 \circ H$, on en déduit $F(f) = F(g)$. □

Le foncteur F induit donc un foncteur $F' : \pi\mathcal{C}_c \rightarrow D$. Par hypothèse sur F , le foncteur composé $\mathcal{C} \xrightarrow{Q} \pi\mathcal{C}_c \xrightarrow{F'} D$ envoie alors W sur $Iso(D)$. Par la propriété universelle de $\mathbf{Ho}(\mathcal{C}) \simeq \mathcal{C}[W^{-1}]$, il factorise donc en un foncteur $LF : \mathbf{Ho}(\mathcal{C}) \rightarrow D$:



Définissons alors la transformation naturelle $t : LF \circ p \longrightarrow F$ par

$$t_X = F(p_X) : LF(X) = F(QX) \longrightarrow F(X) .$$

Si X est cofibrant alors $QX = X$ et $t_X = 1_{F(X)}$.

THÉORÈME 3.0.8 (Critère d'existence de LF et RF). (a) Si $F : \mathcal{C} \longrightarrow D$ vérifie $F(W \cap \mathcal{C}_c) \subset Iso(D)$ alors la paire (FQ', t) est le foncteur dérivé à gauche LF de F . En particulier pour tout objet cofibrant X de \mathcal{C} la flèche $t_X : LF(X) \longrightarrow F(X)$ est un isomorphisme.

(b) Dualement si $F : \mathcal{C} \longrightarrow D$ vérifie $F(W \cap \mathcal{C}_f) \subset Iso(D)$ alors la paire (FR', t) est le foncteur dérivé à droite RF de F . En particulier pour tout objet fibrant X de \mathcal{C} la flèche $t_X : F(X) \longrightarrow LF(X)$ est un isomorphisme.

DÉMONSTRATION. Par dualité il suffit de prouver (a), c'est-à-dire l'universalité de (LF, t) . Soit

$$(G : \mathbf{Ho}(\mathcal{C}) \longrightarrow D, s : G \circ p \longrightarrow F)$$

une autre paire. La transformation naturelle $s' : G \longrightarrow LF$, si elle existe, doit vérifier le diagramme

$$\begin{array}{ccccc} & & s_{QX} & & \\ & \nearrow & & \searrow & \\ G(QX) & \xrightarrow{s'_{QX}} & LF(QX) & \xrightarrow{t_{QX}} & F(QX) \\ \downarrow G \circ p(p_X) \sim & & \downarrow LF \circ p(p_X) & & \downarrow F(p_X) \\ G(X) & \xrightarrow{s'_X} & LF(X) & \xrightarrow{t_X} & F(X) \\ & \searrow & & \nearrow & \\ & & s_X & & \end{array} .$$

Comme QX est cofibrant $t_{QX} = 1_{F(QX)}$ et $LF \circ p(p_X) = 1_{F(QX)}$. On en déduit que nécessairement

$$s'_X = s_{QX} \circ (G \circ p(p_X))^{-1} .$$

Donc il existe au plus une transformation naturelle $s' : G \longrightarrow LF$. Réciproquement, si on pose $s'_X = s_{QX} \circ (G \circ p(p_X))^{-1}$ on définit évidemment une transformation naturelle $G \circ p \longrightarrow LF \circ p$. Remarquons le

LEMME 3.0.9. Soit $F, G : \mathbf{Ho}(\mathcal{C}) \longrightarrow D$ et $t : F \circ p \longrightarrow G \circ p$ une transformation naturelle. Alors t définit une transformation naturelle $t : F \longrightarrow G$.

DÉMONSTRATION. Il faut vérifier que pour tout morphisme $h : X \longrightarrow Y$ de $\mathbf{Ho}(\mathcal{C})$, le diagramme

$$D(h) : \begin{array}{ccc} F(X) & \xrightarrow{F(h)} & F(Y) \\ t_X \downarrow & & \downarrow t_Y \\ G(X) & \xrightarrow{G(h)} & G(Y) \end{array}$$

commute, où ce diagramme commute si $h = p(f)$ ou bien $h = p(g)^{-1}$, avec $f \in \mathcal{C}$, $g \in W$. Mais tout homomorphisme de $\mathbf{Ho}(\mathcal{C})$ est composé de telles applications : on se ramène de X à $RQ(X)$ par des équivalences faibles et la flèche $p : \text{Hom}_{\mathcal{C}}(RQX, RQY) \longrightarrow \text{Hom}_{\mathbf{Ho}(\mathcal{C})}(RQX, RQY)$ est surjective. Comme $D(h_1 h_2)$ commute évidemment si $D(h_1)$ et $D(h_2)$ commutent, on conclut. \square

Finalement s' définit une transformation naturelle $s' : G \rightarrow LF$. Ce qui achève la preuve du théorème 3.0.8.

□

3.1. Foncteur dérivé total.

DÉFINITION 3.1.1. Soit $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ un foncteur entre catégories de modèles. Ce foncteur induit donc un foncteur $p_D \circ F : \mathcal{C} \rightarrow \mathbf{Ho}(\mathcal{D})$. Un foncteur dérivé total à gauche (resp. à droite) de F est un foncteur dérivé à gauche (resp. à droite)

$$\mathbf{L}F : \mathbf{Ho}(\mathcal{C}) \rightarrow \mathbf{Ho}(\mathcal{D})$$

pour $p_D \circ F$.

REMARQUE 3.1.2. Comme d'habitude, les foncteurs dérivés totaux, s'ils existent, sont uniques à unique transformation naturelle près.

Exemple : Soit R un anneau et $\mathcal{A} = R\text{-mod}$ la catégorie abélienne des R -modules. Fixons $M \in \mathcal{A}^{op}$. On obtient un foncteur $F = M \otimes \cdot : C_+(\mathcal{A}) \rightarrow C_+(\mathbb{Z})$. On peut utiliser le théorème précédent pour montrer qu'un foncteur dérivé total à gauche $\mathbf{L}F$ existe (voir plus loin). Soit $N \in \mathcal{A}$ et notons $K(N, 0)$ le complexe de $C_+(\mathcal{A})$ égal à N concentré en 0. La construction de $\mathbf{L}F$ implique que $\mathbf{L}F(K(N, 0))$ n'est rien d'autre que $F(P_\bullet)$, où P_\bullet est une résolution projective de N . Ainsi

$$H_i \mathbf{L}F(K(n, 0)) \simeq \text{Tor}_i^A(M, N), i \geq 0 .$$

3.2. Equivalences de Quillen. Dans cette section on considère une adjonction entre deux catégories de modèles. Dans quelle condition les foncteurs dérivés totaux existent-ils? Forment-ils alors une paire adjointe? Quand cette paire adjointe est-elle une équivalence entre les catégories homotopiques?

DÉFINITION 3.2.1. Soit \mathcal{C}, \mathcal{D} deux catégories de modèles et

$$F : \mathcal{C} \rightleftarrows \mathcal{D} : G$$

une paire de foncteurs adjoints.

(1) Cette paire est dite de Quillen si l'une des conditions équivalentes suivantes est satisfaite :

- (a) $F(\text{Cof}_{\mathcal{C}}) \subset \text{Cof}_{\mathcal{D}}$ et $G(\text{Fib}_{\mathcal{D}}) \subset \text{Fib}_{\mathcal{C}}$.
- (b) $F(\text{Cof}_{\mathcal{C}}) \subset \text{Cof}_{\mathcal{D}}$ et $F(\text{Cof}_{\mathcal{C}} \cap W_{\mathcal{C}}) \subset \text{Cof}_{\mathcal{D}} \cap W_{\mathcal{D}}$.
- (c) $G(\text{Fib}_{\mathcal{D}}) \subset \text{Fib}_{\mathcal{C}}$ et $G(\text{Fib}_{\mathcal{D}} \cap W_{\mathcal{D}}) \subset \text{Fib}_{\mathcal{C}} \cap W_{\mathcal{C}}$.

(2) Cette paire est une équivalence de Quillen si de plus, pour $X \in \mathcal{C}_c, Y \in \mathcal{D}_f$,

$$f : X \rightarrow G(Y) \in W_{\mathcal{C}} \iff f^b : F(X) \rightarrow Y \in W_{\mathcal{D}} .$$

DÉMONSTRATION. Montrons l'équivalence des trois conditions (a), (b), (c). Supposons par exemple que G préserve les fibrations. Montrons alors que G préserve les fibrations acycliques si et seulement si F préserve les cofibrations. Soit $f : A \rightarrow B \in \text{Cof}_{\mathcal{C}}$ et $g : X \rightarrow Y \in \text{Fib}_{\mathcal{D}} \cap W_{\mathcal{D}}$. On a les deux diagrammes adjoints :

$$\begin{array}{ccc}
F(A) & \longrightarrow & X \\
\downarrow F(f) & \nearrow & \downarrow g \\
F(B) & \longrightarrow & Y
\end{array}
\quad
\begin{array}{ccc}
A & \longrightarrow & G(X) \\
\downarrow f & \nearrow & \downarrow G(g) \\
B & \longrightarrow & G(Y)
\end{array}
.$$

Si F préserve les cofibrations, le diagramme de gauche admet un relèvement, donc celui de droite aussi, donc $G(g)$ est une fibration acyclique. Réciproquement si G préserve les fibrations acycliques le diagramme de droite admet un relèvement, donc celui de gauche aussi et $F(f)$ est une cofibration.

□

THÉORÈME 3.2.2. *Soit \mathcal{C} , \mathcal{D} deux catégories de modèles et*

$$F : \mathcal{C} \rightleftarrows \mathcal{D} : G$$

une paire de foncteurs adjoints.

(1) *Si cette paire est une paire de Quillen alors les foncteurs dérivés totaux :*

$$\mathbf{L}F : \mathcal{C} \rightleftarrows \mathcal{D} : \mathbf{R}G$$

existent et forment une paire adjointe.

(2) *Si cette paire est une équivalence de Quillen alors $\mathbf{L}F$ et $\mathbf{R}G$ sont des équivalences de catégories inverses l'une de l'autre.*

Le critère (b) est extrêmement utile pour montrer que différentes catégories de modèles donnent naissance à la même catégorie homotopique.

DÉMONSTRATION. *Pour (1) :* Par hypothèse le foncteur F préserve cofibrations et cofibrations acycliques. En particulier il vérifie le

LEMME 3.2.3 (Brown). *Soit $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ un foncteur entre catégories de modèles. Si F envoie cofibrations acycliques entre objets cofibrants de \mathcal{C} dans $W_{\mathcal{D}}$, alors F envoie toutes les équivalences faibles entre objets cofibrants dans $W_{\mathcal{D}}$.*

DÉMONSTRATION. Soit $f : A \rightarrow B \in W_{\mathcal{C}} \cap \mathcal{C}_c$. Par **MC5** factorisons

$$f + 1_B : A \amalg B \xrightarrow{q} C \xrightarrow[p]{\sim} B .$$

Comme A et B sont cofibrants, on en déduit facilement que

$$q|_A : A \hookrightarrow C \quad \text{et} \quad q|_B : B \hookrightarrow C .$$

Comme la composée pq en restriction à chacun des facteurs A et B est une équivalence faible, et $p \in W$, on déduit de **MC2** que $q|_A$ et $q|_B$ sont des équivalences faibles. Par hypothèse sur F , F envoie les cofibrations acycliques $q|_A$, $q|_B$ et $pq|_B = 1_B$ entre objets cofibrants de \mathcal{C} dans $W_{\mathcal{D}}$. Par **MC2**, $F(p) \in W_{\mathcal{D}}$ puis $F(f) = F(pq|_A) \in W_{\mathcal{D}}$.

□

Continuons la preuve du théorème 3.2.2. D'après le lemme 3.2.3, le foncteur $p \circ F : \mathcal{C} \rightarrow \mathbf{Ho}(\mathcal{D})$ envoie équivalences faibles entre objets cofibrants de \mathcal{C} sur des isomorphismes de \mathcal{D} . Donc par le théorème 3.0.8, le foncteur dérivé total $\mathbf{L}F : \mathbf{Ho}(\mathcal{C}) \rightarrow \mathbf{Ho}(\mathcal{D})$ existe. Dualelement, $\mathbf{R}G : \mathbf{Ho}(\mathcal{D}) \rightarrow \mathbf{Ho}(\mathcal{C})$ existe.

Comme F est adjoint à gauche, il préserve les colimites donc les objets initiaux. Comme F préserve aussi les cofibrations, F préserve les objets cofibrants. Dualelement G préserve les objets fibrants.

Pour conclure à l'adjonction de $\mathbf{L}F$ et $\mathbf{R}G$, il suffit de montrer que si $A \in \mathcal{C}_c$, $X \in \mathcal{D}_f$, alors l'adjonction

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, G(X)) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F(A), X)$$

préserve la relation d'homotopie et donne ainsi une bijection

$$\pi(A, G(X)) \simeq \pi(F(A), X) .$$

Supposons donc que $f, g : F(A) \rightarrow X$ sont homotopes, donc homotopes à droite. Il existe alors une homotopie à droite $H : F(A) \rightarrow X^I$ via un bon objet chemin X^I reliant f à g . Comme X^I est bon et X est fibrant, X^I est fibrant. Comme G préserve les fibrations et les fibrations acycliques, on déduit du lemme de Brown que $G(X^I)$ est un objet chemin pour $G(X)$. Mais alors $H^b : A \rightarrow G(X^I)$ est une homotopie à droite entre f^b et g^b .

Pour (2) : laissé en exercice. □

4. Catégories de modèles et algèbre homologique

DÉFINITION 4.0.4. Soit R un anneau associatif, on notera $C(R\text{-mod})$ la catégorie abélienne des complexes de chaînes (non borné) de R -modules (à gauche) et $C_+(R\text{-mod})$ sa sous-catégorie pleine des complexes C_\bullet avec $C_n = 0$ pour $n < 0$.

Dans cette section, nous munissons $C(R\text{-mod})$ et $C_+(R\text{-mod})$ d'une structure de catégorie de modèle. La construction se généralise aisément à $C_+(A)$, où A désigne une catégorie abélienne munie de suffisamment de projectifs. Dans le cas de $C_+(R\text{-mod})$, le formalisme des catégories de modèles n'ajoute rien au formalisme de l'algèbre homologique classique, si ce n'est un peu de clarté conceptuelle. En particulier la catégorie homotopique $\mathbf{Ho}(C_+(R\text{-mod}))$ s'identifie canoniquement à la catégorie dérivée $D_+(R)$. Dans le cas de $C(R\text{-mod})$ par contre, on retrouve de façon élégante et rapide des résultats que l'algèbre homologique classique a eu bien du mal à développer (c.f. [10]).

4.1. Structure de catégorie de modèle sur $C(R\text{-mod})$. Dans cette section nous définissons une structure de catégorie de modèle sur $C(R\text{-mod})$ qui privilégie les fibrations, les cofibrations étant mal comprises. Nous verrons ultérieurement qu'il existe une structure de modèle privilégiant à l'inverse la compréhension des cofibrations.

DÉFINITION 4.1.1. On dira que $f : C_\bullet \rightarrow D_\bullet \in C(R\text{-mod})$ est une

- équivalence faible si c'est un quasi-isomorphisme.
- fibration si $f : C_n \rightarrow D_n$ est surjectif pour $n \in \mathbb{Z}$.
- cofibration si f possède la LLP relativement à toutes les fibrations acycliques.

