TRANSFORMATION DE TYPE POISSON RELATIVE AUX GROUPES D'IWAHORI

BRUNO KLINGLER

1. Introduction

1.1. **Résultats.** Soit F un corps local non-archimédien de caractéristique zéro, $\mathbf{G}$ un F-groupe F-simple connexe simplement connexe de F-rang $l > 0$, et B un sous-groupe d'Iwahori de $G = \mathbf{G}(F)$. Soit R un anneau de caractéristique banale pour B (c.f. définition 1). Le but de cette note est de démontrer une formule de type Poisson sur R pour le groupe G relativement à B. Comme corollaire dans le cas $R = \mathbb{C}$, on redémontre de façon élémentaire un résultat fondamental dû indépendamment à Casselman ([7], [8], [9]) et Borel-Serre ([2]) selon lequel le module de Steinberg $\mathbf{St}_{\mathbb{C}}$ à coefficients complexe de G est de carré intégrable, en particulier unitaire. Notre formule apparait alors comme une explicitation géométrique très simple de la preuve topologico-cohomologique due à Borel-Serre [2] et Borel [1].

Rappelons la définition du module de Steinberg $\mathbf{St}_R$ sur R de $G = \mathbf{G}(F)$, qui joue un rôle crucial dans la théorie des représentations de G. Soit $\mathbf{A}$ un F-tore F-déployé maximal de G, $\Phi = \Phi(\mathbf{G}, \mathbf{A})$ le système de racines de $\mathbf{G}$ relativement à $\mathbf{A}$ et $\Delta \subset \Phi$ l'ensemble des racines simples pour un ordre fixé sur Φ. On pose $\mathbf{St}_R = C_R^\infty(G/P)/\sum_{\alpha\in\Delta} C_R^\infty(G/P_{\{\alpha\}})$, où pour toute partie θ de Δ on note $\mathbf{P}_\theta$ le F-sous-groupe parabolique standard de type θ, $\mathbf{P} = \mathbf{P}_\emptyset$ est le F-sous-groupe parabolique minimal standard, et $C_R^\infty(Y)$ désigne l'espace des fonctions localement constantes à valeur dans R sur un espace topologique totalement discontinu Y.

Soit X l'immeuble de Bruhat-Tits de G, C la chambre de X de fixateur le sous-groupe d'Iwahori B de G, $C_R(G/B)$ le G-module des fonctions continues à valeur dans R sur G/B et $\mathcal{H}_R(G/B)$ son sous-G-module des formes simpliciales harmoniques de degré maximal sur X. D'après la décomposition d'Iwasawa $G = \bigcup_{w\in W} B\omega(w)P$, l'ensemble des B-orbites du groupe d'Iwahori B dans G/P est en bijection avec le groupe de Weyl fini W du système de racines Φ. Pour tout w in W notons ν_w l'unique R-mesure de probabilité B-invariante sur la B-orbite $\mathcal{O}_w = BwP/P$ dans G/P (i.e. normalisée par $\nu_w(\mathcal{O}_w) = 1$). Notons ν_B la R-mesure $\nu_B = \sum_{w\in W}(-1)^{l(w)}\nu_w$, où $l : W \longrightarrow \mathbb{N}$ désigne la fonction longueur du groupe de Coxeter W (en particulier quand $R = \mathbb{R}$ la mesure ν_B n'est pas positive). Enfin notons $C_R(G)$ l'espace des fonctions continues sur G à valeur dans R.

Théorème. *La transformation*

$$\begin{array}{rccc} f: & C_R^\infty(G/P) & \longrightarrow & C_R(G) \\ & \phi & \longrightarrow & f_\phi \end{array}$$

définie par

$$\forall g \in G, \quad f_\phi(g) = \int_{G/P} \phi(gz)\, d\nu_B(z) \tag{1}$$

factorise en un morphisme non-trivial de G-modules $\mathbf{St}_R \longrightarrow \mathcal{H}_R(G/B)^\infty$.

