

Complétude des Variétés Lorentziennes à Courbure Constante

Bruno KLINGLER*

Résumé. Nous montrons qu'une variété lorentzienne compacte à courbure constante est géodésiquement complète.

Abstract. We show here that a compact Lorentz manifold with constant curvature is geodesically complete.

Introduction

Rappelons qu'une variété lorentzienne M de dimension n est une variété \mathcal{C}^∞ munie d'une métrique lorentzienne g , c'est-à-dire d'un champ \mathcal{C}^∞ de formes bilinéaires symétriques non dégénérées g_x de signature $(n - 1, 1)$ sur l'espace tangent $T_x M$.

Il existe une unique connexion affine sans torsion sur le fibré tangent TM pour laquelle le déplacement parallèle définit une isométrie entre les espaces tangents (connexion de Levi-Civita). Les notions de géodésique, de courbure, de complétude géodésique sur M s'entendent relativement à cette connexion.

Il est notoire que la compacité d'une variété riemannienne implique sa complétude, mais que cette implication est fautive dans le cas lorentzien (exemple classique du tore de Clifton-Pohl). Une question naturelle est donc : quelle propriété suffisante demander à une variété lorentzienne compacte pour qu'elle soit complète ?

Nous montrons :

Théorème : *Toute variété M lorentzienne compacte à courbure constante est complète.*

Remarquons que, d'après un résultat classique de Calabi-Markus [1], il n'existe pas de variété lorentzienne compacte complète de courbure constante > 0 . On en déduit immédiatement le :

Corollaire : *Il n'existe pas de variété lorentzienne compacte de courbure constante > 0 .*

Ce théorème généralise un théorème de Kamishima [5], qui supposait l'existence sur M d'un champ de Killing de type temps. On consultera également un preprint de Mess

*Je remercie vivement Yves Benoist, sans qui ce travail n'aurait jamais abouti.

[6] lorsque M est de dimension 3. Morrill [7] a annoncé avoir montré qu'une variété lorentzienne compacte à courbure constante positive est complète. Surtout, Carrière [2] a montré qu'une variété lorentzienne compacte plate est complète. La démonstration du théorème utilise d'une manière essentielle les idées qu'il a développées à cette occasion.

Au §1 nous rappelons l'interprétation d'une géométrie lorentzienne à courbure constante en terme de (G, X) -structure. Le §2 définit une notion adéquate d'étoiles géodésiques dans \tilde{M} le revêtement universel de M et établit leur propriété principale : *grosso modo* elles sont convexes. Nous pouvons alors décrire au §3 la géométrie de \hat{M} le complété de \tilde{M} pour une certaine métrique riemannienne. Si M n'est pas géodésiquement complète (pour la métrique lorentzienne), \hat{M} est une variété à bord, dont le bord s'identifie à des hypersurfaces totalement géodésiques coisotropes de X . Nous concluons en montrant l'impossibilité de ce dernier cas au §4.

1 Préliminaires

L'hypothèse de courbure constante est très simplificatrice : elle "rigidifie" fortement la géométrie d'une variété. Précisément elle permet d'identifier une variété lorentzienne à courbure constante à une certaine (G, X) -variété.

1.1 (G, X) -variétés

Définition : Soit X une variété analytique, G un groupe de Lie agissant analytiquement sur X à gauche. Une variété C^∞ M est une (G, X) -variété si on se donne un atlas maximal de cartes $\phi_i : U_i \rightarrow X$ telles que :

- Les ouverts U_i recouvrent M .
- ϕ_i est un difféomorphisme sur son image.
- Les changements de cartes $\phi_{ij} = \phi_i \circ \phi_j^{-1} : \phi_j(U_i \cap U_j) \rightarrow \phi_i(U_i \cap U_j)$ sont localement des éléments de G .

Notons \tilde{M} le revêtement universel de la variété M , on a la définition équivalente :

Définition : Une variété M est une (G, X) -variété si on se donne un difféomorphisme local $D : \tilde{M} \rightarrow X$ appelé développante, et un morphisme de groupe $h : \pi_1 \tilde{M} \rightarrow G$ appelé morphisme d'holonomie tels que :

$$\forall \gamma \in \pi_1 \tilde{M} \quad D \circ \gamma = h(\gamma) \circ D$$

Le groupe $\Gamma = h(\pi_1 \tilde{M})$ est appelé groupe d'holonomie de M .

Pour une (G, X) -variété, on dispose d'une notion naturelle de complétude :

Définition : Une (G, X) -variété M est dite complète si la développante $D : \tilde{M} \rightarrow X$ est un revêtement sur X .

Si M est une (G, X) -variété complète et si X est simplement connexe, D est alors un difféomorphisme sur X , le groupe fondamental $\pi_1 M$ s'identifie au groupe Γ et M au quotient $\Gamma \backslash X$.

Pour plus ample information, on consultera par exemple [3].

1.2 Hyperquadriques

Les variétés modèles X dans le cas d'une géométrie lorentzienne à courbure constante K s'obtiennent d'une manière géométrique simple (on pourra consulter [8]) :

Sur l'espace vectoriel \mathbb{R}^{n+1} , on définit deux formes bilinéaires symétriques indicées par $K = \pm 1$.

$$Q_K^{n+1}(x, y) = K(x_1 y_1 + \cdots + x_{n-1} y_{n-1} - x_{n+1} y_{n+1}) + x_n y_n$$

On considère alors les trois variétés suivantes :

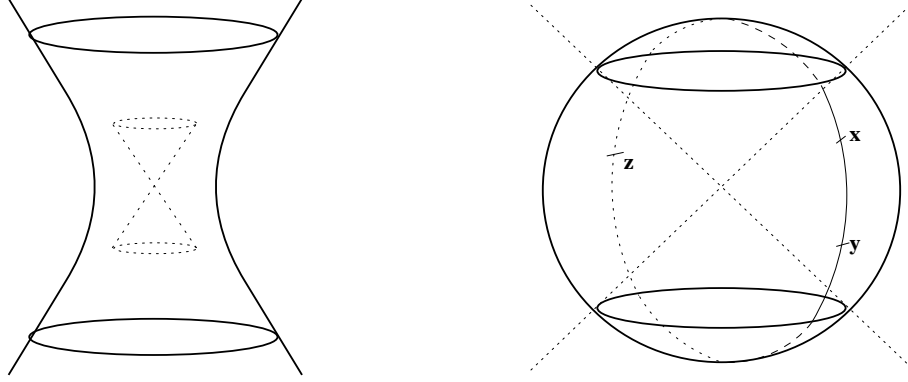
- $\mathbb{R}^{n-1,1}$ est l'espace \mathbb{R}^n muni de la métrique lorentzienne induite par Q_1^n : c'est une n-variété lorentzienne complète plate.
- pour $K = \pm 1$, $S_K^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1}; Q_K(x, x) = 1\}$: S_K^n , muni de la métrique induite par KQ_K^{n+1} , est une n-variété lorentzienne complète connexe de courbure constante K . S_1^n est appelé espace de De Sitter, S_{-1}^n espace Anti De Sitter.

Le sous-groupe orthogonal $O(n-1, 2)$ de $GL(n+1, \mathbb{R})$ préservant la forme Q_{-1}^{n+1} est le groupe des isométries de S_{-1}^n , il agit transitivement sur S_{-1}^n ; le sous-groupe d'isotropie du point $(0, \dots, 0, 1)$ de S_{-1}^n est $O(n-1, 1)$, S_{-1}^n s'identifie ainsi à l'espace homogène $O(n-1, 2)/O(n-1, 1)$. De même, le sous groupe orthogonal $O(n, 1)$ de $GL(n+1, \mathbb{R})$ préservant la forme Q_1^{n+1} est le groupe des isométries de S_1^n , il agit transitivement sur S_1^n ; le sous-groupe d'isotropie du point $(0, \dots, 0, 1)$ de S_1^n est encore $O(n-1, 1)$, S_1^n s'identifie ainsi à l'espace homogène $O(n, 1)/O(n-1, 1)$. Enfin, $\mathbb{R}^{n-1,1}$ s'identifie évidemment à l'espace homogène $(O(n-1, 1) \times \mathbb{R}^n)/O(n-1, 1)$.