THÉORÈME 4.1.2. La catégorie $C(R\text{-mod})$ est ainsi munie d'une structure de catégorie de modèle.

DÉFINITION 4.1.3. Soit $M \in R\text{-mod}$ et $n \in \mathbb{Z}$. On définit

- $K(M, n)$ le complexe de chaîne égal à M concentré en degré n (c'est l'analogie du $K(\pi, n)$ topologique). Dans le cas $M = R$, on notera encore S^n (« la n -sphère ») le complexe $K(R, n)$: remarquer que dans la catégorie abélienne $C(R\text{-mod})$ il n'y a pas de différence entre homologie et homotopie, l'espace de Moore $M(R, n) = S^n$ et l'espace d'Eilenberg-MacLane $K(R, n)$ coïncident. Remarquons aussi que

$$\text{Hom}_{C(R\text{-mod})}(K(R, n), C_\bullet) = Z_n(C_\bullet) .$$

- $\mathbf{D}^n(M)$ le « n -disque » associé à M : c'est le complexe dont l'unique flèche non nulle est $M_{(n)} \xrightarrow{\text{Id}} M_{(n-1)}$. On notera simplement $D^n = \mathbf{D}^n(R)$. On dispose d'une flèche canonique $S^n \rightarrow D^{n+1}$.

PREUVE DU THÉORÈME 4.1.2 :

Les axiomes **MC1**, **MC2** et **MC3** sont triviaux. Pour montrer **MC4** et **MC5** commençons par certains rappels.

LEMME 4.1.4. Une flèche $p : X_\bullet \rightarrow Y_\bullet$ est une fibration si et seulement si p a la propriété de relèvement à droite relativement à toutes les flèches $0 \rightarrow D^n$.

DÉMONSTRATION. C'est une conséquence immédiate du

LEMME 4.1.5. Pour tout entier $n \in \mathbb{Z}$, la paire

$$D^n : R\text{-mod} \rightleftarrows C(R\text{-mod}) : i_n ,$$

où i_n associe à un complexe C_\bullet le R -module C_n , est une adjonction :

$$\text{Hom}_{C(R\text{-mod})}(D^n(M), C_\bullet) \simeq \text{Hom}_{R\text{-mod}}(M, C_n) .$$

DÉMONSTRATION. Evident par inspection. □

COROLLAIRE 4.1.6. Pour tout entier $n \in \mathbb{Z}$, D^n est cofibrant.

LEMME 4.1.7. Pour tout entier $n \in \mathbb{Z}$, S^n est cofibrant.

DÉMONSTRATION. Cela revient à dire que toute fibration acyclique $p : X_\bullet \rightarrow Y_\bullet$ induit un épimorphisme $Z_n(A) \rightarrow Z_n(B)$. Comme p est un quasi-isomorphisme, pour tout cycle $y \in Z_n(Y)$, il existe un cycle $x \in Z_n(X)$ et une chaîne $w \in Y_{n+1}$ avec

$$p(x) = y + \partial w .$$

Comme $p : X_{n+1} \rightarrow Y_{n+1}$, il existe $v \in X_{n+1}$ avec $p(v) = w$. Donc $y = p(x - \partial v)$. □

LEMME 4.1.8 (fibration acycliques). Une flèche $p : X_\bullet \rightarrow Y_\bullet$ est une fibration acyclique si et seulement si p a la RLP relativement à toutes les flèches canoniques $S^n \rightarrow D^{n+1}$.

COROLLAIRE 4.1.9. La flèche $S^n \rightarrow D^{n+1}$ est une cofibration.

PREUVE DU LEMME 4.1.8 : Supposons que $p : X_{\bullet} \rightarrow Y_{\bullet}$ est une fibration acyclique. Soit un diagramme

$$\begin{array}{ccc} S^n & \xrightarrow{x} & X_{\bullet} \\ \downarrow & \nearrow & \downarrow p \\ D^{n+1} & \xrightarrow{y} & Y_{\bullet} \end{array} .$$

L'existence d'un relèvement revient à dire que pour tout cycle $x \in Z_n(X_{\bullet})$ et tout $y \in Y_{n+1}$ avec $\partial y = p(x)$ il existe une chaîne $\tilde{y} \in X_{n+1}$ avec $\partial(\tilde{y}) = x$. Comme $p : X_{n+1} \rightarrow Y_{n+1}$, choisissons $z \in X_{n+1}$ avec $p(z) = y$. Alors $p(x - \partial z) = 0$ donc

$$x - \partial z \in K_{\bullet} = \ker p .$$

Comme x est un cycle de X_{\bullet} , $x - \partial z$ est un cycle de K_{\bullet} . Comme p est un quasi-isomorphisme le complexe K_{\bullet} est acyclique. Il existe donc $v \in K_{n+1}$ avec $\partial v = x - \partial z$. Finalement $\tilde{y} = z + v$ convient.

Réciproquement, supposons que $p : X_0 \rightarrow Y_0$ et que p a la RLP relativement aux flèches $S^n \rightarrow D^{n+1}$. Le diagramme

$$\begin{array}{ccc} S^n & \xrightarrow{0} & X_{\bullet} \\ \downarrow & \nearrow & \downarrow p \\ D^{n+1} & \xrightarrow{y} & Y_{\bullet} \end{array}$$

montre que $p : Z_n(X_{\bullet}) \rightarrow Z_n(Y_{\bullet})$. Le diagramme

$$\begin{array}{ccc} S^n & \xrightarrow{x} & X_{\bullet} \\ \downarrow & \nearrow & \downarrow p \\ D^{n+1} & \xrightarrow{y} & Y_{\bullet} \end{array}$$

montre que p induit un monomorphisme en homologie. On en déduit que p est un quasi-isomorphisme.

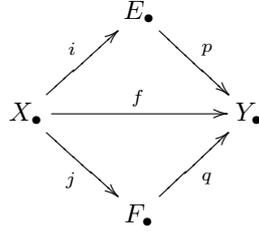
Reste à montrer que p est surjective en tout degré. Considérons le diagramme

$$\begin{array}{ccccc} Z_{n+1}(X_{\bullet}) & \longrightarrow & X_{n+1} & \xrightarrow{\partial} & Z_n(X_{\bullet}) \\ p \downarrow & & p \downarrow & & p \downarrow \\ Z_{n+1}(Y_{\bullet}) & \longrightarrow & Y_{n+1} & \xrightarrow{\partial} & Z_n(Y_{\bullet}) \end{array} .$$

Soit alors $y \in Y_{n+1}$. Comme p est surjective sur les cycles, il existe $v \in Z_n(X_{\bullet})$ avec $\partial y = p(v)$. Comme $[\partial y] = 0$ dans $H_n(Y_{\bullet})$ et p est injectif en homologie, on en déduit que $[v] = 0 \in H_n(X_{\bullet})$. Donc $v = \partial w$ pour un $w \in X_{n+1}$. Mais alors $\partial(y - p(w)) = 0$ donc il existe $z \in Z_{n+1}(X_{\bullet})$ avec $p(z) = y - p(w)$. Finalement $y = p(x - w)$ et p est une fibration. □

Montrons **MC5**. C'est un corollaire de la proposition plus précise :

PROPOSITION 4.1.10. *Tout morphisme $f : X_{\bullet} \rightarrow Y_{\bullet}$ a deux factorisations*



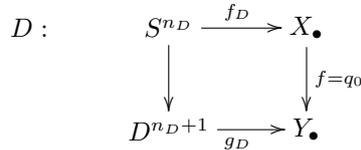
où

- (1) p est une fibration ; i est un monomorphisme, une équivalence faible, et i possède la LLP relativement aux fibrations.
- (2) q est une fibration acyclique ; j est un monomorphisme et une cofibration.

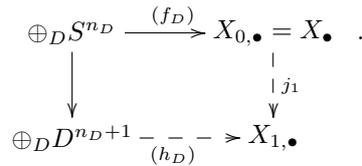
DÉMONSTRATION. *Pour (1) :* On pose $E_{\bullet} = X_{\bullet} \oplus (\oplus_{x \in Y^n, n \in \mathbb{Z}} D^n)$. L'application $i : X_{\bullet} \rightarrow E_{\bullet}$ est l'injection évidente. C'est bien-sûr une équivalence faible. C'est une somme directe de flèches ayant la LLP par rapport aux fibrations, donc i possède aussi cette propriété.

L'application p est l'application caractéristique. En particulier elle est surjective en tout degré, donc une fibration.

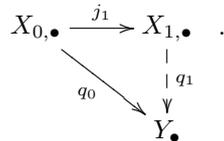
Pour (2) : L'application $q : F_{\bullet} \rightarrow Y_{\bullet}$ est une fibration acyclique si et seulement si elle a la RLP relativement aux $S^n \rightarrow D^{n+1}$, $n \in \mathbb{Z}$. On construit F comme colimite de $X_{i,\bullet}$. Considérons tous les diagrammes



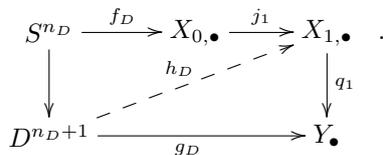
et formons le pushout



Clairement j_1 est un monomorphisme et une cofibration (ces collections de flèches sont fermées par \oplus et pushout). Les flèches (g_d) induisent un diagramme commutatif



Remarquons que tout problème de relèvement d'un diagramme D est résolu dans $X_{1,\bullet}$:



En répétant inductivement on obtient

$$\begin{array}{ccccccc}
 X_{0,\bullet} & \xrightarrow{j_1} & X_{1,\bullet} & \xrightarrow{j_2} & X_{2,\bullet} & \xrightarrow{j_3} & \cdots \\
 \downarrow q_0 & & \nearrow q_1 & & \nearrow q_2 & & \\
 & & Y_\bullet & & & &
 \end{array}$$

Posons $F_\bullet = \text{colim} X_{i,\bullet}$, on obtient une factorisation

$$\begin{array}{ccc}
 X_\bullet & \xrightarrow{j} & F_\bullet \\
 & \searrow f & \downarrow q \\
 & & Y_\bullet
 \end{array}$$

La flèche j est une cofibration et un monomorphisme, car les j_k le sont, et les monomorphismes et Cof sont fermés par composition infinie.

Montrons finalement que tout diagramme

$$\begin{array}{ccc}
 S^n & \xrightarrow{f} & F_\bullet \\
 \downarrow & & \downarrow q \\
 D^{n+1} & \xrightarrow{g} & Y_\bullet
 \end{array}$$

admet un relèvement. Comme S^n est séquentiellement petit au sens où $\text{Hom}(S^n, \cdot)$ commute aux colimites filtrantes (on parle « d'argument du petit objet »), l'application f factorise à une étape fini $X_{i,\bullet}$. D'où le diagramme

$$\begin{array}{ccccccc}
 S^n & \xrightarrow{f} & X_{i,\bullet} & \xrightarrow{j_{i+1}} & X_{i+1,\bullet} & \xrightarrow{q_{i+1}} & F_\bullet \\
 \downarrow & & \nearrow & & \nearrow & & \downarrow q \\
 D^{n+1} & & & \xrightarrow{g} & & & Y_\bullet
 \end{array}$$

et q est bien une fibration acyclique.

□

L'axiome **MC4** se déduit du corollaire plus précis suivant :

- COROLLAIRE 4.1.11.** (1) *Toute cofibration est un monomorphisme.*
 (2) *Si $i : A_\bullet \rightarrow B_\bullet$ est une fibration acyclique, alors i a la LLP relativement aux fibrations.*

DÉMONSTRATION. (1) est un exercice facile, Contentons nous de montrer (2). D'après la proposition précédente, on peut factoriser i en

$$\begin{array}{ccc}
 A_\bullet & \xrightarrow{j} & F_\bullet \\
 & \searrow i & \downarrow p \\
 & & B_\bullet
 \end{array}$$

où j possède la LLP relativement aux fibrations. On obtient alors le diagramme

$$\begin{array}{ccc} A_{\bullet} & \xrightarrow{j} & F_{\bullet} \\ \downarrow i & \nearrow & \downarrow p \\ B_{\bullet} & \xrightarrow{1} & B_{\bullet} \end{array} .$$

Donc i est le rétracte de j qui a la LLP par rapport aux fibrations, donc i aussi. □

Ce qui achève la preuve du théorème. □

4.2. Structure de catégorie de modèle sur $C_+(R\text{-mod})$. On définit essentiellement par restriction une structure de catégorie de modèle sur la sous-catégorie $C_+(R\text{-mod})$ de $C(R\text{-mod})$:

DÉFINITION 4.2.1. *On dira que $f : C_{\bullet} \rightarrow D_{\bullet} \in C_+(R\text{-mod})$ est une*

- *équivalence faible si c'est un quasi-isomorphisme.*
- *fibration si $f : C_n \rightarrow D_n$ est surjectif pour $n \geq 1$.*
- *cofibration si f possède la LLP relativement à toutes les fibrations acycliques.*

THÉORÈME 4.2.2. *La catégorie $C_+(R\text{-mod})$ est ainsi munie d'une structure de catégorie de modèle.*

DÉMONSTRATION. La preuve est analogue à la preuve pour $C(R\text{-mod})$. □

5. Catégories de modèle à engendrement cofibrants

5.1. Argument du petit objet.

DÉFINITION 5.1.1. *Soit \mathcal{C} une catégorie cocomplète et I une classe de morphismes de \mathcal{C} .*

- (a) *Une flèche $p : X \rightarrow Y$ est I -injective si elle possède la RLP relativement à toutes les flèches de I .*
- (b) *Une flèche $i : A \rightarrow B$ est une I -cofibration si elle possède la LLP relativement à toutes les flèches I -injectives.*
- (c) *$f : A \rightarrow B$ est I -cellulaire si*

$$A = B_0 \rightarrow B_1 \rightarrow \dots \rightarrow \text{colim} B_i \simeq B$$

et

$$\begin{array}{ccc} \coprod_{\alpha} U_{\alpha,i} & \longrightarrow & B_i \\ \downarrow & & \downarrow \\ \coprod_{\alpha} V_{\alpha,i} & \longrightarrow & B_{i+1} \end{array} \quad \text{est un pushout, avec } U_{\alpha,i} \rightarrow V_{\alpha,i} \in I .$$

DÉFINITION 5.1.2. *Sous les mêmes hypothèses, un objet X de \mathcal{C} est dit petit relativement à I si pour toute suite*

$$Y_1 \xrightarrow{f_1} Y_2 \xrightarrow{f_2} Y_3 \rightarrow \dots$$

de flèches de I l'application canonique $\text{colim} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y_i) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, \text{colim} Y_i)$ est une bijection.

un relèvement

$$\begin{array}{ccccccc}
 A_i & \longrightarrow & Z_k & \longrightarrow & Z_{k+1} & \longrightarrow & Z \\
 \downarrow & & \downarrow & \nearrow & \downarrow & & \downarrow \\
 B_i & \longrightarrow & Y & \xlongequal{\quad} & Y & \xlongequal{\quad} & Y
 \end{array}$$

□

LEMME 5.1.4. Soit \mathcal{C} une catégorie cocomplète et I une classe de flèches de \mathcal{C} .