Pour R banal quelconque l'image (non-triviale) de cette transformation de Poisson reste mystérieuse. Dans le cas où $R = \mathbb{C}$, on identifie cette image, retrouvant ainsi le résultat de Casselman et Borel-Serre.

Corollaire. *Dans le cas $R = \mathbb{C}$ le G-module de Steinberg $\mathbf{St}_\mathbb{C}$ s'identifie via la transformation de Poisson précédente au G-module $\mathcal{H}_\mathbb{C}^{(2)}(G/B)^\infty$ des formes simpliciales complexes lisses harmoniques L^2 de degré maximal sur X. Il est donc de carré intégrable, en particulier unitarisable.*

1.2. **Comparaison avec les résultats de Casselman et Borel-Serre.** Situons ce corollaire par rapport aux résultats antérieurs. La preuve par Casselman [7] que $\mathbf{St}_\mathbb{C}$ est de carré intégrable, si elle a l'avantage de développer des outils généraux de la théorie des représentations de G, n'est que peu éclairante dans le cas simple du module de Steinberg, et ne fournit pas explicitement de produit hilbertien sur $\mathbf{St}_\mathbb{C}$. La preuve de Borel-Serre dans [2] et [1] est topologique. Soit ∂X le bord à l'infini de X (i.e. l'immeuble sphérique des paraboliques de G convenablement topologisé) et $\bar{X} = X \cup \partial X$ la compactification de X qui s'en déduit. Dans [2] Borel et Serre montrent les isomorphismes $\mathbf{St}_\mathbb{C} \simeq H^{l-1}(\partial X, \mathbb{C})$ ([2, Corol. 3.3]) et $H^{l-1}(\partial X, \mathbb{C}) \overset{\delta}{\simeq} H_c^l(X, \mathbb{C})$ ([2, Theor.5.6]), où $H_c^\cdot(X, \mathbb{C})$ désigne la cohomologie à support compact de X et la flèche δ provient de la suite longue de cohomologie de la paire $(\bar{X}, X)$. Dans [1, theor.6.2] et en introduisant l'équivalence de catégorie entre G-modules engendrés par leurs vecteurs fixes sous B et les $\mathcal{HI}$-modules de l'algèbre de Hecke-Iwahori $\mathcal{HI}$, Borel montre que la flèche naturelle $H_c^l(X, \mathbb{C}) \longrightarrow \mathcal{H}_\mathbb{C}^{(2)}(G/B)$ est une injection d'image $\mathcal{H}_\mathbb{C}^{(2)}(G/B)^\infty$. Par composition de ces différentes flèches on obtient un isomorphisme

$$\mathbf{St}_\mathbb{C} = C_\mathbb{C}^\infty(G/P) / \sum_{\alpha \in \Delta} C_\mathbb{C}^\infty(G/P_\alpha) \longrightarrow (\mathcal{H}_\mathbb{C}^{(2)}(G/B))^\infty \subset L^2(G/B),$$

qui reste mystérieux car la flèche d'extension cohomologique δ n'est pas explicite. Notre transformation (1) est ainsi une explicitation géométrique très simple de cet isomorphisme.

1.3. **Transformation de Poisson.** Expliquons en quoi la transformation (1) dans le cas $R = \mathbb{C}$ est l'analogue de la transformation de Poisson usuelle, développée notamment par Furstenberg dans [11] et [12]. Rappelons que si G désigne un groupe localement compact et μ une mesure de probabilité sur G, une fonction borélienne h sur G est dite μ-harmonique si elle vérifie l'égalité des μ-moyennes : $\forall g \in G, \quad h(g) = \int_G h(gg')\, d\mu(g')$. On notera $\mathcal{H}_\mathbb{C}^\infty(G, \mu)$ l'espace des fonctions complexes boréliennes bornées μ-harmoniques sur G. Une façon simple de construire de telles fonctions est la suivante. Soit Y un G-espace muni d'une mesure de probabilité G-quasi-invariante et μ-stationnaire ν (i.e. telle que $\mu * \nu = \nu$). On appelle transformation de Poisson l'application

$$\begin{array}{rccc} f: & L^\infty_{\mathbb{C}}(Y,\nu) & \longrightarrow & \mathcal{H}^\infty_{\mathbb{C}}(G,\mu) \\ & \phi & \longrightarrow & f_\phi \end{array}$$

définie par

$$\forall g \in G, \quad f_\phi(g) = \int_Y \phi(gz)\, d\nu(z) \quad . \tag{2}$$

On dit que (Y,ν) est un bord de Poisson pour (G,μ) si f est un isomorphisme. Un tel bord s'il existe est unique à isomorphisme près.