Les géodésiques de $\mathbb{R}^{n-1,1}$ sont les droites affines de \mathbb{R}^n . Une géodésique de S_K^n est l'intersection d'un 2-plan vectoriel de \mathbb{R}^{n+1} avec S_K^n . On en déduit aisément que, pour deux points x et y de S_K^n :

- si $Q_K^{n+1}(x, y) > 1$, x et y sont reliés par une unique géodésique de S_K^n , c'est une branche d'hyperbole.
- si $Q_K^{n+1}(x, y) = 1$, x et y sont reliés par une unique géodésique de S_K^n , c'est une droite.
- si $-1 < Q_K^{n+1}(x, y) < 1$, x et y sont reliés par une unique géodésique de S_K^n , c'est une ellipse.
- si $Q_K^{n+1}(x, y) \leq -1$, x et y ne sont pas reliés géodésiquement dans S_K^n (sauf si $x = -y$).

Figure 1: S_K^n vu dans R^{n+1} ou dans la sphère des demi-droites de R^n .
Le point x voit y mais pas z .



1.3 Géométrie pseudo-riemannienne à courbure constante et (G, X) -variétés

L'étude de la complétude des variétés lorentziennes à courbure constante K se réduit évidemment à l'étude des trois cas $K = -1$, $K = 0$, $K = 1$. Utilisant la classification par Wolf des variétés pseudo-riemanniennes à courbure constante complètes simplement connexes, et un argument classique de monodromie (cf. par exemple [9, theoreme 2.3.12]), on identifie une variété lorentzienne $M^{n-1,1}$ à courbure constante K à une (G, X) -variété, où (G, X) s'identifie à :

- si $K = -1$, $(O(n-1, 2), S_{-1}^n)$
- si $K = 0$, $(O(n-1, 1) \propto \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^{n-1,1})$
- si $K = 1$, $(O(n, 1), S_1^n)$

La complétude géodésique de M équivaut à sa complétude comme (G, X) -variété.

Soit donc (G, X) l'une des géométries précédentes et M une (G, X) -variété connexe de développante $D : \tilde{M} \rightarrow X$, il nous faut montrer que M est complète. Nous adopterons les notations suivantes :

- si \tilde{x} désigne un point de \tilde{M} , x est son image $D(\tilde{x})$ dans X .
- E désigne l'espace euclidien ambiant, $E = \mathbb{R}^n$ dans le cas plat, $E = \mathbb{R}^{n+1}$ si $K = \pm 1$.
- Le produit $x.y$ désigne $Q_{-1}^{n+1}(x, y)$, $Q_1^n(x, y)$, $Q_1^{n+1}(x, y)$ respectivement pour les cas $K = -1$, $K = 0$, $K = 1$.

2 Convexité des étoiles de \tilde{M} .

2.1 Etoiles géodésiques.

Montrer la complétude de M commence avec une étude locale : on cherche à travailler sur un voisinage “plaisant” de chacun des points de \tilde{M} s’identifiant naturellement à son image dans X . La développante D étant une isométrie locale, les étoiles géodésiques de \tilde{M} fournissent de tels voisinages. A ceci près que les étoiles maximales sont trop “grosses” : sauf dans le cas plat, deux points de X peuvent être reliés par plus d’un arc géodésique, ce qui complique l’opération d’identification. Pour parer à cet inconvénient, nous adoptons les définitions suivantes :

Définitions :

- Dans le cas $K = 0$, on dispose de la notion habituelle de segment (fermé) de $X = E$. Dans les cas $K = \pm 1$, on appellera segment de X un arc géodésique (fermé) de X ne contenant l’antipodal (dans E) d’aucun de ses points. Deux points x et y de X sont reliés au plus par un segment, noté $[x, y]$ s’il existe. On dira alors que x voit y , cette relation est évidemment symétrique et ouverte.
- Etant donné un point x de X on appelle étoile de x et on note X_x l’ensemble des points vus par x . L’étoile X_x est un ouvert de X , d’après la discussion du paragraphe 1.2 :
 - pour $X = S_K^n$, $X_x = \{y \in X; Q_K^{n+1}(x, y) > -1\}$.
 - pour $X = \mathbb{R}^{n-1,1}$, $X_x = X$.

On définit des notions analogues dans \tilde{M} :

- On appelle segment de \tilde{M} un arc géodésique (fermé) de \tilde{M} s’identifiant par D à un segment de X . Deux points \tilde{x} et \tilde{y} de \tilde{M} sont alors reliés au plus par un segment noté $[\tilde{x}, \tilde{y}]$ s’il existe. On dira encore que \tilde{x} voit \tilde{y} , cette relation est symétrique et ouverte.
- Etant donné un point \tilde{x} de \tilde{M} on appelle étoile de \tilde{x} et on note $\tilde{M}_{\tilde{x}}$ l’ensemble des points vus par \tilde{x} . $\tilde{M}_{\tilde{x}}$ est un ouvert de \tilde{M} .

Enfin, donnons la définition des ensembles les plus simples sur lesquels travailler dans X et \tilde{M} :

- Un ensemble C de X (ou \tilde{M}) sera dit simplement convexe si deux de ses points sont toujours reliés par un segment contenu dans C .

Remarque : Par construction, $D(\tilde{M}_{\tilde{x}})$ est contenu dans X_x . Surtout, tout a été fait pour avoir le lemme suivant :

Lemme 1 *L’application D restreinte à $\tilde{M}_{\tilde{x}}$ est injective.*

DÉMONSTRATION : Prenons \tilde{y} et \tilde{z} deux points de $\tilde{M}_{\tilde{x}}$ de même image par D . Mais alors les segments $[\tilde{x}, \tilde{y}]$ et $[\tilde{x}, \tilde{z}]$ ont même image dans X (par unicité du segment entre deux points). Comme ils ont même origine et que D est un difféomorphisme local, ils coïncident. Donc : $\tilde{y} = \tilde{z}$. \diamond

Autrement dit, $\tilde{M}_{\tilde{x}}$ s'identifie par D à un ouvert de X , inclus dans X_x .

2.2 Une propriété de $O(n-1,1)$.

Pour montrer que la développante $D : \tilde{M} \rightarrow X$ est un revêtement, la première idée est de tenter d'identifier l'étoile $\tilde{M}_{\tilde{x}}$ de \tilde{M} à l'étoile X_x dans X . En fait, nous montrons un résultat plus faible.

Définition : *Étant données deux parties C_1 et C_2 de X telles que $C_1 \subset C_2$, C_1 sera dite convexe relativement à C_2 si tout segment dans C_2 reliant deux points de C_1 est inclus dans C_1 .*

Nous allons montrer que pour tout point \tilde{x} de \tilde{M} l'ouvert $D(\tilde{M}_{\tilde{x}})$ est convexe relativement à l'étoile X_x (Proposition 1). Ceci utilise essentiellement une propriété très simple du groupe $O(n-1,1)$, soulignée par Carrière [2] :

Lemme 2 *Soit g un élément de $O(n-1,1)$ et B la boule euclidienne unité de E . Alors $g.B$ est un ellipsoïde dont les axes principaux ont pour longueur $e^t, 1, \dots, 1, e^{-t}$ pour un réel $t \geq 0$.*

DÉMONSTRATION : Notons a_t l'élément
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \cdot & \vdots \\ \cdot & \ddots & 1 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & 0 & \cosh t & \sinh t \\ 0 & 0 & 0 & \sinh t & \cosh t \end{bmatrix}$$
 de $O(n-1,1)$ et

$A^+ = \{a_t ; t \in R^+\}$. On a la décomposition de Cartan $O(n-1,1) = O(n-1)A^+O(n-1)$. Soit g un élément de $O(n-1,1)$, $g = k_1.a_t.k_2$ sa décomposition. Le résultat s'en déduit immédiatement. \diamond

Soit alors E muni de sa métrique euclidienne standard, (F_i) une suite de fermés de E . On dira que la suite (F_i) converge si pour toute boule euclidienne B de E , la suite de compacts $(F_i \cap B)$ converge vers un compact de E pour la distance de Hausdorff.

Un ellipsoïde (plein) est la boule unité (compacte) d'une certaine forme quadratique définie positive sur E . Appelons \mathcal{E} l'ensemble des ellipsoïdes de E , on montre qu'une suite (ε_i) de \mathcal{E} qui converge a pour limite un ellipsoïde dégénéré ε , c'est-à-dire le produit d'un ellipsoïde plein dans un d -plan de E avec un d' -plan de E . L'ellipsoïde ε est dit de codimension $\dim E - d - d'$.