- (1) Toute flèche I -cellulaire est une I -cofibration.
- (2) Sous les hypothèses de l'argument du petit objet, toute I -cofibration est rétraction d'une flèche I -cellulaire.

DÉMONSTRATION. Pour (1), notons que par définition $I \subset I - cof$. Comme la classe $I - cof$ est défini par une LLP, elle est stable par composition et par pushout. Mais donc $I - cell \subset I - cof$.

Pour (2), soit $f : X \rightarrow Y \in I - cof$. Par l'argument du petit objet, il existe une factorisation

$$\begin{array}{ccccc}
 X & \xrightarrow{i} & Z & \xrightarrow{p} & Y \\
 & \searrow & & \nearrow & \\
 & & & & f
 \end{array}$$

où i est I -cellulaire et p est I -injective. Le diagramme

$$\begin{array}{ccc}
 X & \xrightarrow{i} & Z \\
 f \downarrow & \nearrow \phi & \downarrow p \\
 Y & \xlongequal{\quad} & Y
 \end{array}$$

admet alors un relèvement ϕ car $f \in I - cof$ et $p \in I - inj$. On en déduit le diagramme de rétraction

$$\begin{array}{ccccc}
 X & \xlongequal{\quad} & X & \xlongequal{\quad} & X \\
 \downarrow f & & \downarrow i & & \downarrow f \\
 Y & \xrightarrow{\phi} & Z & \xrightarrow{p} & Y
 \end{array}$$

□

5.2. Engendrement cofibrant.

DÉFINITION 5.2.1. Une catégorie de modèle \mathcal{C} est dite à engendrement cofibrant s'il existe des ensembles de flèches I et J de \mathcal{C} tels que :

- (i) Les sources des flèches de I sont petites relativement à la classe $I - cell$.
- (ii) Les sources des flèches de J sont petites relativement à la classe $J - cell$.
- (iii) $Fib_{\mathcal{C}} = J - inj$.
- (iv) $\mathcal{W}_{\mathcal{C}} \cap Fib_{\mathcal{C}} = I - inj$.

L'ensemble I est appelé ensemble générateur des cofibrations, l'ensemble J l'ensemble générateur des cofibrations acycliques.

COROLLAIRE 5.2.2. Soit (\mathcal{C}, I, J) une catégorie de modèle à engendrement cofibrant. Alors $Cof_{\mathcal{C}} = I - cof$ et $Cof_{\mathcal{C}} \cap \mathcal{W}_{\mathcal{C}} = J - cof$.

DÉMONSTRATION. C'est un corollaire immédiat de la définition des cofibrations et cofibrations acycliques en termes de LLP, et les définitions (iii) et (iv). \square

COROLLAIRE 5.2.3. *SI C est une catégorie de modèle à engendrement cofibrant, les factorisations de l'axiome MC5 sont fonctorielles.*

DÉMONSTRATION. On applique l'argument du petit objet respectivement aux ensembles I et J . \square

5.3. Comment construire une catégorie de modèle à engendrement cofibrant ?

THÉORÈME 5.3.1. *Soit C une catégorie complète et cocomplète, W une classe de flèches de C fermée par rétraction et vérifiant la propriété « 2 sur 3 ». Soient I, J des ensembles de flèches de C vérifiant les propriétés :*

- (i) *Les sources des flèches de I sont petites relativement à la classe $I - \text{cell}$ et les sources des flèches de J sont petites relativement à la classe $J - \text{cell}$.*
- (ii) *$J - \text{cof} \subset I - \text{cof} \cap \mathcal{W}$*
- (iii) *$I - \text{inj} \subset J - \text{inj} \cap \mathcal{W}$.*
- (v) *l'une des inclusion de (ii) ou (iii) est une égalité.*

Alors (\mathcal{C}, I, J) est une catégorie de modèle à engendrement cofibrant d'équivalences faibles \mathcal{W} .

5.4. Exemples.

5.4.1. *La catégorie $C_+(R\text{-mod})$.* La catégorie $(C_+(R\text{-mod}), I, J)$ est à engendrement cofibrant, avec

$$I = \{S(n-1) \longrightarrow D(n), n \geq 1; 0 \longrightarrow S(0)\} \quad \text{et} \quad J = \{0 \longrightarrow D(n), n \geq 0\} .$$

5.4.2. *La catégorie Top.* La catégorie **Top**, munie de la structure de modèle de Quillen où les équivalences faibles sont les équivalences d'homotopie faibles, les cofibrations sont les rétractions de complexes cellulaires relatifs et les fibrations sont les fibrations de Serre, est à engendrement cofibrant pour

$$I = \{S^{n-1} \longrightarrow D^n, n \geq 0; (S^{-1} = \emptyset)\} \quad \text{et} \quad J = \{D^n \longrightarrow D(n) \times [0, 1], n \geq 0\} .$$

5.5. Comment promouvoir une structure de catégorie de modèle ?

THÉORÈME 5.5.1 (Kan). *Soit (\mathcal{C}, I, J) une catégorie de modèle à engendrement cofibrant. Soit \mathcal{D} une catégorie complète et cocomplète. Supposons donné une adjonction*

$$F : \mathcal{C} \rightleftarrows \mathcal{D} : G .$$

telle que :

- (i) *Les sources des flèches de FI sont petites relativement aux flèches FI-cellulaires (idem pour FJ).*
- (ii) *$G(FJ - \text{cell}) \subset \mathcal{W}_{\mathcal{C}}$.*

Alors (\mathcal{D}, FI, FJ) est une catégorie de modèle à engendrement cofibrant, et $\mathcal{W}_{\mathcal{D}} = G^{-1}(\mathcal{W}_{\mathcal{C}})$. De plus la paire (F, G) est une adjonction de Quillen.

5.6. **Problèmes ensemblistes.** Tout ceci se généralise à la notion λ -petit, λ ordinal arbitraire.

La catégorie des ensembles simpliciaux

Le but de ce chapitre est de donner une introduction à la catégorie \mathcal{S} des ensembles simpliciaux §, encores appelés espaces.

(a) On dispose d'une adjonction naturelle

$$\mathcal{S} \rightleftarrows \mathbf{Top}$$

dont on montre qu'elle est de Quillen pour une structure de modèle naturelle sur \mathcal{S} . La catégorie \mathcal{S} doit ainsi être pensée comme une version combinatoire agréable à manipuler de \mathbf{Top} .

(b) La catégorie \mathcal{S} contient comme sous-catégorie pleine la catégorie \mathbf{Cat} des petites catégories. Elle est donc le monde naturel où étudier les généralisations de la notion de catégorie : c.f. la théorie des quasi-catégories (Joyal).

(c) Enfin le monde simplicial permet de construire naturellement des structures de modèles sur de nombreuses autres catégories. Nous nous intéresserons plus tard à la catégorie des préfaisceaux en ensembles simpliciaux sur un site.

1. Objets simpliciaux

1.1. Les catégories \mathbf{Ord} et $\mathbf{\Delta}$.

DÉFINITION 1.1.1. (a) On note \mathbf{Ord} la catégorie dont les objets sont les ensembles finis ordonnés et les morphismes les applications préservant l'ordre.

(b) On note $\mathbf{\Delta}$ la petite catégorie sous-catégorie pleine de \mathbf{Ord} dont les objets sont les ensembles fini

$$[n] = \{0 < 1 < \dots < n\}, n \in \mathbb{N}.$$

Bien-sûr la catégorie $\mathbf{\Delta}$ est un « modèle petit » de \mathbf{Ord} : la catégorie $\mathbf{\Delta}$ est petite et le foncteur d'inclusion $\mathbf{\Delta} \subset \mathbf{Ord}$ est essentiellement surjectif pleinement fidèle, donc une équivalence de catégorie.

1.1.1. *Description combinatoire de $\mathbf{\Delta}$.* On définit

$d^i : [n-1] \rightarrow [n]$, $0 \leq i \leq n$ le morphisme de $\mathbf{\Delta}$ évitant i (applications faces);

$s^i : [n] \rightarrow [n-1]$, $0 \leq i \leq n-1$ le morphisme de $\mathbf{\Delta}$ identifiant i et $i+1$ (applications codégénérescence).

Ces morphismes satisfont les *identités cosimpliciales* :

$$(8) \quad d^j d^i = d^i d^{j-1} \quad (i < j) ,$$

$$(9) \quad s^j d^i = \begin{cases} d^i s^{j-1} & (i < j) \\ \text{Id} & (i = j, j+1) \\ d^{i-1} s^j & (i > j+1) \end{cases}$$

$$(10) \quad s^j s^i = s^{i-1} s^j \quad (i > j).$$

De plus ces morphismes engendrent Δ . Plus précisément :

LEMME 1.1.2 (de réécriture). *Soit $f : [m] \rightarrow [n] \in \Delta$. Il existe des uniques entiers $k, l \in \mathbb{N}$ avec $m - l + k = n$ et des uniques $n - l > i_1 > i_2 > \dots > i_l \geq 0$ et $0 \leq j_1 < \dots < j_k < m$ tels que :*

$$f = d^{j_k} \dots d^{j_1} s^{i_l} \dots s^{i_1} .$$

1.1.2. $\Delta \subset \mathbf{Cat}$. Un point de vue important consiste à considérer Δ comme sous-catégorie pleine de \mathbf{Cat} : l'objet $[n]$ est vu comme la catégorie finie

$$\Delta^\bullet[n] = \{0 \rightarrow 1 \rightarrow \dots \rightarrow n\} ,$$

et $\text{Hom}_\Delta([m], [n])$ s'identifie bien à $\text{Hom}_{\mathbf{Cat}}(\Delta^\bullet[m], \Delta^\bullet[n])$.

1.2. Objets (co)simpliciaux.

DÉFINITION 1.2.1. *Soit \mathcal{C} une catégorie.*

(a) *Un objet cosimplicial dans \mathcal{C} est un foncteur $X : \mathbf{Ord} \rightarrow \mathcal{C}$, c'est-à-dire un \mathcal{C} -préfaisceau sur \mathbf{Ord}^{op} . De manière équivalente, c'est un foncteur $X : \Delta \rightarrow \mathcal{C}$ c'est-à-dire un \mathcal{C} -préfaisceau sur Δ^{op} .*

(b) *Un objet simplicial dans \mathcal{C} est un foncteur $X : \mathbf{Ord}^{\text{op}} \rightarrow \mathcal{C}$, c'est-à-dire un préfaisceau sur \mathbf{Ord} . De manière équivalente c'est un foncteur $X : \Delta^{\text{op}} \rightarrow \mathcal{C}$, c'est-à-dire un \mathcal{C} -préfaisceau sur Δ .*

DÉFINITION 1.2.2. *On notera $\Delta\mathcal{C} = \mathcal{C}^\Delta = \text{co-}\mathcal{C}$ la catégorie des objets cosimpliciaux dans \mathcal{C} , et $\Delta^{\text{op}}\mathcal{C} = \mathcal{C}^{\Delta^{\text{op}}} = \text{s}\mathcal{C}$ la catégorie des objets simpliciaux dans \mathcal{C} .*

En tant que catégories de préfaisceaux, $\Delta\mathcal{C}$ et $\Delta^{\text{op}}\mathcal{C}$ ont les limites et les colimites existantes dans \mathcal{C} .

1.2.1. *Description combinatoire des objets simpliciaux.* De la description combinatoire de Δ on déduit la description combinatoire d'un objet simplicial :

DÉFINITION 1.2.3. *Un objet $X \in \Delta^{\text{op}}\mathcal{C}$ est la donnée d'une suite X_\bullet , $\bullet \in \mathbb{N}$, d'objets de \mathcal{C} et d'applications*

$$d_i : X_n \rightarrow X_{n-1}, \quad 0 \leq i \leq n, \quad (\text{applications faces})$$

$$s_i : X_{n-1} \rightarrow X_n, \quad 0 \leq i \leq n-1, \quad (\text{applications de dégénérescence})$$

vérifiant les identités simpliciales

$$(11) \quad d_i d_j = d_{j-1} d_i \quad (i < j) ,$$

$$(12) \quad d_i s_j = \begin{cases} s_{j-1} d_i & (i < j) \\ \text{Id} & (i = j, j + 1) \\ s_j d_{i-1} & (i > j + 1) \end{cases}$$

$$(13) \quad s_i s_j = s_j s_{i-1} \quad (i > j).$$

Une application simpliciale $f : X_\bullet \rightarrow Y_\bullet$ entre objets simpliciaux est une collection de flèches de \mathcal{C} commutant avec les d_i et les s_i .

Visuellement, on peut donc représenter un objet simplicial par

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & \xleftarrow{d_0} & & \\ & & & & \xleftarrow{s_0} & & \\ & & & & \xrightarrow{d_1} & & \\ X_0 & \xrightarrow{s_0} & X_1 & \xleftarrow{d_1} & X_2 & \xrightarrow{s_1} & \cdots \\ & \xleftarrow{d_1} & & \xleftarrow{s_1} & & \xleftarrow{d_2} & \\ & & & \xleftarrow{d_2} & & \xleftarrow{s_2} & \\ & & & & & \xleftarrow{d_3} & \end{array}$$

1.2.2. *Remarque de notations.* On notera parfois X^\bullet un objet X de $\Delta\mathcal{C}$ et X_\bullet un objet X de $\Delta^{\text{op}}\mathcal{C}$. On note alors $X^n = X([n]) = X^\bullet[n]$ (resp. $X_n = X([n]) = X_\bullet[n]$).

1.3. Objets simpliciaux libres. On note encore \mathbb{N} la catégorie dont les objets sont les entiers naturels et les seules flèches sont les identités des objets. On dispose d'un foncteur naturel $\mathbb{N} \rightarrow \Delta$, qui a un objet $n \in \mathbb{N}$ associe $[n] \in \Delta$. Comme $\mathbb{N} \simeq \mathbb{N}^{\text{op}}$ on a aussi un foncteur naturel $\mathbb{N} \rightarrow \Delta^{\text{op}}$.

En nous concentrant sur le cas simplicial, le foncteur $\mathbb{N} \rightarrow \Delta^{\text{op}}$ induit un foncteur d'oubli $\mathcal{O} : \Delta^{\text{op}}\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}^{\mathbb{N}}$, qui a objet simplicial X . associe la suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

LEMME 1.3.1. *On dispose d'une adjonction naturelle*

$$\mathbf{Free} : \mathcal{C}^{\mathbb{N}} \xrightleftharpoons{\quad} \Delta^{\text{op}}\mathcal{C} : \mathcal{O} .$$

Nous donnerons la construction de **Free** dans le cas $\mathcal{C} = \mathbf{Set}$.

1.4. La catégorie $\mathcal{S} = \Delta^{\text{op}}\mathbf{Set}$ des espaces. Dorénavant, un ensemble simplicial sera appelé un « espace », et on notera \mathcal{S} la catégorie $\Delta^{\text{op}}\mathbf{Set}$ des espaces.