Dans [11], Furstenberg montre que si G désigne un groupe de Lie réductif réel ou p-adique, K un bon sous-groupe compact maximal de G (i.e. tel que $G = K.P$ avec P un sous-groupe parabolique minimal de G) et μ est une mesure bi-K-invariante sur G, le bord de Poisson de (G,μ) s'identifie à $(G/P,\nu_K)$ où ν_K est l'unique mesure de probabilité K-invariante sur G/P. Quand le groupe G est réel l'espace $\mathcal{H}^\infty_{\mathbb{C}}(G,\mu)$ n'est autre que l'espace des fonctions bornées, harmoniques pour l'opérateur laplacien usuel, sur l'espace riemannien symmétrique G/K. La transformation de Poisson

$$\begin{array}{rccl} f: & L^\infty_{\mathbb{C}}(G/P,\nu_K) & \longrightarrow & \mathcal{H}^\infty_{\mathbb{C}}(G/K) \\ & \phi & \longrightarrow & f_\phi \end{array} \tag{3}$$

n'est autre que la transformation de Poisson usuelle dont l'exemple universellement connu est donné pour $G = SL(2,\mathbb{R})$ par

$$\begin{array}{rccl} f: & L^\infty_{\mathbb{C}}(S^1) & \longrightarrow & \mathcal{H}^\infty_{\mathbb{C}}(D) \\ & \phi & \longrightarrow & f_\phi : z \longrightarrow (1/2\pi)\int_{-\pi}^{\pi} \phi(e^{it})N(z,t)dt \end{array} \quad .$$

Ici D désigne le disque unité de $\mathbb{C}$ vu comme espace symétrique de $SL(2,\mathbb{R})$, sur lequel le groupe $SL(2,\mathbb{R}) \simeq SU(1,1)$ des matrices complexes de la forme $\begin{pmatrix} a & b \\ \bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix}$, $|a|^2 - |b|^2 = 1$, agit par $z \longrightarrow (az+b)/(\bar{b}z+\bar{a})$. La fonction $N(z,t) = \Re((\exp(it)+z)/(\exp(it)-z))$ est le noyau de Poisson.

Formellement, la formule (1) de notre théorème est donc, dans le cas $R = \mathbb{C}$, l'analogue de la transformation de Poisson (2) où l'on a remplacé :
- le bon compact maximal K de G agissant transitivement sur G/P par son sous-groupe d'Iwahori B agissant sur G/P avec un nombre fini d'orbites.
- la mesure de probabilité K-invariante ν_K sur l'unique K-orbite G/P par la mesure (non positive) ν_B sur G/P somme alternée des mesures de probabilités B-invariantes sur les B-orbites dans G/P.
- le G-module $L^\infty_{\mathbb{C}}(G/P)$ par le G-module de Steinberg $\mathbf{St}_R = C^\infty_{\mathbb{C}}(G/P)/\sum_{\alpha\in\Delta} C^\infty_{\mathbb{C}}(G/P_\alpha)$.
- le G-module $\mathcal{H}^\infty_{\mathbb{C}}(G/K)$ des fonctions harmoniques bornées sur G/K par le G-module $\mathcal{H}^{(2)}_{\mathbb{C}}(G/B)$ des fonctions harmoniques L^2 sur G/B.