Du lemme précédent, on déduit immédiatement :

Corollaire 1 *Soit (g_i) une suite de $O(n - 1, 1)$ telle que la suite d'ellipsoïdes $(g_i.B)$ converge dans E vers une limite ε . Alors l'ellipsoïde dégénéré ε est de codimension 0 ou 1 et dans ce dernier cas ε est contenu dans un hyperplan coisotrope de E (hyperplan orthogonal d'une droite vectorielle isotrope de E).*

2.3 Convexité de $D(\tilde{M}_{\tilde{x}})$

Établissons maintenant notre proposition centrale :

Proposition 1 *L'image $D(\tilde{M}_{\tilde{x}})$ de l'étoile $\tilde{M}_{\tilde{x}}$ est convexe relativement à l'étoile X_x .*

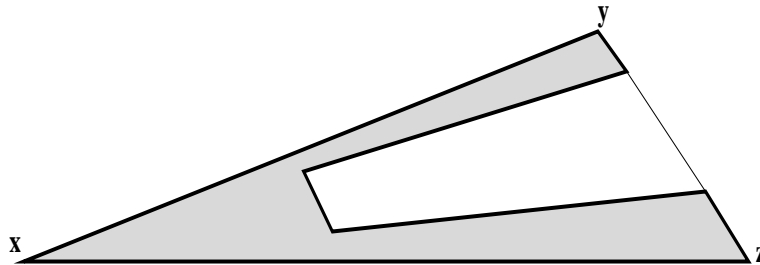
DÉMONSTRATION :

Supposons par l'absurde que tel ne soit pas le cas. On peut donc trouver deux points \tilde{y} et \tilde{z} de l'étoile $\tilde{M}_{\tilde{x}}$ dont les images y et z se voient dans l'étoile X_x mais pas dans $D(\tilde{M}_{\tilde{x}})$. On vérifie facilement que x , y , et z sont libres comme vecteurs de E .

Les point x , y et z réalisent une configuration géométrique particulière :

- si $K = 0$, on note S le 2–plan affine de E contenant x , y et z , et à l'intérieur de S , T_{xyz} le triangle plein fermé de E de sommets x , y , et z .
- si $K = \pm 1$, on note S la 2–surface intersection de X avec le 3–espace vectoriel $Vect(x, y, z)$ de E , et à l'intérieur de S , le “triangle” T_{xyz} intersection de X avec le demi-cône fermé d'origine 0 de section triangulaire xyz . En particulier T_{xyz} peut se voir comme la surface réunion des segments de X issus du point x , de seconde extrémité dans le segment $[y, z]$. On vérifie facilement que le triangle T_{xyz} ne contient pas de couples d'antipodaux dans E , T_{xyz} est donc encore, comme dans le cas affine, une 2–surface simplement convexe de X .

Figure 2: Le triangle T_{xyz} , les parties ombrées sont dans $D(\tilde{M}_{\tilde{x}})$.

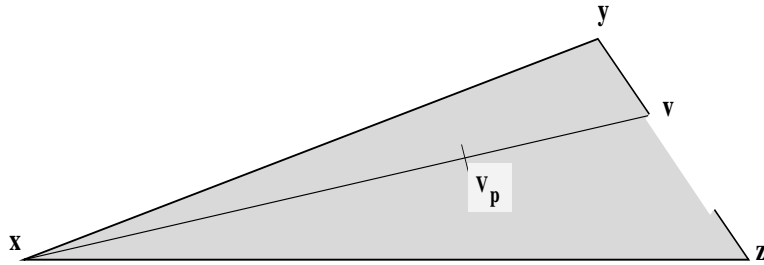


Paramétrons alors le segment $[x, y]$ par $t \mapsto y_t$ ($y_0 = x$, $y_1 = y$) et le segment $[x, z]$ par $t \mapsto z_t$ ($z_0 = x$, $z_1 = z$). D'après ce qui précède le triangle $T_{xy_t z_t}$ est simplement

convexe, inclus dans T_{xyz} . Notons I l'intervalle $\{t, 0 < t \leq 1, T_{xyzt} \subset D(\tilde{M}_{\tilde{x}})\}$, I est évidemment non vide,

et ouvert dans $[0, 1]$ puisque l'étoile $\tilde{M}_{\tilde{x}}$ est ouverte. Soit t_1 sa borne supérieure, il suffit de montrer que t_1 est dans I : par connexité I s'identifie alors à l'intervalle $[0, 1]$, le segment $[\tilde{y}, \tilde{z}]$ est inclus dans $\tilde{M}_{\tilde{x}}$. Notons donc encore $y = y_{t_1}$ et $z = z_{t_1}$, et supposons que t_1 n'est pas dans I . Tous les points du triangle T_{xyz} , hormis certains points du segment $[y, z]$, appartiennent à $D(\tilde{M}_{\tilde{x}})$. $\tilde{M}_{\tilde{x}}$ étant ouverte, on peut considérer l'unique point v dans l'intersection de $[y, z]$ avec le complémentaire de $D(\tilde{M}_{\tilde{x}})$ vérifiant : $[y, v[\subset D(\tilde{M}_{\tilde{x}})$.

Figure 3: La nouvelle configuration du triangle T_{xyz}



Une fois ramenés à cette configuration, il nous reste à montrer qu'elle est incompatible avec la propriété de l'action du groupe fondamental $\pi_1 M$ sur \tilde{M} et la compacité de M . Choisissons (v_p) une suite de points du segment $[x, v[$ tendant vers v , (\tilde{v}_p) leurs relevés dans $\tilde{M}_{\tilde{x}}$. La compacité de M est ici cruciale : on peut trouver une suite (γ_p) d'éléments distincts de $\pi_1 M$ telle que la suite de points $(\tilde{w}_p = \gamma_p \tilde{v}_p)$ converge vers un point de \tilde{M} , noté \tilde{w} . Soit g_p l'élément $h(\gamma_p^{-1})$ du groupe d'holonomie, v_p est l'image de w_p sous l'action de g_p . L'idée consiste à observer comment une suite $(g_p B_p)$ d'ellipsoïdes centrés aux points (v_p) , images de boules centrées aux points (w_p) , s'accumule au point v quand p tend vers l'infini.

Pour ce faire, notons ϕ l'application suivante :

- si $K = 0$, ϕ est simplement l'identité de $X = E$.
 - si $K = \pm 1$, ϕ est l'application $x \mapsto x/(x.x)^{1/2}$ définie dans un voisinage de X dans E .
- L'application ϕ est une projection G -équivariante sur X . En outre, d'après l'étude des géodésiques de X menée à la section 1.2, l'image par ϕ d'un petit segment affine de E passant par un point de X est un segment de X passant par ce point.

Choisissons alors :

- \tilde{B} un voisinage compact de \tilde{w} dans \tilde{M} tel que : (i) $\forall \gamma \in \pi_1 M \setminus \{1\}, \gamma \tilde{B} \cap \tilde{B} = \emptyset$
- Un tel compact existe puisque le groupe $\pi_1 M$ agit proprement sur \tilde{M} .
- r un réel suffisamment petit pour que le voisinage $\phi(B(w, 2r))$ de w dans X soit inclus dans $D(\tilde{B})$, où $B(w, r)$ désigne la boule euclidienne fermée de E de centre w et de rayon r . Si p est suffisamment grand, la distance euclidienne $d(w_p, w)$ est majorée par r , la boule $B_p = B(w_p, r)$ est contenue dans la boule $B(w, 2r)$. En particulier $\phi(B_p)$ est inclus dans $D(\tilde{B})$, notons \tilde{B}_p son relevé dans \tilde{B} et \tilde{C}_p le transformé de \tilde{B}_p sous l'action de γ_p^{-1} .

\tilde{C}_p est un voisinage compact de \tilde{v}_p dans \tilde{M} , son image $D(\tilde{C}_p)$ s'identifie à $\phi(g_p B_p)$ dans X . De plus, les compacts (\tilde{C}_p) sont deux à deux disjoints d'après la relation (i).