DÉFINITION 1.4.1 (Simplexes, faces et dégénérescence). *Soit $X \in \mathcal{S}$.*

- (a) *Un élément $x \in X_n$ s'appelle un n -simplexe de X .*
- (b) *Toute image de $x \in X_n$ par une itération arbitraire (possiblement aucune) de morphismes de faces est appelé une face de x .*
- (c) *Toute image de x par une itération arbitraire (possiblement aucune) de morphismes de dégénérescence est appelé une dégénérescence de x .*
- (d) *Le simplexe x est dit non-dégénéré s'il n'est dégénérescence que de lui-même.*
- (e) *X est dit fini s'il n'a qu'un nombre fini de simplexes non-dégénérés.*

LEMME 1.4.2. *Soit $X \in \mathcal{S}$ et $x \in X_n$. Il existe un unique triplet $(k \in \mathbb{N}, (n > i_1 > i_2 > \dots > i_k \geq 0), y \in X_{n+k}$ non-dégénéré) tel que $x = s_{i_1} \dots s_{i_k}(y)$.*

DÉMONSTRATION. Pour l'existence : soit x est non-dégénéré et on pose $x = y$ et $k = 0$. Sinon, $x = s_{j_1}(x')$. Par itération on obtient $x = s_{j_1} \dots s_{j_k}(y)$ avec y non-dégénéré. On réordonne les indices comme souhaité grâce à la relation $s_i s_j = s_{j+1} s_i$ si $i \leq j$.

Pour l'unicité supposons

$$s_{i_1} \dots s_{i_k}(y) = s_{j_1} \dots s_{j_l}(y')$$

avec $k \leq l$.

Donc $y = d_{i_k} \dots d_{i_1} s_{j_1} \dots s_{j_l}(y')$. Grâce aux règles de commutation des $d_i s_j$ on en déduit

$$y = s_{p_1} \dots s_{p_{l'}} d_{q_1} \dots d_{q_{k'}}(y') ,$$

avec $l' \leq l, k' \leq k$ et $k - k' = l - l'$. Comme y est non-dégénéré on obtient $l' = 0$, puis $l = k - k' \geq k$ par hypothèse donc $k' = 0$, donc $k = l$ et $y = y'$. Finalement on conclut

$$\{i_1, \dots, i_k\} = \{j_1, \dots, j_k\}$$

d'après le lemme de réécriture. □

COROLLAIRE 1.4.3. *Etant donné un ensemble de simplexes S d'un espace $X \in \mathcal{S}$, l'espace $Y = \langle S \rangle$ engendré par S est bien défini.*

1.4.1. *Construction du foncteur $\mathbf{Free} : \mathbf{Set}^{\mathbb{N}} \longrightarrow \mathcal{S}$. Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbf{Set}^{\mathbb{N}}$. On pose*

$$\mathbf{Free}((X_k)_{k \in \mathbb{N}})_n = \left\{ \begin{array}{l} x \text{ pour } x \in X_n \\ \text{mots de la forme } s_{i_1} \dots s_{i_l} d_{j_1} \dots d_{j_k} x, \text{ pour } x \in X_m \\ \text{pour } \left. \begin{array}{l} m - l + k = n, \\ n - l > i_1 > i_2 > \dots > i_l \geq 0, \\ 0 \leq j_1 < \dots < j_k < m \end{array} \right\} \end{array} \right.$$

et les applications de faces et dégénérescence sont donnés par le lemme de réécriture. On vérifie facilement que \mathbf{Free} est bien adjoint à gauche du foncteur d'oubli $\mathcal{O} : \mathcal{S} \longrightarrow \mathbf{Set}^{\mathbb{N}}$.

LEMME 1.4.4. *Tout $X \in \mathcal{S}$ est quotient d'un espace libre par une relation d'équivalence (préservant la structure simpliciale).*

DÉMONSTRATION. Soit $X_{\bullet} \in \mathcal{S}$. Notons

$$\phi : \mathbf{Free}((X_n)_{n \in \mathbb{N}}) \longrightarrow X \in \mathcal{S}$$

l'unique morphisme induisant par adjonction l'identité des $X_n, n \in \mathbb{N}$. D'après le lemme de réécriture, l'image de ϕ est X . On pose $x \sim y \in X_n$ si $\phi_n(x) = \phi_n(y)$, c'est une relation d'équivalence compatible à la structure simpliciale et $X = \mathbf{Free}((X_n)_{n \in \mathbb{N}}) / \sim$. □

1.4.2. *Le n -simplexe standard $\Delta[n]$, bord et cornets.*

DÉFINITION 1.4.5. *On appelle n -simplexe standard $\Delta[n] = \text{Hom}_{\Delta}(\cdot, [n]) \in \mathcal{S}$. Ainsi l'ensemble des k -simplexes $\Delta[n]_k$ de $\Delta[n]$ n'est autre que $\text{Hom}_{\Delta}([k], [n])$. Cet ensemble contient exactement*

$$\begin{pmatrix} n + 1 \\ k + 1 \end{pmatrix}$$

k -simplexes non-dégénérés : ce sont les applications de $\text{Hom}_{\Delta}([k], [n])$ injectives.

On peut aussi décrire $\Delta[n]$ comme l'espace libre engendré par un unique n -simplexe (noté ι_n) :

$$\Delta[n] = \mathbf{Free}(\emptyset, \dots, \emptyset, \iota_n, \emptyset \dots) .$$

LEMME 1.4.6. *Pour tout $X \in \mathcal{S}$ on a*

$$\text{Hom}_{\mathcal{S}}(\Delta[n], X) \simeq_{\text{canonique}} X_n .$$

DÉMONSTRATION. Pour le point de vue de la définition 1.4.5, c'est le lemme de Yoneda. Si on considère $\Delta[n]$ comme espace libre sur un unique n -simplexe ι_n , c'est une conséquence du lemme d'adjonction. \square

DÉFINITION 1.4.7. *On définit $\partial\Delta[n] \subset \Delta[n]$ le sous-ensemble simplicial dont les k -simplexes non-dégénérés sont les $[k] \hookrightarrow [n]$ distincts de l'identité.*

DÉFINITION 1.4.8. *On définit le cornet $\Lambda^r[n] \subset \partial\Delta[n]$ comme le sous-ensemble simplicial engendré par les k -simplexes non-dégénérés $[k] \hookrightarrow [n]$ exceptés l'identité et $[n-1] \xrightarrow{d^r} [n]$.*

Géométriquement (voir plus loin), $\Lambda^r[n]$ est l'étoile fermée du sommet r .

1.4.3. *Les espaces comme colimites de simplexes standards.* Commençons par remarquer que comme la catégorie **Set** est (complète et) cocomplète, il en est de même de la catégorie \mathcal{S} .

LEMME 1.4.9. *Soit \mathcal{D} une catégorie petite. Tout préfaisceau $F : \mathcal{D}^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{Set}$ est une colimite de foncteurs représentables.*

DÉMONSTRATION. Définissons la catégorie \mathcal{D}/F dont les objets sont les morphismes de foncteurs

$$\alpha : h_X = \text{Hom}_{\mathcal{D}}(\cdot, X) \longrightarrow F$$

et les morphismes sont les diagrammes commutatifs de morphismes de foncteurs

$$\begin{array}{ccc} h_X & \xrightarrow{\alpha} & F \\ \downarrow & & \parallel \\ h_Y & \xrightarrow{\beta} & F' . \end{array}$$

On obtient un foncteur naturel $\mathcal{D}/F \rightarrow \mathcal{D}^{\text{op}}\mathbf{Set}$ qui à un objet $\alpha : h_X \rightarrow F$ associe $h_X \in \mathcal{D}^{\text{op}}\mathbf{Set}$ et à un morphisme $f : \alpha \rightarrow \beta$ associe le morphisme de foncteur $h_X \rightarrow h_Y$. On vérifie facilement que la colimite de ce foncteur, notée simplement

$$\text{colim}_{h_X \rightarrow F} h_X ,$$

n'est autre que $F \in \mathcal{D}^{\text{op}}\mathbf{Set}$. \square

REMARQUE 1.4.10. Nous utiliserons plus loin qu'en fait $\mathcal{D}^{\text{op}}\mathbf{Set}$ est la cocomplétion universelle de \mathcal{D} .

COROLLAIRE 1.4.11. Soit $X \in \mathcal{S}$. Notons $\mathbf{\Delta}/X$ la catégorie des simplexes de X , dont les objets sont les flèches $\Delta[n] \rightarrow X$ de \mathcal{S} avec les morphismes évidents. Alors

$$X = \text{colim}_{\Delta[n] \rightarrow X} \Delta[n] \text{ .}$$

1.4.4. *Enrichissement de \mathcal{S} .* Notons que tout foncteur $F : \mathbf{Set} \rightarrow \mathcal{C}$, où \mathcal{C} désigne une catégorie quelconque, induit une extension $F : \mathcal{S} \rightarrow \mathbf{\Delta}^{\text{op}}\mathcal{C}$. Nous considérerons en particulier le cas suivant. Soit R un anneau et $R[\cdot] : \mathbf{Set} \rightarrow R\text{-mod}$ le foncteur qui à un ensemble S associe le R -module libre de base S . Nous noterons encore

$$R[\cdot] : \mathcal{S} \rightarrow \mathbf{\Delta}^{\text{op}}R\text{-mod}$$

l'extension correspondante.

2. \mathcal{S} versus \mathbf{Top} , et réalisations en général

Dans cette section on étudie une adjonction naturelle entre \mathcal{S} et \mathbf{Top} , qu'on généralise à un cadre abstrait ensuite.

2.1. L'adjonction entre \mathcal{S} et \mathbf{Top} .

2.1.1. *L'adjoint à gauche : le foncteur « réalisation topologique ».*

DÉFINITION 2.1.1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Le n -simplexe topologique standard $\Delta^n \in \mathbf{Top}$ est

$$\Delta^n = \left\{ (t_0, \dots, t_n) \in [0, 1]^{n+1} \mid \sum_i t_i = 1 \right\} \subset \mathbb{R}^n \text{ .}$$

DÉFINITION 2.1.2. On note $\mathbf{\Delta}^\bullet : \mathbf{\Delta} \rightarrow \mathbf{Top}$ l'espace topologique cosimplicial qui à $[n] \in \mathbf{\Delta}$ associe Δ^n .

DÉFINITION 2.1.3 (Réalisation topologique d'un ensemble simplicial). Soit $X \in \mathcal{S}$. La réalisation $|X|$ de X est l'objet de \mathbf{Top}

$$|X| = \left(\coprod_n X_n \times \Delta^n \right) / \sim \text{ ,}$$

où si $(x, u) \in X_m \times \Delta^n$ et $\phi : [n] \rightarrow [m] \in \mathbf{\Delta}$ on identifie

$$(\phi^*x, u) \in X_n \times \Delta^n \sim (x, \phi_*u) \in X_m \times \Delta^m \text{ .}$$

EXEMPLE 2.1.4. (a) $\Delta^n = |\Delta[n]|$.

(b) La réalisation $|\partial\Delta[n]|$ est homéomorphe à $\partial\Delta^n \simeq S^{n-1}$.

(c) Soit $S_s^1 = \Delta[1]/\partial\Delta[1]$ le cercle simplicial. Sa réalisation S_s^1 est homéomorphe au cercle S^1 .

2.1.2. *L'adjoint à droite : le foncteur « complexe singulier ».*

DÉFINITION 2.1.5. Soit $Y \in \mathbf{Top}$. On définit le complexe singulier $\text{Sing}(Y) \in \mathcal{S}$ par

$$\text{Sing}(Y)_n = \text{Hom}_{\mathbf{Top}}(\Delta^n, Y) \text{ .}$$

Comme $\mathbf{\Delta}^\bullet$ est un espace cosimplicial, $\text{Sing}(Y)$ est bien un ensemble simplicial.

2.1.3. *L'adjonction entre \mathcal{S} et \mathbf{Top} .*LEMME 2.1.6. *La paire*

$$|\cdot| : \mathcal{S} \rightleftarrows \mathbf{Top} : \text{Sing}$$

est une adjonction.

DÉMONSTRATION. C'est un exercice. Cette adjonction donne naissance aux flèches canoniques

$$\begin{aligned} X &\longrightarrow \text{Sing}(|X|) \\ x \in X_n &\longrightarrow \{ \Delta^n \xrightarrow{(x, \cdot)} X_n \times \Delta^n \longrightarrow |X| \in \text{Sing}(X)_n \} , \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} |\text{Sing}(Y)| &\longrightarrow Y \\ (y, u) \in \text{Sing}(Y)_n \times \Delta^n &\longrightarrow y(u) \in Y \end{aligned}$$

□

2.2. **Réalisations générales associées à un objet cosimplicial.**DÉFINITION 2.2.1. *Soit \mathcal{C} une catégorie cocomplète et $\phi : \mathbf{\Delta} \rightarrow \mathcal{C}$ un objet cosimplicial. On définit le foncteur de réalisation $|\cdot|_\phi : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{C}$ par*

$$|X|_\phi := \text{colim}_{\Delta[n] \rightarrow X} \phi([n]) .$$

EXEMPLE 2.2.2. – Notons $\Delta[\bullet] : \mathbf{\Delta} \rightarrow \mathcal{S}$ l'espace cosimplicial qui à $[n]$ associe $\Delta[n]$. Sa réalisation $|\cdot|_{\Delta[\bullet]} : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$ est juste le foncteur identité.– La réalisation $|\cdot|_{\Delta[\bullet]} : \mathcal{S} \rightarrow \mathbf{Top}$ n'est autre que la réalisation usuelle.

L'existence d'un adjoint à droite au foncteur de réalisation est alors un fait général :

PROPOSITION 2.2.3. *Soit \mathcal{C} une catégorie cocomplète. La catégorie $\mathbf{\Delta}\mathcal{C}$ des objets cosimpliciaux de \mathcal{C} est naturellement équivalente à la catégorie des adjonctions $\mathcal{S} \rightleftarrows \mathcal{C}$. On notera*

$$A^\bullet \otimes \cdot : \mathcal{S} \rightleftarrows \mathcal{C} : \text{Sing}_{A^\bullet}$$

l'adjonction associée à un objet cosimplicial $A^\bullet \in \mathbf{\Delta}\mathcal{C}$.

DÉMONSTRATION. – Notons d'abord que si on dispose d'une adjonction

$$F : \mathcal{S} \rightleftarrows \mathcal{C} : U ,$$

on définit un objet cosimplicial de $\mathbf{\Delta}\mathcal{C}$ par

$$\mathbf{\Delta} \xrightarrow{\Delta[\cdot]} \mathcal{S} \xrightarrow{F} \mathcal{C} .$$

– Réciproquement soit $A^\bullet \in \mathbf{\Delta}\mathcal{C}$.

(a) On définit

$$A^\bullet \otimes \cdot : \mathcal{S} \longrightarrow \mathcal{C}$$

en posant $A^\bullet \otimes X \in \mathcal{C}$ l'image de $A \in \mathbf{\Delta}\mathcal{C}$ par

$$\mathbf{\Delta}\mathcal{C} \xrightarrow{\text{restriction}} \mathcal{C}^{\mathbf{\Delta}/X} \xrightarrow{\text{colim}} \mathcal{C} .$$

Comme $\text{Id}_{\mathbf{\Delta}[n]}$ est cofinal dans $\mathbf{\Delta}/\mathbf{\Delta}[n]$ on a canoniquement $A^\bullet \otimes \mathbf{\Delta}[n] \simeq A^\bullet[n]$.