1.4. **Valeurs au bord.** Dans l'étude de la transformation de Poisson usuelle

$$f : L^\infty_{\mathbb{C}}(G/P, \nu_K) \longrightarrow \mathcal{H}^\infty_{\mathbb{C}}(G/K)$$

pour un groupe de Lie réel G et son compact maximal K, l'isomorphisme $\Phi : \mathcal{H}^\infty_{\mathbb{C}}(G/K) \longrightarrow L^\infty_{\mathbb{C}}(G/P, \nu_K)$ inverse de f est explicite : étant donnée $f_\phi \in \mathcal{H}^\infty_{\mathbb{C}}(G/K)$ on peut retrouver sa "valeur au bord" $\phi \in L^\infty_{\mathbb{C}}(G/P, \nu_K)$ par passage à la limite (c.f. [13], [14] par exemple).

Dans le cas de la transformation de Poisson relative à un sous-groupe d'Iwahori le G-module de Steinberg $\mathbf{St}$ est un quotient du G-module $C^\infty(G/P)$ qui ne se relève pas en un facteur direct de $C^\infty(G/P)$. En particulier il n'existe pas de théorie de valeur au bord (qui n'aurait au demeurant pas grand sens pour une fonction de carré intégrable). Une manière de construire l'inverse de la transformation $f : \mathbf{St} \longrightarrow \mathcal{H}^{(2)}(G/B)^\infty$ consiste à réaliser $\mathbf{St}$ non plus comme quotient du G-module $C^\infty(G/P)$, mais comme sous-module de la contragrédiente $\mathcal{M}(G/P)$ des mesures sur G/P. La transformation

$$\Phi : \mathcal{H}^{(2)}(G/B)^\infty \longrightarrow \mathbf{St} \subset \mathcal{M}(G/P)$$

inverse de f est alors donnée par

$$\forall\, f \in \mathcal{H}^{(2)}(G/B)^\infty, \;\; \Phi(f) = \sum_{x \in G/B} f(x)\, x_* \nu_B \;\; .$$

1.5. **Transformation de Poisson et algèbre de Hecke-Iwahori.** Eclairons maintenant la relation entre transformation de Poisson relative à un sous-groupe d'Iwahori et algèbre de Hecke-Iwahori. Notons $\mathcal{HI}$ l'algèbre de convolution de Hecke-Iwahori $C^\infty_c(B\backslash G/B)$ des fonctions complexes localement constantes à support compact sur G bi-invariantes sous B. Considérons l'application

$$\begin{array}{cccc} F: & \mathcal{M}(G/P) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_G(C^\infty(G/P), C(G)) \\ & \nu & \longrightarrow & (f^\nu : \phi \longrightarrow f^\nu_\phi) \end{array}$$

définie par

$$f^\nu_\phi(g) = < \phi, g_* \nu > \quad . \tag{4}$$

En prenant les invariants sous B de l'application précédente on obtient une application linéaire encore notée F, qu'on peut considérer comme une famille de "transformations de Poisson" paramétrée par $\mathcal{M}(B\backslash G/P)$:

$$F : \mathcal{M}(B\backslash G/P) \longrightarrow \mathrm{Hom}_G(C^\infty(G/P), C(G/B)) \;\; .$$

En particulier la tranformation f du théorème n'est autre que $F(\nu_B)$. Le fait que son image soit le module de Steinberg se lit sur F comme suit. Le $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie $\mathcal{M}(B\backslash G/P)$ s'identifie à $\oplus_{w \in W} \mathbb{C}.\nu_w$. Il est naturellement muni d'une structure de $\mathcal{HI}$-module à droite en posant $\nu.h = \int_G h(u)\, u_*^{-1} \nu \, d_G u$. On vérifie aisément le

Lemme 1. *L'application linéaire* $F : \mathcal{M}(B\backslash G/P) \longrightarrow \mathrm{Hom}_G(C^\infty(G/P), C(G/B))$ *est un morphisme de* $\mathcal{HI}$*-modules à droite.*