Utilisons la transitivité de l'action de G sur X , et la convergence des suites (w_p) et (v_p) vers les points w et v respectivement. On peut donc trouver un compact de G , deux suites (c_{1p}) et (k_{1p}) dans ce compact, et un élément g de G tels que $w_p = c_{1p}^{-1}.w$, $v_p = k_{1p}.v$ et $v = g.w$. De l'égalité $g_p.w_p = v_p$, on déduit (en notant $c_{2p} = k_{1p}.g$) : $w = (c_{2p}^{-1}.g_p.c_{1p}^{-1}).w$. C'est-à-dire que g_p s'écrit comme produit $c_{2p}.o_p.c_{1p}$, où les suites (c_{1p}) et (c_{2p}) restent dans un compact de G et (o_p) dans $O(n-1, 1)$ le sous-groupe d'isotropie du point w .

D'après le Lemme 2, les $(g_p B_p)$ sont, comme les $(o_p.B_p)$, des ellipsoïdes de centre v_p dont les longueurs euclidiennes de tous les axes principaux sauf un sont minorées par une constante r' strictement positive, inférieure à r . Intéressons nous à l'intersection de ces ellipsoïdes avec le triangle T_{xyz} . L'espace tangent $T_{v_p}S$ s'identifie à un 2-plan affine de E , on peut trouver dans E un segment affine σ_p de centre v_p , de longueur $2r'$, inclus dans l'intersection $(T_{v_p}S \cap g_p B_p)$. Notons $\delta_p = \phi(\sigma_p)$ le segment image de σ_p dans X . Par construction δ_p est inclus dans S , et les segments $(\delta_p \cap T_{xyz})$ sont disjoints (en effet, ils sont tracés dans $D(\tilde{C}_p \cap \tilde{M}_{\tilde{x}})$ et comme D est injectif sur $\tilde{M}_{\tilde{x}}$ ils correspondent à des segments dans \tilde{C}_p . Or les compacts (\tilde{C}_p) sont disjoints).

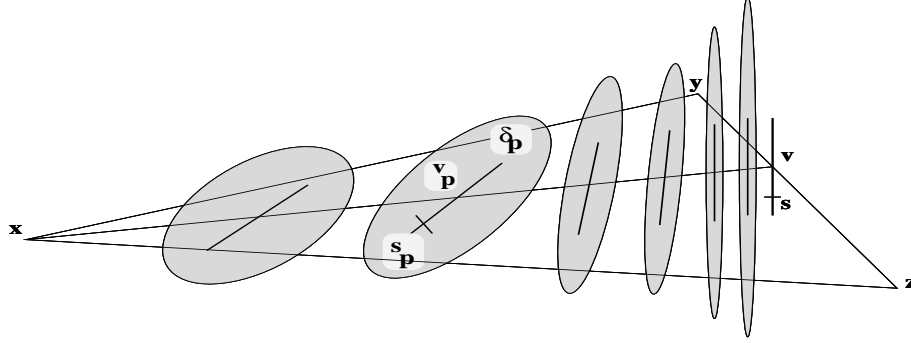
Ecrivons alors $\sigma_p = v_p + \sigma_p^0$, où σ_p^0 est un segment affine de centre 0 dans E , de longueur $2r'$. La boule $B(0, 2r')$ étant compacte, on peut supposer que la suite (σ_p^0) converge vers un segment affine de centre 0 de longueur $2r'$ noté σ^0 . Les points (v_p) convergent vers le point v , les segments affines (σ_p) convergent donc vers le segment affine $\sigma = v + \sigma^0$. Par continuité, σ appartient au 2-plan affine $T_v S$. Remarquons alors que l'application ϕ établit un difféomorphisme entre un voisinage U de v dans $T_v S$ et un voisinage V de v dans S (pour $K = 0$, ϕ est tout simplement l'identité, pour $K = \pm 1$, ϕ a pour réciproque l'application $\psi : x \mapsto \frac{x.v}{x.v}$). Mais dans U , le segment affine σ de centre v coupe forcément la portion de triangle ouvert affine $\psi(V \cap T_{xyz})$ ou sa frontière $\psi(V \cap [y, v])$. Donc dans X le segment $\delta = \phi(\sigma)$ contient un point s de $T_{xyz} \cup [y, v]$. On peut alors trouver des points (s_p) appartenant aux segments $(\delta_p \cap T_{xyz})$, distincts car les $(\delta_p \cap T_{xyz})$ sont disjoints, qui tendent vers s . Notons (\tilde{s}_p) et \tilde{s} les relevés dans $\tilde{M}_{\tilde{x}}$ de (s_p) et s , la suite (\tilde{s}_p) converge vers \tilde{s} , d'autre part les points $(\gamma_p.\tilde{s}_p)$ sont dans le compact \tilde{B} de \tilde{M} . Ceci contredit la propriété de l'action de $\pi_1 M$ sur \tilde{M} . \diamond

Remarque : Comme le lecteur averti l'aura noté, c'est cette démonstration de la Proposition 1 qui doit beaucoup à la méthode développée par Carrière dans le cas plat. Son utilisation dans le cas général a nécessité :

- le développement des notions de segment géodésique et de convexité relative.
- l'utilisation de la projection G -équivariante ϕ sur X .

Surtout, la méthode de Carrière repose sur le fait que le groupe G des isométries de X est, dans le cas plat, de "discompacité" 1 (cf.[2]). *A priori*, cet argument s'applique encore dans le cas $K = 1$, mais pas dans le cas $K = -1$: le groupe d'isométries de la variété

Figure 4:



modèle $X = S_{-1}^n$ est $O(n-1, 2)$ de discompacité 2. Il a fallu montrer que c'est la valeur 1 de la discompacité du groupe d'isotropie d'un point de X qui importe réellement. Dans les trois cas de courbure, ce groupe est $O(n-1, 1)$, de discompacité 1.

Le lemme suivant va alors nous aider à décrire la frontière de l'étoile $\tilde{M}_{\tilde{x}}$:

Lemme 3 Soient \tilde{C}_1 et \tilde{C}_2 deux parties de \tilde{M} et C une partie de X telles que :

- D restreinte à \tilde{C}_1 est injective et $D(\tilde{C}_1)$ est convexe relativement à C .
- \tilde{C}_2 est simplement convexe et $\tilde{C}_2 \subset D^{-1}(C)$.
- $\tilde{C}_1 \cap \tilde{C}_2 \neq \emptyset$.

alors l'application D restreinte à $\tilde{C}_1 \cup \tilde{C}_2$ est injective.

DÉMONSTRATION :

Par hypothèse, D restreinte à \tilde{C}_1 est injective, et comme \tilde{C}_2 est simplement convexe, D restreinte à \tilde{C}_2 l'est également. Prenons alors \tilde{x}_1 un point de \tilde{C}_1 et \tilde{x}_2 un point de \tilde{C}_2 ayant même image par D , choisissons \tilde{x}_3 un point de l'intersection $\tilde{C}_1 \cap \tilde{C}_2$ (par hypothèse non vide). Comme \tilde{C}_2 est simplement convexe, \tilde{x}_2 voit \tilde{x}_3 dans \tilde{C}_2 , le segment $[x_3, x_2]$ est donc inclus dans C . Mais les segments $[x_3, x_2]$ et $[x_3, x_1]$ coïncident, et comme $D(\tilde{C}_1)$ est supposé convexe relativement à C , $[x_3, x_1]$ est tracé dans $D(\tilde{C}_1)$. Comme \tilde{C}_1 s'identifie à $D(\tilde{C}_1)$ par D , \tilde{x}_3 voit \tilde{x}_1 dans \tilde{M} . Les segments $[\tilde{x}_3, \tilde{x}_2]$ et $[\tilde{x}_3, \tilde{x}_1]$ ont alors même image dans X , $\tilde{x}_1 = \tilde{x}_2$. \diamond

Corollaire 2 Soit $\partial\tilde{M}_{\tilde{x}}$ la frontière de l'étoile $\tilde{M}_{\tilde{x}}$ dans \tilde{M} , son image par D est une partie de la frontière $\overline{X_x} \setminus X_x$.