(b) On définit $\text{Sing}_{A^\bullet} : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{S}$ par $(\text{Sing}_{A^\bullet}(Y))_n = \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A^\bullet[n], Y)$.

On a alors

$$\begin{aligned} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A^\bullet \otimes X, Y) &= \text{Hom}_{\mathcal{C}}(\text{colim}_{\mathbf{\Delta}/X} A^\bullet[n], Y) \simeq \lim_{\mathbf{\Delta}/X} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A^\bullet[n], Y) \\ &= \lim_{\mathbf{\Delta}/X} \text{Hom}_{\mathcal{S}}(\mathbf{\Delta}[n], \text{Sing}_{A^\bullet}(Y)) \simeq \text{Hom}_{\mathcal{S}}(\text{colim}_{\mathbf{\Delta}/X} \mathbf{\Delta}[n], \text{Sing}_{A^\bullet}(Y)) \\ &\simeq \text{Hom}_{\mathcal{S}}(X, \text{Sing}_{A^\bullet}(Y)) . \end{aligned}$$

□

2.3. Applications.

2.3.1. **Hom-interne dans \mathcal{S} .** Soit $X \in \mathcal{S}$. Cet objet X définit un objet cosimplicial $X \times \mathbf{\Delta}[\bullet] \in \mathcal{S}^{\mathbf{\Delta}}$. Bien-sûr :

$$(X \times \mathbf{\Delta}[\cdot]) \otimes Y = \text{colim}_{\mathbf{\Delta}/Y} (X \times \mathbf{\Delta}[n]) = X \times Y .$$

D'après la section précédente, ce foncteur admet un adjoint à droite :

$$\mathbf{Hom}_{\mathcal{S}}(X, \cdot) : \mathcal{S} \longrightarrow \mathcal{S}$$

défini par

$$\mathbf{Hom}_{\mathcal{S}}(X, Y) := \text{Hom}_{\mathcal{S}}(X \times \mathbf{\Delta}[\cdot], Y) .$$

COROLLAIRE 2.3.1. *La catégorie \mathcal{S} est munie d'un **Hom**-interne.*

2.3.2. *Le foncteur nerf $N : \mathbf{Cat} \hookrightarrow \mathcal{S}$.* Considérons le plongement $\mathbf{\Delta} \hookrightarrow \mathbf{Cat}$, c'est un objet cosimplicial $\mathbf{\Delta}^\bullet \in \mathbf{Cat}^{\mathbf{\Delta}}$. On déduit de la section précédente une adjonction

$$\mathbf{\Delta}^\bullet \otimes \cdot : \mathcal{S} \rightleftarrows \mathbf{Cat} : \text{Sing}_{\mathbf{\Delta}^\bullet} = N .$$

Le foncteur N , appelé *foncteur nerf*, associe à une catégorie \mathcal{C} l'ensemble simplicial

$$N\mathcal{C}_\bullet = \text{Hom}_{\mathbf{Cat}}(\mathbf{\Delta}^\bullet, \mathcal{C}) ,$$

dont l'ensemble des n -simplexes $N\mathcal{C}_n$ est l'ensemble des n -uplets de flèches composables de \mathcal{C}

$$c_0 \rightarrow c_1 \rightarrow \cdots \rightarrow c_n .$$

Clairement le foncteur $N : \mathbf{Cat} \longrightarrow \mathcal{S}$ est pleinement fidèle.

2.4. La catégorie \mathcal{S} et les espaces classifiants. Dans cette section on montre que la construction du classifiant d'un groupe discret (plus généralement d'un groupe topologique) se fait très naturellement dans \mathcal{S} (resp. dans la catégorie $\mathbf{\Delta}^{\text{op}}\mathbf{Top}$ des espaces topologiques simpliciaux).

Soit G un groupe topologique (on prendra G groupe de Lie connexe ou groupe discret). Soit M un espace topologique.

DÉFINITION 2.4.1. *Un G -fibré principal sur M est $P \xrightarrow{\pi} M$ avec :*

- (1) *une G -action $P \times G \rightarrow P$,*
- (2) *une trivialisat on locale de cette action :*

$$\forall x \in M, \exists U \ni x \ / \ \pi^{-1}(U) \xrightarrow{\cong} U \times G \ ,$$

tels que

$$\begin{aligned} \pi(ug) &= \pi(u) \\ \varphi(ug) &= \varphi(u)g \end{aligned}$$

EXEMPLE 2.4.2. (a) $\pi : G \rightarrow \{*\}$ est un G -fibré principal trivial.

(b) Si M est une variété lisse, le fibré $P(M)$ des bases de TM est un $GL(n, \mathbb{R})$ -fibré principal. Si M est une variété riemannienne le fibré $P^1(M)$ des bases orthonormées de TM est un $O(n)$ -fibré principal.

(c) le revêtement universel $\tilde{M} \rightarrow M$ est un $\pi_1(M)$ -fibré principal.

Les G -fibrés principaux forment naturellement une catégorie, un morphisme étant un diagramme commutatif d'applications fibr es

$$\begin{array}{ccc} P & \longrightarrow & Q \\ \downarrow & & \downarrow \\ M & \longrightarrow & N \end{array} .$$

On obtient ainsi un foncteur

$$\mathbf{Bun}_G : \mathbf{Top}^{\text{op}} \longrightarrow \mathbf{Set}$$

qui   un espace $M \in \mathbf{Top}$ associe l'ensemble $\mathbf{Bun}_G(M)$ des classes d'isomorphismes de G -fibrés de base M .

Ce foncteur factorise via la catégorie homotopique

$$\mathcal{F}_n : \mathbf{Ho}(\mathbf{Top})^{\text{op}} \longrightarrow \mathbf{Set} \ ,$$

comme corollaire du

LEMME 2.4.3. *Soit $f_0, f_1 : N \rightarrow M$ deux applications homotopes et $p : P \rightarrow M$ un G -fibré. Alors $f_0^*P \simeq f_1^*P$.*

THÉORÈME 2.4.4. *Le foncteur $\mathbf{Bun}_G : \mathbf{Ho}(\mathbf{Top})^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{Set}$ est représentable. On note $EG \rightarrow BG$ la classe d'homotopie du G -fibré principal universel de base l'espace classifiant BG .*

On peut donner différentes constructions de représentants de $EG \rightarrow BG$. Citons en deux.

(1) Construction géométrique : Dans le cas où $G = GL(n, \mathbb{C})$, notons Gr_n^q la grassmannienne des n -plans de \mathbb{C}^q . C'est naturellement une variété lisse compacte.

Soit $V_n^q \rightarrow Gr_n^q$ la variété de Stiefel des n -uplets libres de \mathbb{C}^q , c'est un $GL(n, \mathbb{C})$ -fibré principal.

On dispose d'un diagramme commutatif naturel :

$$\begin{array}{ccc} V_n^q & \hookrightarrow & V_n^{q+1} \\ \downarrow & & \downarrow \\ Gr_n^q & \longrightarrow & Gr_n^{q+1} \end{array} .$$

On réalise alors

$$BGL(n, \mathbb{C}) = \bigcup_q Gr_n^q = Gr_n(\mathbb{C}^\infty)$$

et

$$EGL(n, \mathbb{C}) = \bigcup_q V_n^q$$

le $GL(n, \mathbb{C})$ -fibré principal sur $BGL(n, \mathbb{C})(n)$.

Cette construction se généralise aisément à d'autres groupes de Lie.

COROLLAIRE 2.4.5. $H^{2*+1}(BG, \mathbb{Z}) = 0$.

(2) Construction catégorique : Le formalisme simplicial s'étend au cadre topologique : si **TopCat** désigne la catégorie des petite catégories topologiques (i.e. enrichies en espaces topologique) on dispose encore de $N : \mathbf{TopCat} \rightarrow \mathbf{\Delta^{op}Top}$ et $|\cdot| : \mathbf{\Delta^{op}Top} \rightarrow \mathbf{Top}$.

Notons \mathcal{G} la catégorie topologique à un objet, de morphismes G et $\tilde{\mathcal{G}}$ la catégorie topologique d'objets G et de morphismes $G \times G$. On dispose d'un foncteur naturel

$$\gamma : \tilde{\mathcal{G}} \rightarrow \mathcal{G}$$

qui envoie un morphisme (g_0, g_1) sur $g_0 g_1^{-1}$. On note

$$\pi = N(\gamma) : EG = N(\tilde{\mathcal{G}}) \rightarrow N(\mathcal{G}) = BG .$$

2.4.1. *Preuve du théorème de représentabilité.*

DÉMONSTRATION. Elle est très jolie dans le formalisme catégorique.

Soit $\mathcal{U} = (U_\alpha)$ un recouvrement de M . On définit alors $M_{\mathcal{U}}$ la catégorie topologique avec $Obj(M_{\mathcal{U}}) = \coprod_\alpha U_\alpha$ et $Mor(M_{\mathcal{U}}) = \coprod_{\alpha_0, \alpha_1} U_{\alpha_0} \cap U_{\alpha_1}$ où le coproduit se fait sur les paires α_0, α_1 telles que $U_{\alpha_0} \cap U_{\alpha_1} \neq \emptyset$.

Remarquons que l'ensemble simplicial $NM_{\mathcal{U}}$ est bien le nerf au sens usuel du recouvrement \mathcal{U} :

$$NM_{\mathcal{U}}(n) = \coprod_{(\alpha_0, \dots, \alpha_n)} U_{\alpha_0} \cap \dots \cap U_{\alpha_n}$$

où le coproduit est encore sur les n -uplets tels que $U_{\alpha_0} \cap \dots \cap U_{\alpha_n} \neq \emptyset$. En particulier si $\mathcal{U} = \{M\}$ alors $M_{\mathcal{U}}$ s'identifie à M vue comme catégorie topologique et $|NM| = M$.

Soit alors $\pi : P \rightarrow M$ un G -fibré principal et \mathcal{U} un recouvrement de M trivialisant pour P . Notons \mathcal{V} le recouvrement de P préimage de \mathcal{U} . Remarquons que se donner P revient à se donner un diagramme

de foncteurs continus :

$$\begin{array}{ccc} P_{\mathcal{V}} & \xrightarrow{\widetilde{\Psi}_{\mathcal{U}}} & \widetilde{\mathcal{G}} \\ \downarrow & & \downarrow \\ M_{\mathcal{U}} & \xrightarrow{\Psi_{\mathcal{U}}} & \mathcal{G} \end{array} ,$$

où le foncteur $\Psi_{\mathcal{U}}$ est donné (sur les morphismes) par le cocycle, et le foncteur $\widetilde{\Psi}_{\mathcal{U}}$ est donné par la trivialisatation. Le foncteur $P_{\mathcal{V}} \rightarrow M_{\mathcal{U}}$ est déduit de $P \rightarrow M$.

On obtient alors le diagramme de catégories

$$\begin{array}{ccccc} P & \longleftarrow & P_{\mathcal{V}} & \xrightarrow{\widetilde{\Psi}_{\mathcal{U}}} & \widetilde{\mathcal{G}} \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ M & \longleftarrow & M_{\mathcal{U}} & \xrightarrow{\Psi_{\mathcal{U}}} & \mathcal{G} \end{array} ,$$

qui, par prise du nerf et de la réalisation donne

$$\begin{array}{ccccc} P = |NP| & \longleftarrow & |NP_{\mathcal{V}}| & \xrightarrow{\widetilde{\Psi}_{\mathcal{U}}} & EG \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ M = |NM| & \longleftarrow & |NM_{\mathcal{U}}| & \xrightarrow{\Psi_{\mathcal{U}}} & BG \end{array} .$$

Pour conclure, on démontre que la flèche $|NM_{\mathcal{U}}| \rightarrow M$ est une équivalence d'homotopie pour tout recouvrement trivialisant \mathcal{U} . \square

3. La catégorie \mathcal{S}_*

Il sera utile par la suite de considérer la catégorie \mathcal{S}_* des espaces pointés :

DÉFINITION 3.0.6. *On note \mathcal{S}_* la catégorie $\Delta^{\text{op}}\mathbf{Set}_*$. C'est aussi la même chose que la catégorie dont les objets sont les paires $(X \in \mathcal{S}, \Delta[0] \rightarrow X \in \mathcal{S})$ avec morphismes évidents.*

La catégorie \mathcal{S}_* est naturellement munie d'opérations $X \vee Y$ et $X \wedge Y$. La n -sphère simpliciale est définie par $S_s^n = S_s^1 \wedge S_s^{n-1}$, où S_s^1 est pointée par $\partial\Delta[1]$. La catégorie \mathcal{S}_* est munie d'un **Hom**-interne, définie de façon analogue au cas non-pointé :

$$\mathbf{Hom}_{\mathcal{S}_*}(X, Y) = \mathbf{Hom}_{\mathcal{S}_*}(X \wedge \Delta[\bullet], Y) .$$

Comme dans le cas topologique, on dispose d'une adjonction

$$\cdot_+ : \mathcal{S} \begin{array}{c} \xrightarrow{\quad} \\ \xleftarrow{\quad} \end{array} \mathcal{S}_* : \mathcal{O} .$$

4. $\Delta^{\text{op}}\mathcal{A}$, \mathcal{A} abélienne

Soit \mathcal{A} une catégorie abélienne. Le but de cette section est de comprendre l'énoncé du théorème de Dold-Kan, qui dit que les catégories $\Delta^{\text{op}}\mathcal{A}$ et $C_+(\mathcal{A})$ sont naturellement équivalentes. On s'intéressera particulièrement au cas où $\mathcal{A} = \mathbf{Ab}$ la catégorie des groupes abéliens.

4.1. Le foncteur de Moore. Au vu de la définition d'un objet de $\Delta^{\text{op}}\mathcal{A}$ on construit aisément un premier foncteur $C_{\bullet} : \Delta^{\text{op}}\mathcal{A} \rightarrow C_+(\mathcal{A})$.

DÉFINITION 4.1.1. Soit $A \in \Delta^{\text{op}}\mathcal{A}$. Le complexe de Moore de A est

$$C_{\bullet}(A) = (\cdots \rightarrow A_n \xrightarrow{\partial} A_{n-1} \rightarrow \cdots \rightarrow A_0) \in C_+(\mathcal{A})$$

avec $\partial = \sum_{i=0}^n (-1)^i d_i$.

On vérifie facilement que $\partial^2 = 0$ du fait des identités simpliciales. Bien-sûr, $C_{\bullet} : \Delta^{\text{op}}\mathcal{A} \rightarrow C_+(\mathcal{A})$ est un foncteur.

4.2. Complexe normalisé. Un second foncteur nous sera plus utile :

DÉFINITION 4.2.1. Soit $A \in \Delta^{\text{op}}\mathcal{A}$. Le complexe normalisé associé à A est

$$NA_{\bullet} = (\cdots \rightarrow NA_n = \bigcap_{i=0}^{n-1} \ker d_i \subset A_n \xrightarrow{(-1)^n d_n} NA_{n-1} \rightarrow \cdots \rightarrow NA_0) \in C_+(\mathcal{A}) .$$

Là encore, $N : \Delta^{\text{op}}\mathcal{A} \rightarrow C_+(\mathcal{A})$ est un foncteur.