L'action de $\mathcal{HI}$ sur $\mathcal{M}(B\backslash G/P) = \oplus_{w\in W}\mathbb{C}\nu_w$ n'est pas semi-simple. On vérifie aisément que la droite $\mathbb{C}.\nu_B$ de $\mathcal{M}(B\backslash G/P)$ est fixe sous $\mathcal{HI}$, puis que $\mathcal{HI}$ agit via le caractère de Steinberg $\chi_{\mathbf{St}} : \mathcal{HI} \longrightarrow \mathbb{C}$ défini par $\chi(BwB) = (-1)^{l(w)}$. La $\mathcal{HI}$-équivariance de F implique que l'image de f^{ν_B} dans $C(G/B)$ est un $\mathcal{HI}$-module sur lequel $\mathcal{HI}$ agit via $\chi_{\mathbf{St}}$, c'est-à-dire $\mathbf{St}$.
La droite $\mathbb{C}.\nu_B$ de $\mathcal{M}(B\backslash G/P)$ est l'unique droite invariante sous $\mathcal{HI}$. En particulier on ne peut pas réaliser comme image d'une application $F(\nu)$ les G-modules correspondant à des caractères de $\mathcal{HI}$ autres que $\chi_{\mathbf{St}}$ (et considérés par Borel dans [1, Section 5]).

2. Préliminaires

2.1. **Notations.** Soit F un corps local non-archimédien de caractéristique zéro. Pour tout F-groupe algébrique $\mathbf{H}$ on notera H le groupe de ses F-points $\mathbf{H}(F)$. Soit $\mathbf{G}$ un F-groupe F-simple connexe simplement connexe, $\mathbf{A}$ un F-tore F-déployé maximal de $\mathbf{G}$, $\Phi = \Phi(\mathbf{G}, \mathbf{A})$ le système de racines de $\mathbf{G}$ relativement à $\mathbf{A}$, W le groupe de Weyl fini de Φ qui s'identifie au groupe quotient N/M, où $\mathbf{N}$ (resp. $\mathbf{M}$) désigne le normalisateur (resp. le centralisateur) de $\mathbf{A}$ dans $\mathbf{G}$. On fixe $\mathbf{P}$ un F-sous-groupe parabolique minimal de $\mathbf{G}$ contenant A et on note Δ (resp. Φ^+) l'ensemble des racines simples (resp. positives) de Φ associées à $\mathbf{P}$. Pour toute partie θ de Δ on notera $\mathbf{P}_\theta$ le F-sous-groupe parabolique standard de type θ de $\mathbf{G}$ (avec la convention d'indexation telle que $\mathbf{P} = \mathbf{P}_\emptyset$).

Soit X l'immeuble de Bruhat-Tits de G (c.f. [4]) et $\mathcal{A}$ l'appartement de X associé à $\mathbf{A}$. Fixons x_0 un sommet spécial de $\mathcal{A}$, on note K le sous-groupe compact maximal spécial de G fixant x_0. Soit $\mathcal{C}$ la chambre de Weyl positive de $\mathcal{A}$ déterminée par P et C l'unique chambre de l'appartement $\mathcal{A}$ contenue dans $\mathcal{C}$ ayant x_0 comme sommet. On notera B le sous-groupe d'Iwahori de G fixateur de C, Δ_1 l'ensemble des racines affines de $\mathcal{A}$ positives sur C et dont l'hyperplan d'annulation supporte un mur de C, W_{aff} le groupe de Weyl affine engendré par les réflexions s_α, $\alpha \in \Delta_1$, où s_α désigne la réflexion hyperplane de $\mathcal{A}$ d'axe $\operatorname{Ker}\alpha$. On note $v : \Delta_1 \longrightarrow \Phi$ l'application qui a une racine affine α associe l'unique racine vectorielle $v(\alpha)$ de Φ indivisible et proportionnelle à la partie vectorielle de α. Le groupe N agit sur X en préservant $\mathcal{A}$, son action sur $\mathcal{A}$ factorise via son quotient le groupe de Weyl affine W_{aff} (car $\mathbf{G}$ est simplement connexe).

Pour tout immeuble (affine ou sphérique) Y on notera $\operatorname{Ch}(Y)$ l'ensemble de ses chambres.