DÉMONSTRATION : Soient \tilde{y} un point de $\partial\tilde{M}_{\tilde{x}}$, $\tilde{B}_{\tilde{y}}$ un voisinage simplement convexe de \tilde{y} . Evidemment le point y est dans l'adhérence de X_x . Si y appartient à l'étoile X_x , comme X_x est ouvert, on peut choisir $\tilde{B}_{\tilde{y}}$ d'image incluse dans X_x . Mais $\tilde{B}_{\tilde{y}}$ coupe $\tilde{M}_{\tilde{x}}$, et d'après la Proposition 1, $D(\tilde{M}_{\tilde{x}})$ est convexe relativement à X_x . On peut donc appliquer

le Lemme 3, D restreinte à $\tilde{M}_{\tilde{x}} \cup \tilde{B}_{\tilde{y}}$ est injective. Le segment $[x, y]$ se relève alors en un segment $[\tilde{x}, \tilde{y}]$ dans \tilde{M} , \tilde{x} voit \tilde{y} . D'où le résultat. \diamond

3 Géométrie de \tilde{M}

Le Corollaire 2 constitue un encouragement dans la démonstration de la complétude de M : il indique que la frontière dans \tilde{M} d'une étoile $\tilde{M}_{\tilde{x}}$ s'envoie par D dans la frontière de l'étoile correspondante X_x . Cependant $\partial\tilde{M}_{\tilde{x}}$ contient trop peu d'informations sur la géométrie de $\tilde{M}_{\tilde{x}}$ pour nous permettre de conclure. Il faut encore comprendre comment les points de $\tilde{M}_{\tilde{x}}$ peuvent partir à l'infini dans \tilde{M} tandis que leurs images dans X convergent. Pour ce faire, il faut travailler dans un espace plus gros que \tilde{M} .

Munissons donc X d'une métrique riemannienne complète g_0 (par exemple la métrique induite par la métrique euclidienne canonique de E). Cette métrique se transporte par D en une métrique riemannienne D^*g_0 sur \hat{M} , appelons \hat{M} le complété de \tilde{M} pour D^*g_0 . D s'étend en une unique application continue contractante de \hat{M} dans X , encore notée D . Pour un point \hat{x} de \hat{M} , on notera encore $x = D(\hat{x})$ son image dans X .

Définitions :

· Soient \tilde{x} un point de \tilde{M} et \hat{y} un point de \hat{M} , $\alpha : [0, 1] \mapsto \hat{M}$ un arc reliant \tilde{x} à \hat{y} . On dira que α est un segment de \hat{M} si $\alpha([0, 1])$ est tracé dans \tilde{M} et si $D(\alpha([0, 1]))$ est un segment de X . Un tel segment, s'il existe, est évidemment unique, on le notera $[\tilde{x}, \hat{y}]$ et on dira que \tilde{x} voit \hat{y} (attention, cette relation n'est plus symétrique).

· Etant donné un point \tilde{x} de \tilde{M} , on appelle étoile de \tilde{x} (dans \hat{M}) et on note $\hat{M}_{\tilde{x}}$ l'ensemble des segments de \hat{M} d'origine \tilde{x} .

· Pour une partie \tilde{A} de \tilde{M} , on note $\partial\tilde{A}$ sa frontière dans \hat{M} qu'on décompose en deux parties $\hat{\partial}\tilde{A} = \partial\tilde{A} \cap (\hat{M} \setminus \tilde{M})$ et $\tilde{\partial}\tilde{A} = \partial\tilde{A} \cap \tilde{M}$.

3.1 Géométrie de $\hat{\partial}\tilde{M}$

Lemme 4 L'étoile $\hat{M}_{\tilde{x}}$ d'un point \tilde{x} de \tilde{M} s'identifie à la réunion des parties $\hat{M}_{\tilde{x}}$ et $(\hat{\partial}\tilde{M}_{\tilde{x}} \cap D^{-1}(X_x))$ de \hat{M} .

DÉMONSTRATION : L'inclusion $\hat{M}_{\tilde{x}} \subset \tilde{M}_{\tilde{x}} \cup (\hat{\partial}\tilde{M}_{\tilde{x}} \cap D^{-1}(X_x))$ résulte immédiatement des définitions et du Corollaire 2. Réciproquement, il suffit de montrer qu'un point \hat{x} de \hat{M} voit tout point \hat{v} de la partie $\hat{\partial}\tilde{M}_{\tilde{x}} \cap D^{-1}(X_x)$ de \hat{M} . Choisissons une suite de Cauchy (\tilde{v}_p) de points de $\tilde{M}_{\tilde{x}}$ convergeant vers le point \hat{v} , la suite de segments $D([\tilde{x}, \tilde{v}_p])$ converge

vers le segment $[x, v]$ de X . Comme d'après la Proposition 1 $D(\tilde{M}_{\tilde{x}})$ est ouvert convexe relativement à X_x , le segment $[x, v]$ est tracé dans $D(\tilde{M}_{\tilde{x}})$ d'où le résultat.

Lemme 5 *Les étoiles $\hat{M}_{\tilde{x}}$ sont des ouverts de \hat{M} qui recouvrent \hat{M} , et l'application D restreinte à $\hat{M}_{\tilde{x}}$ est injective.*

DÉMONSTRATION :

· *Montrons l'injectivité de D restreinte à $\hat{M}_{\tilde{x}}$:*

Il suffit de remarquer que par définition un point \tilde{x} de \tilde{M} voit tout point \hat{v} de son étoile $\hat{M}_{\tilde{x}}$.

· *Montrons que $\hat{M}_{\tilde{x}}$ est un ouvert de \hat{M} :*

Soit \hat{v} un point de la frontière $\partial\tilde{M}_{\tilde{x}} \cap D^{-1}(X_x)$, il suffit de trouver un voisinage de \hat{v} inclus dans $\hat{M}_{\tilde{x}}$. Notons \hat{V}_1 et \hat{V}_2 les boules ouvertes de \hat{M} de centre \hat{v} de rayons respectifs ε

et 3ε pour la distance d induite par D^*g_0 sur \hat{M} , on peut prendre ε suffisamment petit pour que \hat{V}_2 soit inclus dans l'ouvert $D^{-1}(X_x)$. Choisissons alors \tilde{v}_0 un point de l'intersection $[\tilde{x}, \hat{v}] \cap \hat{V}_1$, on construit pour tout point \hat{y} de \hat{V}_1 un chemin $\beta_{\hat{y}}$ dans l'intersection $\hat{V}_2 \cap \tilde{M}$ reliant \tilde{v}_0 à \hat{y} (Pour ce faire, choisissons (\tilde{y}_p) une suite de Cauchy de points de \tilde{M} convergeant vers le point \hat{y} et telle que la série des distances $\sum_0^{+\infty} d(\tilde{y}_p, \tilde{y}_{p+1})$ converge. On construit passant par ces points un chemin $\beta : [0, 1] \mapsto \hat{M}$ d'extrémités \tilde{y}_0 et \hat{y} tel que l'arc $\beta([0, 1])$ soit tracé dans \tilde{M} . On peut supposer que le point \tilde{y}_0 appartient à l'ouvert \hat{V}_1 et que le chemin β est de longueur strictement inférieure à ε . Comme la distance $d(\tilde{v}_0, \tilde{y}_0)$ est strictement inférieure à 2ε , on peut construire un chemin de \tilde{M} de longueur inférieure à 2ε reliant les deux points \tilde{v}_0 et \tilde{y}_0 . Son produit avec le chemin β est le chemin $\beta_{\hat{y}}$ recherché.) Considérons le produit du chemin $\beta_{\hat{y}}$ avec le segment $[\tilde{x}, \tilde{v}_0]$ de \tilde{M} , on a construit, pour tout \hat{y} de \hat{V}_1 , un chemin $\alpha_{\hat{y}} : [0, 1] \mapsto \hat{M}$ d'extrémités \tilde{x} et \hat{y} , d'image dans X_x , et tel que l'arc $\alpha_{\hat{y}}([0, 1])$ soit tracé dans \tilde{M} . Pour un tel \hat{y} , notons T la borne inférieure de l'ensemble $\{t, 0 < t \leq 1, \alpha_{\hat{y}}(t) \notin \tilde{M}_{\tilde{x}}\}$. Supposons $T < 1$, le point $\alpha_{\hat{y}}(T)$ appartient par construction à la frontière $\partial\tilde{M}_{\tilde{x}}$, ce qui contredit le Corollaire 2 puisque son image est dans X_x . Donc $T = 1$ et la boule \hat{V}_1 est incluse dans $\tilde{M}_{\tilde{x}}$.