DÉFINITION 4.2.2. Soit $A \in \Delta^{\text{op}}\mathcal{A}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on note DA_n le sous-objet dégénéré de A_n , c'est-à-dire l'image de l'application $s = \sum s_i : \bigoplus_{i=0}^{n-1} A_{n-1} \rightarrow A_n$.

PROPOSITION 4.2.3. Soit $A \in \Delta^{\text{op}}\mathcal{A}$.

- (1) Les $(DA_n)_{n \in \mathbb{N}}$ forment un sous-complexe DA_{\bullet} de $C_{\bullet}(A)$.
- (2) Le morphisme de complexe $NA_{\bullet} \xrightarrow{i} C_{\bullet}(A) \rightarrow C_{\bullet}(A)/DA_{\bullet}$ est un isomorphisme.
- (3) L'inclusion $NA_{\bullet} \xrightarrow{i} C_{\bullet}(A)$ est une équivalence d'homotopie de complexes.

DÉMONSTRATION. Laissé en exercice. Donnons quelques indications pour le (3). Pour $j, n \in \mathbb{N}$, définissons

$$(N_j A)_n = \begin{cases} \bigcap_{i=0}^j \ker d_i & \text{si } n \geq j+2 \\ NA_n & \text{si } n \leq j+1 \end{cases} .$$

On vérifie que $(N_j A)_{\bullet}$ est un sous-complexe de $C_{\bullet}(A)$. On a donc une chaîne d'inclusion de complexes :

$$NA_{\bullet} = \bigcap_{j \geq 0} N_j A_{\bullet} \subset \cdots \subset N_{j+1} A_{\bullet} \xrightarrow{i_j} N_j A_{\bullet} \subset \cdots \subset N_0 A_{\bullet} \subset N_{-1} A_{\bullet} = C_{\bullet}(A) .$$

Définissons

$$f_j : N_j A_n \rightarrow N_{j+1} A_n$$

par

$$f_j(x) = \begin{cases} x - s_{j+1} d_{j+1}(x) & \text{si } n \geq j+2 \\ x & \text{sinon} \end{cases} .$$

On vérifie que $f_j : N_j A_{\bullet} \rightarrow N_{j+1} A_{\bullet}$ est bien un morphisme de complexe et vérifie $f_j i_j = \text{Id}_{N_{j+1} A_{\bullet}}$. Si on définit $t_j : N_j A_n \rightarrow N_j A_{n+1}$ par

$$t_j(x) = \begin{cases} (-1)^j s_{j+1} & \text{si } n \geq j+1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} .$$

On obtient une homotopie explicite entre $i_j f_j$ et $\text{Id}_{N_j A_{\bullet}}$:

$$1 - i_j f_j = \partial t_j + t_j \partial : N_j A_{\bullet} \rightarrow N_j A_{\bullet} .$$

On recolle ces homotopies pour obtenir une homotopie entre NA_\bullet et $C_\bullet(A)$. □

4.3. La correspondance de Dold-Kan et le foncteur $K : C_+(\mathcal{A}) \rightarrow \Delta^{\text{op}}\mathcal{A}$.

THÉORÈME 4.3.1 (Dold-Kan). *Soit \mathcal{A} une catégorie abélienne. Le foncteur*

$$N : \Delta^{\text{op}}\mathcal{A} \rightarrow C_+(\mathcal{A})$$

est une équivalence de catégorie.

DÉMONSTRATION. On se place dans le cas $\mathcal{A} = \mathbf{Ab}$ et on indique seulement la définition d'un quasi-inverse $K : C_+(\mathbf{Ab}) \rightarrow \Delta^{\text{op}}\mathbf{Ab}$ à N .

Soit $(A_\bullet, \partial) \in C_+(\mathbf{Ab})$. Notons encore $A_\bullet \in \mathcal{S}$ l'espace libre de base $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et formons $\mathbb{Z}[A_\bullet]$ le groupe abélien simplicial correspondant (remarquons au passage qu'on a ainsi construit le foncteur $\text{Free}_{\Delta^{\text{op}}\mathbf{Ab}} : \mathbf{Ab}^{\mathbb{N}} \rightarrow \Delta^{\text{op}}\mathbf{Ab}$ adjoint du foncteur d'oubli $\mathcal{O} : \Delta^{\text{op}}\mathbf{Ab} \rightarrow \mathbf{Ab}^{\mathbb{N}}$).

Soit $Q_\bullet \subset \mathbb{Z}[A_\bullet]$ le sous-groupe simplicial engendré par les relations de groupe dans A_\bullet et la loi de complexe recherché :

$$QA_\bullet = \left\langle \begin{array}{l} a + b - c, \quad a, b, c \in A_n, \quad a +_{A_n} b = c, \\ d_i(a_n), \quad i < n, \\ d_n(a_n) - (-1)^n \partial_n(a_n) \end{array} \right\rangle .$$

On pose alors :

$$KA_\bullet = \mathbb{Z}[A_\bullet]/QA_\bullet .$$

□

5. Homotopie simpliciale : quelques définitions et leurs problèmes

On dispose dans \mathcal{S} d'un analogue de l'intervalle $I = [0, 1] \in \mathbf{Top}$: le 1-simplexe standard $\Delta[1]$. On peut songer à développer une théorie homotopique dans \mathcal{S} semblable à celle de \mathbf{Top} en remplaçant I par $\Delta[1]$.

5.1. Le foncteur π_0^s .

DÉFINITION 5.1.1. *Soit $X \in \mathcal{S}$ et $x_0, x_1 \in X_0$. Un chemin de x_0 à x_1 est un 1-simplexe $x \in X_1$ avec $d_0x = x_0$ et $d_1x = x_1$, c'est-à-dire une flèche*

$$\Delta[1] \xrightarrow{x} X \in \mathcal{S}$$

telle que pour $i = 0, 1$ le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \Delta[0] & \xrightarrow{d_i} & \Delta[1] \\ & \searrow x_i & \downarrow x \\ & & X \end{array}$$

est commutatif.

PROBLÈME 5.1.2. *La relation « être reliés par un chemin » sur X_0 n'est pas symétrique ni transitive en général, contrairement au cas topologique.*

EXEMPLE 5.1.3. Soit $X = \Delta[1]$. On calcule $\text{Hom}_{\mathcal{S}}(\Delta[1], X) = X_1 = \text{Hom}_{\Delta}([1], [1])$, c'est un ensemble à trois éléments $\{s_0d_1, s_0d_0, \text{Id}\}$, qui envoient $0 \rightarrow 1$ respectivement sur

$$0 \begin{array}{c} \curvearrowright \\ \curvearrowright \end{array}, \quad 1 \begin{array}{c} \curvearrowright \\ \curvearrowright \end{array} \text{ et } 0 \rightarrow 1.$$

En particulier il n'y pas d'endomorphisme de $\Delta[1]$ envoyant 1 sur 0 et 0 sur 1.

Bien-sûr, on peut forcer la relation d'équivalence :

DÉFINITION 5.1.4. Soit $X \in \mathcal{S}$. On pose $\pi_0^s(X) = X_0 / \langle \sim \rangle$, où $\langle \sim \rangle$ désigne la relation d'équivalence engendrée par la relation $\sim =$ « être reliés par un chemin ».

On pourrait craindre de perdre ainsi tout contrôle de la relation \sim . Il n'en n'est rien, comme en témoigne le

LEMME 5.1.5. Soit $X \in \mathcal{S}$.

(1) La réalisation induit un isomorphisme naturel $\pi_0^s(X) \simeq \pi_0(|X|)$.

(2) Pour tout espace topologique $Y \in \mathbf{Top}$, on a un isomorphisme naturel $\pi_0^s(\text{Sing}(Y)) \simeq \pi_0(Y)$.

DÉMONSTRATION. Le (1) est évident sur la définition. Le (2) est une conséquence immédiate de l'adjonction entre $|\cdot|$ et Sing . \square

5.2. Homotopies simpliciales.

DÉFINITION 5.2.1. Soit $f_0, f_1 : X \rightarrow Y \in \mathcal{S}$ (c'est-à-dire $f_0, f_1 \in \mathbf{Hom}_{\mathcal{S}}(X, Y)_0$). Une homotopie simpliciale de f_0 à f_1 est un chemin de $\mathbf{Hom}_{\mathcal{S}}(X, Y)$ reliant f_0 à f_1 , c'est-à-dire une flèche

$$H : X \times \Delta[1] \rightarrow Y$$

telle que pour $i = 0, 1$ le diagramme

$$\begin{array}{ccc} X \simeq X \times \Delta[0] & \xrightarrow{\text{Id}_X \times d_i} & X \times \Delta[1] \\ & \searrow f_i & \downarrow H \\ & & X \end{array}$$

est commutatif. On notera $f \sim_h g$.

REMARQUES 5.2.2. (a) Une nouvelle fois \sim_h n'est ni symétrique ni transitive en général.

(b) Comme $|X \times \Delta[1]| \simeq |X| \times I$, la réalisation topologique d'une homotopie simpliciale est une homotopie topologique.

5.2.1. *Version relative.* Si $M \subset X \in \mathcal{S}$ et si dans la définition 5.2.1 l'application H vérifie $H|_{M \times \Delta[1]} = f_0 \circ p_1|_{M \times \Delta[1]}$ on écrira $f \sim_h g$ rel. M . En particulier si $X \in \mathcal{S}_*$, on considèrera uniquement les homotopies simpliciales pointées.

5.3. Homotopie supérieure. Continuons à recopier naïvement la définition topologique dans le cadre simplicial.

DÉFINITION 5.3.1. Soit $X \in \mathcal{S}$. On pose

$$\pi_i^s(X) = \pi_0^s(\mathbf{Hom}_{\mathcal{S}_*}(S_s^n, X)) = \text{Hom}_{\mathcal{S}_*}(S_s^n, X) / \langle \sim \rangle \in \mathbf{Set}.$$

Une nouvelle fois, le foncteur de réalisation induit une application naturelle

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{S}_*}(S_s^n, X) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbf{Top}_*}(S^n, |X|)$$

compatible aux relations d'équivalence engendré par l'homotopie, d'où une transformation naturelle de foncteurs $\pi_*^s(X) \longrightarrow \pi_*(|X|)$.

PROBLÈME 5.3.2. *Contrairement au cas $i = 0$, la flèche $\pi_i^s(X) \longrightarrow \pi_i(|X|)$ n'est pas un isomorphisme en général. Pire, l'ensemble $\pi_i^s(X)$ n'a pas en général de structure naturelle de groupe.*

Comme $X \in \mathcal{S}_*$ et $\mathrm{Sing}(|X|)$ ont (homotopiquement) même réalisation topologique, il suffit d'exhiber un espace X tel que la flèche naturelle

$$\pi_i^s(X) \longrightarrow \pi_i^s(\mathrm{Sing}(|X|))$$

n'est pas un isomorphisme. L'espace S_s^1 va faire l'affaire :

PROPOSITION 5.3.3. $\pi_1^s(S_s^1) = S^0$ et $\pi_1^s(\mathrm{Sing}(S_s^1)) = \mathbb{Z}$.

DÉMONSTRATION. Commençons par le

LEMME 5.3.4. *Soient $Y, Z \in \mathcal{S}_*$ et $W \in \mathbf{Top}_*$.*

(1) *La réalisation topologique induit une flèche naturelle*

$$\mathbf{Hom}_{\mathcal{S}_*}(Y, Z) \longrightarrow \mathrm{Sing}(\mathbf{Hom}_{\mathbf{Top}_*}(|Y|, |Z|)) .$$

(2) *La réalisation topologique induit un isomorphisme*

$$\mathbf{Hom}_{\mathcal{S}_*}(Y, \mathrm{Sing}(W)) \simeq \mathrm{Sing}(\mathbf{Hom}_{\mathbf{Top}_*}(|Y|, W)) .$$

En particulier : $\mathbf{Hom}_{\mathcal{S}_}(S_s^n, \mathrm{Sing}(W)) \simeq \mathrm{Sing}(\Omega^n W)$.*

DÉMONSTRATION. La première assertion suit du calcul

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}_{\mathcal{S}}(X, \mathbf{Hom}_{\mathcal{S}_*}(Y, Z)) &\simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{S}_*}(X \wedge Y, Z) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbf{Top}_*}(|X \wedge Y|, |Z|) \\ &\simeq \mathrm{Hom}_{\mathbf{Top}_*}(|X| \wedge |Y|, |Z|) \text{ car } |\cdot| \text{ commute aux limites finies} \\ &\simeq \mathrm{Hom}_{\mathbf{Top}_*}(|X|, \mathbf{Hom}_{\mathbf{Top}_*}(|Y|, |Z|)) \\ &\simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{S}_*}(X, \mathrm{Sing}(\mathbf{Hom}_{\mathbf{Top}_*}(|Y|, |Z|))) \end{aligned}$$

et de Yoneda.

La seconde assertion suit de

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}_{\mathcal{S}}(X, \mathbf{Hom}_{\mathcal{S}_*}(Y, \mathrm{Sing}(W))) &\simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{S}_*}(X \wedge Y, \mathrm{Sing}(W)) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathbf{Top}_*}(|X \wedge Y|, W) \\ &\simeq \mathrm{Hom}_{\mathbf{Top}_*}(|X| \wedge |Y|, W) \text{ car } |\cdot| \text{ commute aux limites finies} \\ &\simeq \mathrm{Hom}_{\mathbf{Top}_*}(|X|, \mathbf{Hom}_{\mathbf{Top}_*}(|Y|, W)) \\ &\simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{S}_*}(X, \mathrm{Sing}(\mathbf{Hom}_{\mathbf{Top}_*}(|Y|, W))) \end{aligned}$$

et de Yoneda. □

COROLLAIRE 5.3.5. *Pour tout espace topologique $W \in \mathbf{Top}_*$ et tout $n \geq 0$, la flèche naturelle*

$$\pi_n^s(\mathrm{Sing}(W)) \longrightarrow \pi_n(W)$$

est un isomorphisme.

DÉMONSTRATION. On connaît déjà le cas $n = 0$. Le cas général s'en déduit à partir du lemme précédent :

$$\pi_n^s(\text{Sing}(W)) = \pi_0^s(\mathbf{Hom}_{\mathcal{S}_*}(S_s^n, \text{Sing}(S^1))) = \pi_0^s(\text{Sing}(\Omega^n W)) = \pi_0(\Omega^n W) = \pi_n(W) .$$

□

COROLLAIRE 5.3.6. $\pi_1^s(\text{Sing}(S^1)) \simeq \mathbb{Z}$.