2.2. **Caractéristique banale.** Etant donné un groupe localement profini H, on note $\Omega(H)$ l'ensembles des sous-groupes ouverts compacts de H. Les éléments de $\Omega(H)$ forment une base de voisinage de l'identité de H. Le pro-ordre de H est l'entier $\Pi_{p\text{ premier}}p^{a_p}$, où p^{a_p} désigne la plus grande puissance de p divisant l'un des entiers $[K_1 : K_2]$, $K_i \in \Omega(H)$.

Définition 1. On dit qu'un anneau R est de caractéristique banale pour H si la partie finie du pro-ordre de H est inversible dans R.

Par exemple si H est un groupe réductif p-adique, l'entier p est inversible dans tout anneau de caractéristique banale pour H.

Soit R un anneau de caractéristique banale pour H et $K \in \Omega(H)$. On dispose alors d'une mesure de Haar ν sur H à coefficient dans R (une mesure à coefficient dans R sera appelée une R-mesure) vérifiant $\nu(K) = 1$. Cette mesure est éventuellement nulle sur certains ouverts de H si R n'est pas de caractéristique 0. Elle induit une forme R-linéaire $\nu : C_R(G) \longrightarrow R$.

Dans la suite de cet article R désigne un anneau de caractéristique banale pour le groupe d'Iwahori B.

2.3. **Orbites de B sur G/P et mesures associées.** Le groupe de Weyl W s'identifie encore au quotient $K \cap N/(K \cap M)$. Fixons $\omega : W \longrightarrow K \cap N$ un relèvement de la projection naturelle. On a alors la décomposition d'Iwasawa $G = \cup_{w \in W} B\omega(w)P$, et l'ensemble des B-orbites sur G/P est donc en bijection avec W.

Définition 2. Pour tout élément w de W on note $\mathcal{O}_w$ la B-orbite BwP/P dans G/P et ν_w l'unique R-mesure de probabilité B-invariante sur $\mathcal{O}_w$.

Définition 3. On définit la R-mesure ν_B sur G/P par :

$$\nu_B = \sum_{w \in W} (-1)^{l(w)} \nu_w \quad ,$$

où $l : W \longrightarrow \mathbb{N}$ désigne la longueur dans le groupe de Coxeter W.

Remarques :

1. Géométriquement un point gP/P de G/P est une chambre de l'immeuble de Tits ∂X des paraboliques de G, "bord à l'infini" de X. Un tel point s'identifie à une unique chambre de Weyl $\mathcal{C}(gP/P)$ d'origine x_0 (en particulier $\mathcal{C}(eP/P) = \mathcal{C}$). Notons $\pi(gP/P)$ l'unique chambre de $\mathcal{C}(gP/P)$ ayant x_0 comme sommet. L'application π s'étend en un morphisme d'immeubles sphériques $\pi : \partial X \longrightarrow Y$, où Y désigne l'immeuble sphérique "boule de rayon 1 de centre x_0". Ce morphisme est p-équivariant pour la projection naturelle $p : K \longrightarrow \bar{\mathbf{G}}^{\mathrm{red}}_{x_0}(k)$, où k désigne le corps résiduel de F. Les B-orbites sur $G/P = \mathrm{Ch}(\partial X)$ s'identifient via π aux $\bar{\mathbf{P}}^{\mathrm{red}}_{x_0}(k)$-orbites sur $\mathbf{G}^{\mathrm{red}}_{x_0}(k)/\mathbf{P}^{\mathrm{red}}_{x_0}(k) = \mathrm{Ch}(Y)$ (notations de [18, 3.4 et 3.5]).