· *Montrons que les ouverts $\hat{M}_{\tilde{x}}$ recouvrent \hat{M} :*

Il suffit de montrer que pour un point \hat{v} de la frontière $\partial\tilde{M}$ on peut trouver un point \tilde{x} de \tilde{M} voyant \hat{v} . Notons encore \hat{V}_1 et \hat{V}_2 les boules ouvertes de \hat{M} de centre \hat{v} de rayons respectifs ε et 3ε pour la distance d induite par D^*g_0 sur \hat{M} . Comme l'application D est contractante, on peut choisir ε suffisamment petit pour que $D(\hat{V}_2)$ soit inclus dans un ouvert simplement convexe de X : pour tout \hat{x} de \hat{V}_2 , $D(\hat{V}_2) \subset X_x$. Prenons \tilde{x} un point de $\hat{V}_1 \cap \tilde{M}$, on peut trouver un chemin $\alpha : [0, 1] \mapsto \hat{V}_2$ d'extrémités \tilde{x} et \hat{v} tel que l'arc $\alpha([0, 1])$ soit tracé dans \tilde{M} . Soit T la borne inférieure de l'ensemble $\{t, 0 < t \leq 1, \alpha(t) \notin \tilde{M}_{\tilde{x}}\}$. Comme précédemment $T = 1$ et donc \tilde{x} voit \hat{v} . \diamond

Remarque : Du Lemme 5, on déduit immédiatement :

$D : \hat{M} \mapsto X$ est localement injective.

Achevons alors la description des étoiles de \tilde{M} commencée à la Proposition 1. Au vu du Lemme 5, cela revient à décrire la frontière $\hat{\partial}\tilde{M}$.

Définitions :

- Dans $(E, (\cdot, \cdot))$, un hyperplan vectoriel coisotrope est l'orthogonal d'une droite (vectorielle) isotrope. On définit alors la notion d'hyperplan coisotrope dans X :
- dans $\mathbb{R}^{n-1,1}$, c'est un hyperplan coisotrope affine.
- dans S_K^n , c'est l'intersection de S_K^n avec un hyperplan vectoriel coisotrope de E .
- Une partie de \hat{M} sera dite "totalement géodésique coisotrope" si elle s'identifie localement par D à un hyperplan coisotrope de X .

Proposition 2 *La frontière $\hat{\partial}\tilde{M}$ est totalement géodésique coisotrope, ou vide.*

DÉMONSTRATION :

Soit \hat{v} un point de la frontière $\hat{\partial}\tilde{M}$, on peut d'après le Lemme 5 trouver un voisinage \hat{V} de \hat{v} dans \hat{M} et un point \tilde{x} de \tilde{M} tels que \tilde{x} voit \hat{V} et \hat{V} s'identifie par D à son image dans X . Notons \tilde{V} l'intersection du voisinage \hat{V} avec l'étoile $\tilde{M}_{\tilde{x}}$ de \tilde{M} .

Paramétrons par $\alpha : [0, 1] \mapsto \hat{M}$ le segment $[\tilde{x}, \hat{v}]$, l'arc $\alpha([0, 1[)$ est tracé dans \tilde{M} . Soit (t_p) une suite croissante de $[0, 1[$ convergeant vers 1, notons (\tilde{v}_p) la suite de points $(\alpha(t_p))$ de \tilde{M} convergeant vers \hat{v} . Comme M est compacte, on peut trouver une suite (γ_p) d'éléments distincts de $\pi_1 M$ telle que la suite de points $(\tilde{w}_p = \gamma_p \tilde{v}_p)$ converge vers un point de \tilde{M} noté \tilde{w} . Reprenons alors la construction des voisinages compacts \tilde{B}_p de \tilde{w}_p et \tilde{C}_p de \tilde{v}_p effectuée à la Proposition 1, rappelons que les compacts (\tilde{C}_p) sont disjoints.

La suite de fermés de $\tilde{M}_{\tilde{x}} \cap (\tilde{C}_p \cap \hat{V})$ s'identifie par D à la suite de fermés de X $\phi(g_p B_p) \cap D(\hat{V})$, où B_p est la boule euclidienne fermée de centre w_p de rayon r dans E . Mais la suite (v_p) converge vers le point v , la suite d'ellipsoïdes $(g_p B_p)$ converge donc dans E vers un ellipsoïde ε de centre v , nécessairement dégénéré puisque les compacts $\phi(g_p B_p)$ sont disjoints. Comme dans la Proposition 1, écrivons g_p comme produit $c_{2p} \cdot o_p \cdot c_{1p}$, où (c_{1p}) et (c_{2p}) sont deux suites restant dans un compact de G et (o_p) une suite de $O(n-1, 1)$. Quitte à extraire une sous suite, on peut appliquer le Corollaire 1 : l'ellipsoïde ε est de codimension 1, supporté par un hyperplan coisotrope affine $(v + H)$ de E .

La suite de fermés de $D(\tilde{M}_{\tilde{x}} \cap \phi(g_p B_p) \cap D(\hat{V}))$ converge alors vers le fermé $\phi(\varepsilon) \cap D(\hat{V})$. Le groupe fondamental $\pi_1 M$ agissant proprement sur \tilde{M} , $\phi(\varepsilon)$ et $D(\tilde{V})$ sont d'intersection vide et donc le fermé $\phi(\varepsilon) \cap D(\hat{V})$ est contenu dans $D(\hat{V} \setminus \tilde{V})$. Comme un segment d'origine x voit au plus un point de $D(\hat{V} \setminus \tilde{V})$, $\phi(\varepsilon) \cap D(\hat{V})$ est exactement un voisinage de v dans $D(\hat{V} \setminus \tilde{V})$. Donc la frontière $\hat{\partial}\tilde{M}$ au voisinage de \hat{v} s'identifie à un voisinage de v dans l'hyperplan coisotrope affine $v + H$ de E .

- Dans le cas plat c'est exactement la Proposition 2.
- Pour $K = \pm 1$, remarquons que $D(\hat{V} \setminus \tilde{V})$ est d'intérieur vide, donc $\phi(\varepsilon) \cap D(\hat{V})$ également : ceci impose au point v d'appartenir à H , et on a encore la Proposition 2. \diamond

Remarques :

- En particulier il découle de la Proposition 2 que si la frontière $\hat{\partial}\tilde{M}$ est non vide, \hat{M} est une variété à bord. Munie de la distance induite par la métrique riemannienne D^*g_0 , \hat{M} est *complète* pour cette métrique.
- Remarquons que S_1^2 s'identifie à S_{-1}^2 , nous restreindrons désormais l'étude du cas $K = 1$ à $n > 2$. On vérifie alors facilement que pour $K = 0$ ou $K = 1$ un hyperplan coisotrope de X est connexe par arcs, alors que dans le cas $K = -1$, il a deux composantes connexes par arcs antipodales l'une de l'autre, qu'on appellera *demi-hyperplan coisotrope* de X .

Définition : Pour $K = 0$ ou $K = 1$, on appellera *hyperplan coisotrope* de \hat{M} une partie connexe \hat{H} de \hat{M} s'identifiant par D à un hyperplan coisotrope H de X . Pour $K = -1$, on définit de manière analogue les *demi-hyperplans coisotropes* de \hat{M} .

De la Proposition 2 et des deux remarques précédentes, on déduit immédiatement :

Corollaire 3 *Supposons la frontière $\hat{\partial}\tilde{M}$ non vide, chaque composante connexe de $\hat{\partial}\tilde{M}$ est :*

- si $K = 0$ ou $K = 1$, un hyperplan coisotrope de \hat{M} .
- si $K = -1$, un demi-hyperplan coisotrope de \hat{M} .

3.2 Géométrie de \tilde{M}

Nous sommes dès lors en mesure d'identifier complètement \tilde{M} :

Proposition 3 *Supposons M non complète, \tilde{M} s'identifie alors par l'application D à une composante connexe Ω de $X \setminus H$, où H désigne un hyperplan coisotrope de X .*

Pour la démonstration de la Proposition 3, nous distinguerons les trois cas de courbure.