Par ailleurs, le lemme suivant découle de la définition de S_s^n :

LEMME 5.3.7.

$$\mathbf{Hom}_{\mathcal{S}_*}(S_s^n, X) \simeq \{x \in X_n / \forall i \in \{0, \dots, n\}, d_i(x) = *\}.$$

$$f \longrightarrow f(\bar{t}_n)$$

Ainsi $\mathbf{Hom}_{\mathcal{S}_*}(S_s^1, S_s^1)_1 = \{x \in S_{s,1}^1 / d_0(x) = d_1(x) = *\} = \{*, \bar{t}_1\}$ et

$$\pi_1^s(S_s^1) = S^0$$

□

Remarquons que c'est l'espace $\text{Sing}(S_s^1)$ qui possède le « bon type d'homotopie » (c'est-à-dire celui de S^1), et non pas S_s^1 .

6. Fibrations de Kan

6.1. Définitions. La différence principale entre \mathcal{S} et **Top** tient à la remarque suivante. La réalisation topologique $|\Lambda^k[n]| \longrightarrow \Delta^n$ de l'inclusion $\Lambda^k[n] \subset \Delta[n] \in \mathcal{S}$ est une cofibration acyclique de **Top** (en fait un rétracte par déformation). Comme tout objet $Y \in \mathbf{Top}$, en particulier tout $|X|$ pour $X \in \mathcal{S}$, est fibrant, le diagramme

$$\begin{array}{ccc} |\Lambda^k[n]| & \longrightarrow & |X| \\ \downarrow \sim & \nearrow & \downarrow \\ |\Delta[n]| & \longrightarrow & \{*\} \end{array}$$

admet un relèvement.

PROBLÈME 6.1.1. *Pour la plupart des objets $X \in \mathcal{S}$, il existe un diagramme*

$$\begin{array}{ccc} \Lambda^k[n] & \longrightarrow & X \\ \downarrow \sim & \nearrow & \downarrow \\ \Delta[n] & \longrightarrow & \{*\} \end{array}$$

n'admettant pas de relèvement.

DÉFINITION 6.1.2 (Fibration de Kan). *La flèche $f : X \rightarrow Y \in \mathcal{S}$ est une fibration de Kan si pour tout $0 \leq k \leq n > 0$ tout diagramme*

$$\begin{array}{ccc} \Lambda^k[n] & \longrightarrow & X \\ \downarrow & \nearrow & \downarrow \\ \Delta[n] & \longrightarrow & Y \end{array}$$

admet un relèvement.

De manière équivalente, pour tout n -uplet de $(n - 1)$ -simplexes $(x_0, \dots, \hat{x}_k, \dots, x_n) \in X_{n-1}$ tels que $d_i x_j = d_{j-1} x_i$ pour $i < j$, $i, j \neq k$, il existe un n -simplexe $x \in X_n$ avec $d_i x = x_i$.

Si $f : X \rightarrow Y$ est une fibration de Kan, on notera $f : X \rightarrow Y$.

EXEMPLE 6.1.3. Le n -simplexe standard $\Delta[n]$ n'est pas fibrant.

DÉMONSTRATION. Le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \Lambda^0[2] & \xrightarrow{\phi} & \Delta[2] \\ \downarrow \sim & & \downarrow \\ \Delta[2] & \longrightarrow & \{*\} \end{array}$$

où ϕ envoie 0 sur 0, 1 sur 1 et 2 sur 0, n'admet pas de relèvement. □

6.2. Exemples.

PROPOSITION 6.2.1. *Les objets suivants de \mathcal{S} sont fibrants au sens de Kan :*

- (1) $\text{Sing}(Y)$ pour $Y \in \mathbf{Top}$.
- (2) les groupes abéliens simpliciaux.
- (3) NG si G désigne un groupoïde.

DÉMONSTRATION. Pour (1) il suffit de remarquer que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \Lambda^k[n] & \longrightarrow & \text{Sing}(Y) \\ \downarrow & \nearrow & \downarrow \\ \Delta[n] & \longrightarrow & \{*\} \end{array}$$

est équivalent par adjonction au diagramme

$$\begin{array}{ccc} |\Lambda^k[n]| & \longrightarrow & Y \\ \downarrow & \nearrow & \downarrow \\ |\Delta[n]| & \longrightarrow & \{*\} \end{array}$$

qui admet toujours un relèvement.

Pour (2), c'est un corollaire immédiat du

LEMME 6.2.2. *Soit $f : G \rightarrow H$ un morphisme de groupes simpliciaux. Si f est surjectif alors f est une fibration de Kan dans \mathcal{S} .*

DÉMONSTRATION. Considérons un diagramme :

$$\begin{array}{ccc} \Lambda^k[n] & \xrightarrow{\phi} & G \\ \downarrow & \nearrow & \downarrow f \\ \Delta[n] & \xrightarrow{\psi} & H \end{array} .$$

La donnée de ϕ est équivalente à la donnée d'éléments g_i pour $i \neq k$, satisfaisant

$$d_i(g_j) = d_{j-1}(g_i), \quad i < j, \quad i, j \neq k.$$

Soit $h \in H_n$ représentant ψ . Le diagramme s'écrit alors $f(g_i) = d_i(h)$, l'existence d'un relèvement équivaut à l'existence d'un élément $g \in G_n$ tel que $d_i(g) = g_i$ et $f(g) = h$.

On construit g par approximation successives. Comme f est surjective, il existe $u \in G_n$ avec $f(u) = h$.

LEMME 6.2.3. *Soit X un groupe simplicial, $x \in X_n$ et $y_i \in X_{n-1}$. Il existe $x' \in X_n$ vérifiant $d_j x' = d_j x$ pour $j < i$ et $d_i(x') = y_i$.*

DÉMONSTRATION. On pose $x' = x \cdot s_i((d_i x)^{-1} \cdot y_i)$. □

En appliquant $n - 1$ fois le lemme à $x = u$ et $y_i = d_i h$, on obtient g avec les dérivées attendues, et qui vérifie encore $f(g) = f(u) = h$. □

L'assertion (3) est laissée en exercice. □

6.3. Propriétés des fibrations et objets fibrants. Dans cette section, on indique comment les difficultés de l'homotopie simpliciale disparaissent pour les objets fibrants.

6.3.1. *Relation d'équivalence sur X_0 , X fibrant.*

LEMME 6.3.1. *Soit $X \in \mathcal{S}$ fibrant. Alors la relation « être reliés par un chemin » sur X_0 est une relation d'équivalence.*

DÉMONSTRATION. Commençons par une convention de notation. Si $x \in X_n$ on note $\partial x = (d_0 x, \dots, d_n x)$.

Montrons la transitivité. Soit $v_2 \in X_1$ avec $\partial v_2 = (y, x)$ et $v_0 \in X_1$ avec $\partial v_0 = (z, y)$. En particulier $d_0 v_2 = d_1 v_0$ et il existe donc une application $(v_0, v_2) : \Lambda^1[2] \rightarrow X$. Comme X est fibrant il existe un relèvement

$$\begin{array}{ccc} \Lambda^1[2] & \xrightarrow{(v_0, v_2)} & X \\ \downarrow & \nearrow \theta & \\ \Delta[2] & & \end{array} .$$

Mais alors

$$\begin{aligned} \partial(d_1 \theta) &= (d_0 d_1 \theta, d_1 d_1 \theta) = (d_0 d_0 \theta, d_1 d_2 \theta) \\ &= (d_0 v_0, d_1 v_2) = (z, x). \end{aligned}$$

Montrons la symétrie. Supposons $\partial v_2 = (y, x)$. Notons $v_1 = s_0 x$, donc $d_1 v_1 = d_1 v_2$ et il existe un morphisme $(v_1, v_2) : \Lambda^0[2] \rightarrow X$. Comme X est fibrant il existe un relèvement

$$\begin{array}{ccc} \Lambda^1[2] & \xrightarrow{(v_1, v_2)} & X \\ \downarrow & \nearrow \theta & \\ \Delta[2] & & \end{array} .$$

Mais alors

$$\partial(d_0 \theta) = (d_0 d_0 \theta, d_1 d_0 \theta) = (d_0 d_1 \theta, d_0 d_2 \theta) = (x, y) .$$

□

6.3.2. Extension anodines.

DÉFINITION 6.3.2. Une classe M de monomorphismes de \mathcal{S} est dite saturée si elle est fermée par isomorphismes, pushout arbitraire, rétraction, composition dénombrables (i.e. si $A_1 \rightarrow A_2 \rightarrow \dots$ avec chacun des $A_i \rightarrow A_{i+1}$ dans M , alors $A_1 \rightarrow \operatorname{colim} A_i \in M$), et sommes directes petites (si $A_i \rightarrow B_i$, $i \in I$ sont des flèches de M , alors $\coprod A_i \rightarrow \coprod B_i$ également).

DÉFINITION 6.3.3. Soit L une classe de monomorphismes de \mathcal{S} . Le saturé M_L de L est l'intersection de toutes les classes saturées de monomorphismes contenant L .

LEMME 6.3.4. Soit L une classe de monomorphismes de \mathcal{S} et $f : X \rightarrow Y$ ayant la propriété de relèvement à droite relativement aux flèches de L . Alors f a la propriété de relèvement à droite relativement aux flèches du saturé M_L de L .

DÉMONSTRATION. C'est un exercice formel facile. □

PROPOSITION 6.3.5. Les classes de monomorphismes

- $J = \{\Lambda^k[n] \hookrightarrow \Delta[n], 0 \leq k \leq n, n \geq 0\}$,
- $\{(\Delta[1] \times \partial \Delta[n]) \cup (\{i\} \times \Delta[n]) \hookrightarrow (\Delta[1] \times \Delta[n]), i = 0, 1\}$,
- $\{(\Delta[1] \times Y) \cup (\{i\} \times X) \subset (\Delta[1] \times X), Y \subset X \in \mathcal{S}, i = 0, 1\}$

ont mêmes classe de saturation, appelée la classe des extensions anodines (les futures cofibrations acycliques).

DÉMONSTRATION. ce n'est malheureusement pas immédiat, c.f. [4, prop. 4.2] □

COROLLAIRE 6.3.6. Les fibrations de Kan sont les flèches de \mathcal{S} ayant la propriété de relèvement à droite relativement aux extensions anodines.

LEMME 6.3.7. Soit $i : K \xrightarrow{\sim} L$ une extension anodine et $Y \subset X$ une inclusion arbitraire. Alors l'application naturelle

$$(K \times X) \cup (L \times Y) \rightarrow L \times X$$

est une extension anodine.

DÉMONSTRATION. Remarquons que la classe M de morphismes $K' \rightarrow L'$ tels que

$$(K' \times X) \cup (L' \times Y) \rightarrow L \times X$$

est anodine est saturée. Notons que M contient les inclusions

$$K' = (\Delta[1] \times Y')(\{i\} \times X') \subset L' = (\Delta[1] \times X'),$$

pour tout $Y' \subset X'$ et $i \in \{0, 1\}$: en effet

$$\begin{array}{ccc} (K' \times X) \cup (L' \times Y) & \longrightarrow & L' \times X \\ \downarrow \simeq & & \downarrow \simeq \\ \Delta[1] \times ((Y' \times X) \cup (X' \times Y)) \cup (\{i\} \times (X' \times X)) & \longrightarrow & \Delta[1] \times (X' \times X) \end{array}$$

et la flèche inférieure est bien anodine d'après la proposition 6.3.5. Comme le saturé des tels $K' \rightarrow L'$ est la classe des extensions anodines, la classe M contient toutes les extensions anodines. \square

6.3.3. Structure de groupe pour l'homotopie simpliciale des objets fibrants.

THÉORÈME 6.3.8. *Soit $X \in \mathcal{S}_*$ fibrant. Alors $\pi_n(X)$, $n \geq 1$, est un groupe, abélien si $n \geq 2$.*

DÉMONSTRATION. Indiquons brièvement la construction. Soit $\alpha, \beta : \Delta[n] \rightarrow X$ deux flèches représentant des éléments $[\alpha], [\beta]$ de $\pi_n(X)$ (en particulier $\alpha, \beta : \partial\Delta[n] \rightarrow *$). Le $(n+1)$ -uplet de n -simplexes

$$(v_0 = *, \dots, v_{n-2} = *, v_{n-1} = \alpha, \widehat{v_n}, v_{n+1} = \beta)$$

satisfait alors $d_i v_j = d_{j-1} v_i$ pour $i < j$, $i, j \neq n$ (car toutes les faces des v_i factorisent à travers $*$). Comme X est fibrant il existe une extension

$$\begin{array}{ccc} \Lambda^n[n+1] & \xrightarrow{(v_0, \dots, v_{n-1}, \widehat{v_n}, v_{n+1})} & X \\ \downarrow & \nearrow \omega & \\ \Delta[n+1] & & \end{array} .$$

On calcule aisément que $\partial(d_n \omega) = (*, \dots, *)$ donc $d_n \omega$ représente un élément de $\pi_n(X)$.

Montrons que cet élément est indépendant du choix des représentants de $[\alpha]$ et $[\beta]$. Soient $h_{n-1} : \Delta^n \times \Delta[1] \rightarrow X$ une homotopie relativement à $\partial\Delta_n$ reliant α à α' et $h_{n+1} : \Delta^n \times \Delta[1] \rightarrow X$ une homotopie relativement à $\partial\Delta_n$ reliant β à β' . Notons ω et ω' des $(n+1)$ -simplexes de X obtenus comme précédemment tels que

$$\partial\omega = (*, \dots, *, \alpha, d_n \omega, \beta) \quad \text{et} \quad \partial\omega' = (*, \dots, *, \alpha', d_n \omega', \beta') .$$

Choisissons alors une extension

$$\begin{array}{ccc} (\Delta^{n+1} \times \partial\Delta[1]) \cup (\Lambda^n[n+1] \times \Delta[1]) & \xrightarrow{(\omega', \omega, (*, \dots, *, h_{n-1}, \widehat{h_{n+1}}))} & X \\ \downarrow \sim & \nearrow f & \\ \Delta^{n+1} \times \Delta[1] & & \end{array} ,$$

où la flèche vertical est une extension anodine par le lemme 6.3.7. La composition

$$\Delta[n] \times \Delta[1] \xrightarrow{d_n \times \text{Id}} \Delta[n+1] \times \Delta[1] \xrightarrow{f} X$$

est une homotopie relativement à $\partial\Delta[n]$ reliant $d_n \omega$ à $d_n \omega'$.

On obtient ainsi une application $\pi_n(X) \times \pi_n(X) \rightarrow \pi_n(X)$, dont on laisse vérifier par les mêmes méthodes qu'elle est associative, définit une loi de groupe, puis est commutative pour $n \geq 2$ (c.f. [4, p.27-]) \square

6.3.4. *Fibrations et \mathbf{Hom} -internes.*

PROPOSITION 6.3.9. *Soit $p : X \rightarrow Y \in \mathcal{S}$ une fibration et $i : K \hookrightarrow L \in \mathcal{S}$ une inclusion. Alors la flèche*

$$\mathbf{Hom}_{\mathcal{S}}(L, X) \longrightarrow \mathbf{Hom}_{\mathcal{S}}(K, X) \times_{\mathbf{Hom}_{\mathcal{S}}(K, Y)} \mathbf{Hom}_{\mathcal{S}}(L, Y)$$

est une fibration.