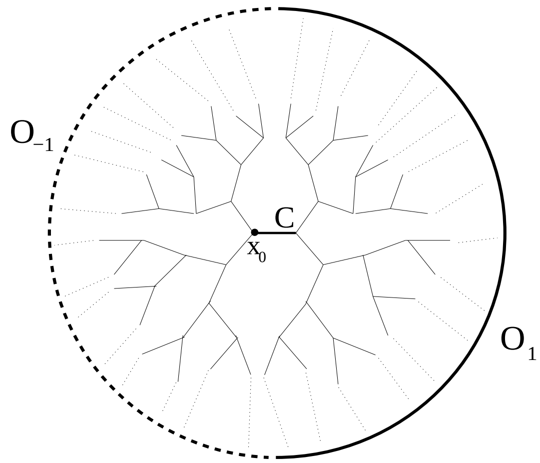
2. Notons $\delta : \mathrm{Ch}(\partial X) \times \mathrm{Ch}(\partial X) \longrightarrow W$ la distance de Coxeter naturelle sur l'immeuble de Tits ∂X. On vérifie facilement qu'une chambre gP/P de $\mathrm{Ch}(\partial X)$ est dans la B-orbite $\mathcal{O}_w = BwP/P$ si et seulement si $\delta(gP/P, eP/P) = w$.

Example (c.f. figure 1) : $\mathbf{G} = \mathbf{SL}(2, F)$, $W = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, X est un arbre régulier de valence $|k| + 1$, où $|k|$ désigne le cardinal du corps résiduel k de F, $\mathrm{Ch}(\partial X) = \mathbb{P}^1(F) = F \cup \{\infty\}$, $\mathcal{O}_1 = \mathcal{O}_F$ l'anneau des entiers de F et $\mathcal{O}_{-1} = \mathbb{P}^1(F) - \mathcal{O}_F$.

3. Définition de f et premières propriétés

Soit Y un espace topologique localement compact totalement discontinu. On note $C_R(Y)$ (respectivement $C^\infty_{c,R}(Y)$) l'espace des fonctions continues (resp. localement constantes à support compact) à valeur dans R sur Y, $\mathcal{M}_R(Y)$ l'espace des R-mesures sur Y et

FIG. 1 – Cas $G = \mathbf{SL(2)}, |\mathbf{k}| = \mathbf{2}$



$< \cdot, \cdot >_Y$: $C^\infty_{c,R}(Y) \times \mathcal{M}_R(Y) \longrightarrow R$ la forme R-bilinéaire naturelle. Lorsque Y est compact on note encore $C^\infty_{c,R}(Y) = C^\infty_R(Y)$. Pour $Y = G/P$ on note encore $< \cdot, \cdot > = < \cdot, \cdot >_{G/P}$.

Définition 4. On définit la forme linéaire continue $f : C^\infty_R(G/P) \longrightarrow C_R(G)$ par

$$\forall\, g \in G, \ \ \forall\, \phi \in C^\infty_R(G/P), \ \ f_\phi(g) = < \phi, g_* \nu_B > \quad .$$

Remarques :
1. De façon équivalente on a : $\forall\, g \in G, \ \ f_\phi(g) = \int_{G/P} f(g.x) d\nu_B(x)$.
2. La continuité de f_ϕ découle immédiatement de l'uniforme continuité de ϕ.

Lemme 2. $f : C^\infty_R(G/P) \longrightarrow C_R(G)$ *est un morphisme de G-modules (à gauche).*

Preuve :
Par définition de l'action de G sur $\mathcal{M}_R(G/P)$ on a :

$$\forall h \in G, \forall \phi \in C^\infty_R(G/P), \forall \nu \in \mathcal{M}_R(G/P), \ \ < \phi, h_* \nu > = < h^{-1}\phi, \nu > \quad .$$

D'où :

$$\begin{aligned} \forall g \in G, \forall h \in G, \forall \phi \in C^\infty_R(G/P), \ \ f_{g\phi}(h) &= < g\phi, h_* \nu_B > = < \phi, (g^{-1}h)_* \nu_B > \\ &= f_\phi(g^{-1}h) = (g f_\phi)(h) \ \ . \end{aligned}$$

□

Lemme 3. $\mathrm{Im} f \subset C_R(G/B)$.

Preuve :
Soit $b \in B$ et $g \in G$, on a .

$$f_\phi(g.b) = < \phi, (g.b)_* \nu_B > = < \phi, g_* \nu_B > = f_\phi(g)$$

car ν_B est B-invariante.