Cas $K = 1$

DÉMONSTRATION de la Proposition 3 pour $K = 1$:

Supposons M non complète, soit \hat{H} un hyperplan coisotrope de la frontière $\hat{\partial}\tilde{M}$. Son image H dans X est l'orthogonal dans X de la droite de lumière $\mathbb{R}e_1$ pour une base (e_1, \dots, e_{n+1}) de E dans laquelle $x.x = 2x_1x_2 + x_3^2 + \dots + x_{n+1}^2$. Choisissons \tilde{x} un point de \tilde{M} voyant un point de \hat{H} , la composante connexe Ω de $X \setminus H$ contenant x s'identifie à l'ensemble des points y de X vérifiant l'inégalité $y.e_1 > 0$. Définissons alors le champ de

vecteurs tangents sur X $Y_y = e_2 - (y \cdot e_2)y$, notons Θ_t son flot, et considérons pour \hat{y} dans \hat{H} le chemin de X d'origine y $t \mapsto \Theta_t(y)$ défini sur l'intervalle $[0, +\infty[$ si $y \cdot e_2 \geq 0$, sur l'intervalle $[0, -1/(y \cdot e_2)[$ sinon :

$$\Theta_t(y) = \frac{1}{1 + (y \cdot e_2)t} \left[y + \frac{t}{2} (2 + (y \cdot e_2)t) e_2 \right]$$

Si ce chemin ne se relève pas en un chemin de \hat{M} d'origine \hat{y} défini sur le même intervalle, c'est qu'il rencontre transversalement un hyperplan coisotrope de la frontière $\hat{\partial}\tilde{M}$, d'image $H_{\hat{y}}$ dans X . Sinon on pose $H_{\hat{y}}$ égal à l'ensemble vide.

Remarquons que pour tout point x de X et tout hyperplan coisotrope P de X , l'intersection de l'étoile X_x avec P contient un ouvert de P (en effet l'étoile X_x est contenue dans un demi-espace de E). De cette remarque et du Corollaire 3, on déduit que l'application $\hat{y} \mapsto H_{\hat{y}}$ est localement constante. Comme \hat{H} est connexe, elle est constante. Notons P son image, si P n'est pas vide c'est un hyperplan coisotrope de X distinct de H ; mais deux hyperplans coisotropes de X se coupent nécessairement, d'où une contradiction au Corollaire 3 aux points de \hat{H} correspondant à l'intersection de P et H . Donc P est vide.

On vérifie facilement que l'image de l'hyperplan H sous le flot Θ_t est l'ouvert Ω privé de l'arc géodésique $\gamma(]0, \infty[)$ défini par $\gamma(t) = te_1 + \frac{1}{2t}e_2$. On a donc construit dans \tilde{M} un ensemble difféomorphe par D à $\Omega \setminus \{\gamma(]0, \infty[)\}$. Mais $\gamma(]0, \infty[)$ se relève évidemment par continuité : tout hyperplan coisotrope en un point $\gamma(t)$ couperait nécessairement Ω . On a ainsi construit dans \tilde{M} un ensemble $\tilde{\Omega}$ difféomorphe par D à Ω , et $\tilde{\Omega}$ est ouvert et fermé dans \tilde{M} connexe. Donc \tilde{M} s'identifie par D à Ω , c'est la Proposition 3. \diamond

Cas $K = 0$

DÉMONSTRATION de la Proposition 3 pour $K = 0$:

Supposons M non complète, soit \hat{H} un hyperplan coisotrope de la frontière $\hat{\partial}\tilde{M}$ d'image H dans $X = \mathbb{R}^n$. Choisissons \tilde{x} un point de \tilde{M} voyant un point \hat{h} de \hat{H} , pour tout point \hat{y} de \hat{H} , relevons le chemin $t \mapsto y + t(x - h)$ de X d'origine y en un chemin de \hat{M} d'origine \hat{y} . Si ce relevé n'est pas défini sur \mathbb{R}^+ , c'est qu'il rencontre transversalement un hyperplan coisotrope de la frontière $\hat{\partial}\tilde{M}$, d'image $H_{\hat{y}}$ dans X . Sinon on pose $H_{\hat{y}}$ égal à l'ensemble vide.

Comme dans le cas précédent, l'application $\hat{y} \mapsto H_{\hat{y}}$ est localement constante. Comme \hat{H} est connexe, elle est constante. Notons P son image. Si P n'est pas vide, c'est un hyperplan coisotrope de $X = \mathbb{R}^{n-1,1}$, nécessairement parallèle à H ; on note alors Ω l'ouvert de X bordé par H et P . Sinon on note Ω le demi espace affine ouvert de frontière H contenant x .

On a ainsi construit dans \tilde{M} un ensemble $\tilde{\Omega}$ difféomorphe par D à Ω , et $\tilde{\Omega}$ est ouvert et fermé dans \tilde{M} connexe. Donc \tilde{M} s'identifie par D à Ω . Supposons alors que Ω ait

pour frontière les deux hyperplans coisotropes parrallèles H et P . Comme le remarque Carrière [2], la forme linéaire valant 1 sur l'un et 0 sur l'autre serait invariante sous le groupe d'holonomie Γ et donnerait ainsi naissance à une fonction sans extremum local sur M , ce qui contredit la compacité de M . D'où la Proposition 3 dans ce cas. \diamond

Cas $K = -1$

Ce cas est un peu plus compliqué, du fait que X n'est pas simplement connexe.

· *Géométrie de \tilde{X}* .

Rappelons que dans $E = \mathbb{R}^{n+1}$ on considère la forme quadratique

$$x.x = -(x_1^2 + \dots + x_{n-1}^2) + x_n^2 + x_{n+1}^2$$

et

$$X = S_{-1}^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1}, x.x = 1\}$$

Notons \tilde{X} le revêtement universel de X , \tilde{X} s'identifie à \mathbb{R}^n , la projection canonique de \tilde{X} dans X est donnée par :

$$p(\Theta, x_1, \dots, x_{n-1}) = (x_1, \dots, x_{n-1}, x_n = \sqrt{x^2 + 1} \cos \Theta, x_{n+1} = \sqrt{x^2 + 1} \sin \Theta)$$

où $x^2 = \sum_{i=1}^{n-1} x_i^2$.

On notera D_1 une développante de \tilde{M} dans \tilde{X} telle que $D = p \circ D_1$.

· *Demi-hyperplan coisotrope de \tilde{X}* .

Soit H un hyperplan coisotrope de X orthogonal d'un vecteur de lumière de E $e = (e_1, \dots, e_{n-1}, f_1, f_2)$. Ecrivons $f_1 = \sqrt{e^2} \cos \Theta_1$, $f_2 = \sqrt{e^2} \sin \Theta_1$. L'équation de $p^{-1}(H)$ est :

$$\cos(\Theta - \Theta_1) = \langle x, e \rangle / \sqrt{e^2(x^2 + 1)}$$

avec $\langle x, e \rangle = \sum_{i=1}^{n-1} x_i e_i$, $e^2 = \langle e, e \rangle$, $x^2 = \langle x, x \rangle$.

$p^{-1}(H)$ a une infinité de composantes connexes

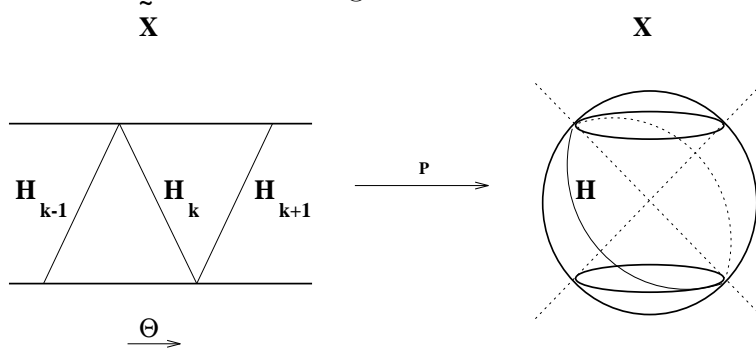
$$\tilde{H}_k = \{(\Theta, x) \in p^{-1}(H); \Theta - \Theta_1 \in]k\pi, (k+1)\pi[\}, k \in \mathbb{Z}$$

appelées demi-hyperplan coisotrope de \tilde{X} . On remarquera que $\tilde{X} \setminus \tilde{H}_k$ a deux composantes connexes, l'une contenant \tilde{H}_{k-1} , l'autre contenant \tilde{H}_{k+1} . On notera aussi que \tilde{H}_k est diffeomorphe à \mathbb{R}^{n-1} : notons \mathbf{H}^n l'espace hyperbolique de dimension n , un demi-hyperplan coisotrope de X s'identifie facilement à $\mathbb{R} \times \mathbf{H}^{n-2}$.