COROLLAIRE 6.3.10. (1) *Si $p : X \rightarrow Y \in \mathcal{S}$ est une fibration, alors pour tout $L \in \mathcal{S}$, la flèche $p_* : \mathbf{Hom}_{\mathcal{S}}(L, X) \rightarrow \mathbf{Hom}_{\mathcal{S}}(L, Y)$ est également une fibration.*

(2) *Si X est fibrant et $i : K \hookrightarrow L \in \mathcal{S}$ une inclusion alors $i^* : \mathbf{Hom}_{\mathcal{S}}(L, X) \rightarrow \mathbf{Hom}_{\mathcal{S}}(K, X)$ est une fibration.*

DÉMONSTRATION. Pour la proposition, il suffit de noter qu'un diagramme de la forme

$$\begin{array}{ccc} \Lambda^k[n] & \longrightarrow & \mathbf{Hom}_{\mathcal{S}}(L, X) \\ \downarrow & \dashrightarrow & \downarrow \\ \Delta[n] & \longrightarrow & \mathbf{Hom}_{\mathcal{S}}(K, X) \times_{\mathbf{Hom}_{\mathcal{S}}(K, Y)} \mathbf{Hom}_{\mathcal{S}}(L, Y) \end{array}$$

est équivalent par adjonction à un diagramme de la forme

$$\begin{array}{ccc} (\Lambda^k[n] \times L) \cup_{(\Lambda^k[n] \times K)} (\Delta[n] \times K) & \longrightarrow & X \\ \downarrow j & \dashrightarrow & \downarrow p \\ \Delta[n] \times L & \longrightarrow & Y \end{array}$$

Ce dernier admet un relèvement puisque p est une fibration et j est une extension anodine.

Pour le corollaire (1), on applique la proposition à $K = \emptyset$: dans ce cas $\mathbf{Hom}_{\mathcal{S}}(\emptyset, V) = *$ pour tout $V \in \mathcal{S}$ et le produit fibré n'est autre que $\mathbf{Hom}_{\mathcal{S}}(L, Y)$.

Pour le corollaire (2) : on prend cette fois $Y = *$, le produit fibré est $\mathbf{Hom}_{\mathcal{S}}(K, X)$. \square

6.3.5. *Objets fibrants et homotopies.*

COROLLAIRE 6.3.11. *Soit $X \in \mathcal{S}$ fibrant et $K \in \mathcal{S}$. Alors l'homotopie simpliciale est une relation d'équivalence sur les applications de K dans X .*

DÉMONSTRATION. Cela revient à dire que la relation \sim est une relation d'équivalence sur $\mathbf{Hom}_{\mathcal{S}}(K, X)$. Comme X est fibrant, $\mathbf{Hom}_{\mathcal{S}}(K, X)$ également d'après la proposition précédente. D'où le résultat d'après le lemme 6.3.1. \square

7. \mathcal{S} comme catégorie de modèle à engendrement cofibrant

Notons :

- $\mathcal{W} = \{f : X \rightarrow Y \in \mathcal{S} \mid |f| : |X| \rightarrow |Y| \text{ est une équivalence faible de } \mathbf{Top}\}$.
- $I = \{\partial\Delta[n] \rightarrow \Delta[n], n \geq 0\}$.
- $J = \{\Lambda^k[n] \rightarrow \Delta[n], n > 0, 0 \leq k \leq n\}$.

Avec nos notations précédentes, la classe des fibrations de Kan s'identifie à $J - inf$, et la classe des extensions anodines à $J - cof$.

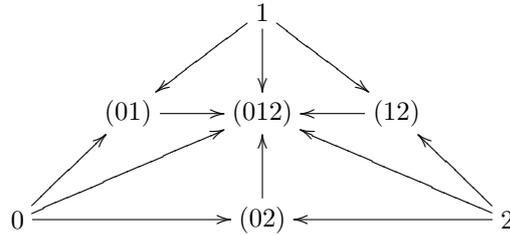
On a vu que le problème pour définir un relèvement de ce diagramme est que la rétraction naturelle de $|\Lambda^0[2]| \hookrightarrow |\Delta[2]|$ consistant à repousser le milieu de l'arête $[12]$ sur 0 est impossible simplicialement pour des raisons d'ordre. Kan résoud ce problème par division barycentrique.

8.1. Subdivision dans \mathcal{S} . Remarquons que l'ensemble des simplexes non-dégénérés de $\Delta[n]$ est naturellement partiellement ordonné. On le note $\text{nd } \Delta[n] \in \mathbf{Cat}$.

DÉFINITION 8.1.1. On pose $\text{sd } \Delta[n] = N(\text{nd } \Delta[n])$ le nerf de $\text{nd } \Delta[n]$.

EXEMPLE 8.1.2. (a) $\text{sd } \Delta[1] = 0 \longrightarrow (01) \longleftarrow 1$.

(b) $\text{sd } \Delta[2] =$



On obtient ainsi un espace cosimplicial

$$\text{sd} : \mathbf{\Delta} \longrightarrow \mathcal{S} .$$

Cet espace cosimplicial induit une adjonction

$$\text{sd} : \mathcal{S} \rightleftarrows \mathbf{S} : \text{Ex}$$

définie par

$$\text{sd}(X) = \text{colim}_{\Delta[n] \rightarrow X} \text{sd } \Delta[n] \quad \text{et} \quad \text{Ex}(X)_n = \text{Hom}_{\mathcal{S}}(\text{sd } \Delta[n], X) .$$

8.1.1. *L'application dernier sommet.* On définit $\text{lv} : \text{sd } \Delta[n] \longrightarrow \Delta[n]$ comme l'application déduite après passage au nerf de l'application $\text{nd } \Delta[n] \longrightarrow \mathbf{n}$ qui à un simplexe non-dégénéré (i_0, \dots, i_m) de $\Delta[n]$ associe $i_m \in \mathbf{n}$.

Elle s'étend en une application $\text{lv} : \text{sd } X \longrightarrow X$ dont l'adjointe est $j : X \longrightarrow \text{Ex } X$.

DÉFINITION 8.1.3. On pose

$$\text{Ex}^\infty(X) = \text{colim}(X \xrightarrow{j} \text{Ex } X \xrightarrow{j} \text{Ex}^2 X \longrightarrow \dots) .$$

PROPOSITION 8.1.4. *Le foncteur Ex^∞ possède les propriétés suivantes :*

- (1) $\text{Ex}^\infty(X)$ est fibrant pour tout $X \in \mathcal{S}$.
- (2) $j_X : X \xrightarrow{\sim} \text{Ex}^\infty(X)$ est un remplacement fibrant.
- (3) Ex^∞ préserve les fibrations et les limites finies.
- (4) Ex^∞ préserve les 0-simplexes.

9. Catégories de modèles simpliciales

Une catégorie de modèle simpliciale est une catégorie de modèle \mathcal{C} munie d'une notion d'espace de morphisme $\text{Map}_{\mathcal{C}}(A, B) \in \mathcal{S}$ pour tous objets $A, B \in \mathcal{C}$ qui fait sens homotopiquement.

9.1. Catégorie simpliciale.

DÉFINITION 9.1.1 (Catégorie simpliciale). *Une catégorie simpliciale \mathcal{C} est une catégorie munie d'un bifoncteur*

$$\text{Map}_{\mathcal{C}} : \mathcal{C}^{\text{op}} \times \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{S}$$

tel que :

- (a) $\text{Map}_{\mathcal{C}}(A, B)_0 = \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$ pour tous $A, B \in \mathcal{C}$.
- (b) Le foncteur $\text{Map}_{\mathcal{C}}(A, \cdot) : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{S}$ admet un adjoint à gauche :

$$A \otimes \cdot : \mathcal{S} \rightleftarrows \mathcal{C} : \text{Map}_{\mathcal{C}}(A, \cdot) \quad .$$

- (c) Le foncteur $\text{Map}_{\mathcal{C}}(\cdot, B) : \mathcal{C}^{\text{op}} \longrightarrow \mathcal{S}$ admet un adjoint à gauche :

$$\mathbf{hom}_{\mathcal{C}}(\cdot, B) : \mathcal{S} \rightleftarrows \mathcal{C}^{\text{op}} : \text{Map}_{\mathcal{C}}(\cdot, B) \quad .$$

EXEMPLE 9.1.2. Bien-sûr \mathcal{S} est une catégorie simpliciale, avec

$$\text{Map}_{\mathcal{S}}(A, B) = \mathbf{Hom}_{\mathcal{S}}(A, B) = \mathbf{hom}_{\mathcal{S}}(A, B) \quad .$$

LEMME 9.1.3. *Soit \mathcal{C} une catégorie simpliciale. Alors :*

- (1) Si $K \in \mathcal{S}$, on a une adjonction $\cdot \otimes K : \mathcal{C} \rightleftarrows \mathcal{C} : \mathbf{hom}_{\mathcal{C}}(K, \cdot)$.
- (2) Pour tous $A, B \in \mathcal{C}$, $\text{Map}_{\mathcal{C}}(A, B) \simeq \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A \otimes \Delta[\bullet], B)$. Autrement dit $\text{Map}_{\mathcal{C}}$ est déterminé par \otimes .
- (3) Pour tous $A, B, C \in \mathcal{C}$,

$$\text{Map}_{\mathcal{C}}(A, B) \times \text{Map}_{\mathcal{C}}(B, C) \longrightarrow \text{Map}_{\mathcal{C}}(A, C)$$

(autrement dit : la catégorie \mathcal{C} est enrichie en espaces).

- (4) On dispose d'adjonctions étendues : pour tous $A, B \in \mathcal{C}$ et $K \in \mathcal{S}$,

$$\text{Map}_{\mathcal{C}}(A \otimes K, B) \simeq \mathbf{Hom}_{\mathcal{S}}(K, \text{Map}_{\mathcal{C}}(A, B)) \quad \text{et} \quad \text{Map}_{\mathcal{C}}(A, \mathbf{hom}_{\mathcal{C}}(K, B)) \simeq \mathbf{Hom}_{\mathcal{S}}(K, \text{Map}_{\mathcal{C}}(A, B)) \quad .$$

DÉMONSTRATION. Exercice facile. □

La partie (2) du lemme suggère de définir une catégorie simpliciale uniquement en terme du produit \otimes :

LEMME 9.1.4. *Soit \mathcal{C} une catégorie et $\cdot \otimes \cdot : \mathcal{C} \times \mathcal{S} \longrightarrow \mathcal{C}$. Supposons les trois conditions suivantes :*

- (a) $\forall K \in \mathcal{S}$, le foncteur $\cdot \otimes K : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}$ admet un adjoint à droite $\mathbf{hom}_{\mathcal{C}}(K, \cdot)$.
- (b) $\forall A \in \mathcal{C}$, $A \otimes \cdot : \mathcal{S} \longrightarrow \mathcal{C}$ commute aux colimites arbitraires et $A \otimes * \simeq A$.
- (c) $A \otimes (K \times L) \simeq A \otimes K \otimes L$ naturellement en A, K, L .

Alors la catégorie \mathcal{C} munie de $\text{Map}_{\mathcal{C}}(A, B)_{\bullet} = \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A \otimes \Delta[\bullet], B)$ est une catégorie simpliciale.

THÉORÈME 9.1.5. *Soit \mathcal{C} une catégorie complète et cocomplète. Définissons*

$$\cdot \otimes \cdot : \Delta^{\text{op}}\mathcal{C} \times \mathcal{S} \longrightarrow \Delta^{\text{op}}\mathcal{C} \quad \text{par} \quad (A \otimes K)_n := \prod_{k \in K_n} A_n \quad .$$

Alors $\Delta^{\text{op}}\mathcal{C}$ est une catégorie simpliciale.

9.2. Catégorie de modèle simpliciale.

DÉFINITION 9.2.1. Soit \mathcal{C} une catégorie de modèle, munie d'une structure simpliciale. On dit que \mathcal{C} est une catégorie de modèle simpliciale si pour toute fibration $q : X \rightarrow Y \in \mathcal{C}$ et toute cofibration $i : A \hookrightarrow B \in \mathcal{C}$, alors

$$\mathrm{Map}_{\mathcal{C}}(B, X) \longrightarrow \mathrm{Map}_{\mathcal{C}}(A, X) \times_{\mathrm{Map}_{\mathcal{C}}(A, Y)} \mathrm{Map}_{\mathcal{C}}(B, Y)$$

est une fibration de \mathcal{C} , acyclique si i ou q l'est.

Cet axiome, dit **SM7**, est un renforcement de **CM4** : noter qu'un diagramme

$$\begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & X \\ \downarrow & & \downarrow \\ B & \longrightarrow & Y \end{array}$$

est un 0-simplexe dans

$$\mathrm{Map}_{\mathcal{C}}(A, X) \times_{\mathrm{Map}_{\mathcal{C}}(A, Y)} \mathrm{Map}_{\mathcal{C}}(B, Y),$$

la diagonale de relèvement étant un 0-simplexe dans $\mathrm{Map}_{\mathcal{C}}(B, X)$.

Nous avons démontré précédemment que \mathcal{S} est une catégorie de modèle simpliciale. Plus généralement :

THÉORÈME 9.2.2. Soit \mathcal{C} une catégorie de modèle. Supposons qu'il existe une adjonction

$$F : \mathcal{S} \rightleftarrows \mathbf{\Delta}^{\mathrm{op}}\mathcal{C} : G,$$

et que le foncteur G commute aux colimites filtrantes. Disons que $f : A \rightarrow B \in \mathbf{\Delta}^{\mathrm{op}}\mathcal{C}$ est :

- (a) une équivalence faible si Gf est une équivalence faible de \mathcal{S} .
- (b) une fibration si Gf est une fibration de Kan.

Alors $\mathbf{\Delta}^{\mathrm{op}}\mathcal{C}$ est une catégorie de modèle simpliciale.

Bibliographie

- [1] Aguilar M. ; Gitler S. ; Prieto C., Algebraic topology from a homotopical viewpoint. Universitext. Springer-Verlag, New York, 2002
- [2] Dold A., Thom R., Quasifaserungen und unendliche symmetrische Produkte, *Ann. of Math. (2)* **67** (1958) 239-281
- [3] Gabriel P. ; Zisman M., Calculus of fractions and homotopy theory. Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, Band 35 Springer-Verlag New York, Inc., New York 1967
- [4] Goerss P.G., Jardine J.F., Simplicia homotopy theory, Progress in Math. **174**, Birkhäuser, 1999
- [5] Hatcher A., Algebraic topology. Cambridge University Press, Cambridge, 2002
- [6] Hurewicz W., On the concept of fiber space, *Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A.* **41** (1955), 956-961
- [7] McCord M.C., Classifying spaces and infinite symmetric products, *Trans. A.M.S* **146** (1969) 273-298
- [8] May J.P., The geometry of iterated loop spaces. Lectures Notes in Mathematics, Vol. 271. Springer-Verlag, Berlin-New York, 1972
- [9] Milnor J., On spaces having the homotopy type of a CW-complex, *Trans. A.M.S* **90** (1959) 272-280
- [10] Spaltenstein N., Resolutions of unbounded complexes, *Compositio Math.* **65** (1988), no. 2, 121–154
- [11] Steenrod N., A convenient category of topological spaces, *Michigan Journal of Math.* **14** (1967) 133-152
- [12] Strom A., Notes on cofibrations II, *Math. Scand.* **22** (1968) 130-142