· *Type des demi hyperplans de $\hat{\partial}\tilde{M}$* .

Soit \hat{H}_0 un demi hyperplan coisotrope de la frontière $\hat{\partial}\tilde{M}$ d'image \tilde{H}_0 dans \tilde{X} , \hat{v} un point de \hat{H} et \tilde{x} un point de \tilde{M} voyant \hat{v} . Si $D_1(\tilde{x})$ est contenu dans la composante connexe de $\tilde{X} \setminus \tilde{H}_0$ contenant \tilde{H}_1 , on dira que \hat{H}_0 est de type *positif*, sinon on dira que \hat{H}_0 est de type *négatif*.

Figure 5:



DÉMONSTRATION de la Proposition 3 pour $K = -1$:

Supposons M non complète, la frontière $\hat{\partial}\tilde{M}$ contient donc un demi hyperplan coisotrope \hat{H}_0 s'identifiant par D_1 à un demi-hyperplan coisotrope \tilde{H}_0 de \tilde{X} . \tilde{H}_0 est par exemple de type positif. Conformément aux notations précédentes, on définit le demi-hyperplan coisotrope \tilde{H}_1 de \tilde{X} . Pour tout point \hat{y} de \hat{H}_0 d'image $y = D_1(\hat{y})$ dans \tilde{X} , considérons alors le chemin $\alpha_y : \mathbb{R}^+ \rightarrow \tilde{X}$ donné par $\alpha_y(\Theta) = y + (\Theta, 0, \dots, 0)$. Si α_y ne se relève pas dans \hat{M} pour toute valeur du paramètre Θ , c'est qu'il rencontre transversalement un demi-hyperplan coisotrope de $\hat{\partial}\tilde{M}$ que l'on note $\hat{P}_{\hat{y}}$. Sinon, on pose $\hat{P}_{\hat{y}}$ égal à l'ensemble vide. L'application $\hat{y} \mapsto \hat{P}_{\hat{y}}$ est localement constante d'après le Corollaire 3. Comme \hat{H}_0 est connexe, elle est constante. Son image \hat{P} est un demi hyperplan coisotrope de \hat{M} ou l'ensemble vide.

- Si \hat{P} est vide, on a construit dans \tilde{M} un ensemble $\tilde{\Omega}$ difféomorphe par D_1 à la composante connexe Ω de $\tilde{X} \setminus \tilde{H}_0$ contenant \tilde{H}_1 .
- Si \hat{P} est non vide, notons \tilde{P} son image par D_1 dans \tilde{X} . Comme les deux demi-hyperplans \tilde{H}_0 et \tilde{P} ne se coupent pas, ils bordent un unique ouvert Ω de \tilde{X} , et on a construit un ouvert $\tilde{\Omega}$ de \tilde{M} difféomorphe à Ω par D_1 .

Dans les deux cas, $\tilde{\Omega}$ est ouvert et fermé dans \tilde{M} connexe, donc \tilde{M} s'identifie par D_1 à l'ouvert Ω de \tilde{X} et $\pi_1 M$ s'identifie à un sous groupe discret Γ de G agissant proprement sur Ω . Comme Ω s'identifie à \mathbb{R}^n et comme $M \simeq \Gamma \backslash \Omega$ est compacte, la dimension cohomologique de $\Gamma \backslash \Omega$ égale la dimension de M , c'est-à-dire n .

Si \hat{P} est vide ou si \tilde{P} diffère de \tilde{H}_1 , le fermé $\Omega \cap p^{-1}(H_0)$ est non vide. Soit alors Ω' l'une de ses composantes connexes, Ω' est difféomorphe à \mathbb{R}^{n-1} et invariante sous l'action d'un sous groupe d'indice fini Γ' de Γ . Γ' agit proprement sur Ω' et $\Gamma' \backslash \Omega'$ est compact. Mais alors, $cd\Gamma = cd\Gamma' = \dim(\Omega') = n - 1$. D'où la contradiction.

Donc le demi-hyperplan \tilde{P} de \tilde{X} s'identifie à \tilde{H}_1 : c'est la Proposition 3. Si le demi-hyperplan \tilde{H}_0 de $\hat{\partial}\tilde{M}$ est de type négatif, on tient le même raisonnement avec $-\Theta$ et \tilde{H}_{-1} .

· \diamond

4 Démonstration du théorème

Supposons M non complète. D'après la Proposition 3, \tilde{M} s'identifie à un ouvert Ω de X de frontière un hyperplan coisotrope H de X .

· Dans le cas plat, le groupe d'holonomie Γ laisse invariant un hyperplan affine de \mathbb{R}^n . Ceci est impossible d'après un théorème de Goldman et Hirsch [4, Theorem 2.8, p.644].

· Si la courbure K vaut ± 1 , notons e un vecteur coisotrope de E orthogonal à H et G_1 le groupe des isométries de Ω . Le groupe G_1 agit transitivement sur l'ouvert Ω de X . Notons H_1 le sous-groupe d'isotropie d'un point de Ω sous l'action de G_1 , Ω s'identifie alors à l'espace homogène G_1/H_1 . Soit ω_1 la forme volume lorentzienne de Ω , ω_1 est naturellement G_1 -invariante. Définissons aussi le champ de vecteurs Y_1 sur Ω :

Pour $y_1 \in \Omega$,

$$Y_{1y_1} = \frac{e}{(e.y_1)} - y_1 \in T_{y_1}\Omega = \{\mathbb{R}y_1\}^\perp$$

Le champ Y_1 est également G_1 -invariant (le groupe G_1 agit par multiplication scalaire sur le vecteur e et conserve le produit $(e.y_1)$).

Y_1 et ω_1 étant G_1 -invariants, ils induisent un champ de vecteurs Y et une forme volume ω sur M . La dérivée de Lie $L_{Y_1}\omega_1$ est encore G_1 -invariante donc proportionnelle à ω_1 : $L_{Y_1}\omega_1 = \lambda\omega_1$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Comme M est une variété compacte sans bord, on a d'après la formule de Stokes : $\int_M L_Y\omega = \lambda \int_M \omega = 0$ d'où $\lambda = 0$ et $L_{Y_1}\omega_1 = 0$.

Mais on vérifie que le champ Y_1 n'est pas de divergence nulle relativement à ω_1 : pour une base (e_1, \dots, e_{n+1}) de E dans laquelle :

$$x.x = 2x_1x_2 + K(x_3^2 + \dots + x_n^2) + x_{n+1}^2$$

Ω est l'ensemble des points x de E tels que $x.x = 1$ et $x_2 > 0$, l'hyperplan coisotrope H est l'orthogonal de $\mathbb{R}e_1$ dans X . Un système de coordonnées pour Ω est (x_2, \dots, x_{n+1}) , et on a :

$$Y_1(x_2, \dots, x_{n+1}) = -(x_2, \dots, x_{n+1})$$

$$\omega_1(x_2, \dots, x_{n+1}) = \frac{1}{x_2} dx_2 \wedge \dots \wedge dx_{n+1}$$

d'où $\lambda = -(n-1)$ et la contradiction. \diamond

References

- [1] E. Calabi et L. Markus, Relativistic space forms, *Ann. of Math.* **75** (1962), 63-76
- [2] Y. Carrière, Autour de la conjecture de L.Markus sur les variétés affines, *Invent. Math.* **95** (1989), 615-628

- [3] W. Goldman, Geometric Structures on manifolds and varieties of representations, *Contemporary Mathematics*, Vol.**74**, (1988)
- [4] W. Goldman, M. Hirsch, The radiance obstruction and parallel forms on affine manifolds, *Trans. Am. Math. Soc.*, **286**, 629-649 (1984)
- [5] Y. Kamishima, Completeness of Lorentz Manifolds of Constant Curvature admitting Killing Vector Fields, *J. Differential Geometry* **37** (1993), 569-601
- [6] G. Mess, Lorentz Spacetimes of Constant Curvature, preprint
- [7] M.M. Morrill, Non-existence of Closed de Sitter Manifolds, article annoncé dans *Abstracts of Papers Presented to the American Mathematical Society* **16** (1995)
- [8] B. O'Neill, Semi Riemannian Geometry, Academic Press, New York (1993)
- [9] J. Wolf, Spaces of Constant Curvature, Mc Graw-Hill, New York (1967)