□

Finalement on a construit un morphisme de G-modules :

$$\begin{array}{rccc} f: & C_R^\infty(G/P) & \longrightarrow & C_R(G/B) \\ & \phi & \longrightarrow & f_\phi \end{array} .$$

Définition 5. Pour toute racine α de Δ, notons $\pi_\alpha : G/P \longrightarrow G/P_\alpha$ la projection naturelle.

Lemme 4. $\forall \alpha \in \Delta$, $(\pi_\alpha)_* \nu_B = 0$.

Preuve :
Par définition de ν_B on a

$$(\pi_\alpha)_* \nu_B = \sum_{w \in W} (-1)^{l(w)} (\pi_\alpha)_* \nu_w \ .$$

Comme l'application π_α est G-équivariante, l'image $\pi_\alpha(\mathcal{O}_w)$ est la B-orbite BwP_α/P_α dans G/P_α et la R-mesure $(\pi_\alpha)_*\nu_w$ est l'unique R-mesure de probabilité B-invariante sur la B-orbite BwP_α/P_α.
L'application de degré deux $q_\alpha : W \longrightarrow W/ < s_\alpha >$ a une section naturelle $u_\alpha : W/ < s_\alpha > \longrightarrow W$, qui a tout élément x de $W/ < s_\alpha >$ associe son unique préimage dans W de longueur minimale. Les deux préimages de x par q_α sont alors $u_\alpha(x)$ et $u_\alpha(x)s_\alpha$. Définissons la R-mesure de probabilité B-invariante ν_x sur G/P_α par $\nu_x = (\pi_\alpha)_* \nu_{u_\alpha(x)}$. Comme $P_\alpha^{s_\alpha} = P_\alpha$, où $P_\alpha^{s_\alpha}$ désigne le conjugué $s_\alpha.P_\alpha.s_\alpha^{-1}$, on en déduit aussitôt :

$$\forall w \in W, \ \ (\pi_\alpha)_* \nu_w = \nu_{q_\alpha(w)} \ .$$

D'où :

$$\begin{aligned} (\pi_\alpha)_* \nu_B &= \sum_{w \in W} (-1)^{l(w)} (\pi_\alpha)_* \nu_w \\ &= \sum_{x \in W/<s_\alpha>} ((-1)^{l(u_\alpha(x))} + (-1)^{l(u_\alpha(x) s_\alpha)}) \nu_x \ . \end{aligned}$$

Comme $l(u_\alpha(x)s_\alpha) = l(u_\alpha(x)) + 1$ on en déduit bien $(\pi_\alpha)_*\nu_B = 0$. □

Corollaire 1. *Le morphisme de G-modules $f : C_R^\infty(G/P) \longrightarrow C_R(G/B)$ s'annule sur le sous-module $\sum_{\alpha \in \Delta} C_R^\infty(G/P_\alpha)$ de $C_R^\infty(G/P)$ et factorise donc en un morphisme de G-modules $f : \mathbf{St}_R \longrightarrow C_R(G/B)$.*

Preuve :
Soit $\alpha \in \Delta$ et $\phi \in C_R^\infty(G/P_\alpha)$.

$$\begin{aligned} \forall g \in G, \ \ f_{\phi \circ \pi_\alpha}(g) &=< \phi \circ \pi_\alpha, g_* \nu_B >=< \phi, (\pi_\alpha)_*(g_* \nu_B) > \\ &=< \phi, g_*((\pi_\alpha)_* \nu_B) >= 0 \end{aligned}$$

car $(\pi_\alpha)_*\nu_B = 0$ d'après le lemme précédent.

□

Lemme 5. *Le morphisme de G-modules $f : \mathbf{St}_R \longrightarrow C_R(G/B)$ est non-trivial.*

Preuve :
Posons $\phi = 1_{BeP/P}$ la fonction caractéristique de la B-orbite BeP/P et choisissons $x = eB/B$.

$$f_\phi(x) =< 1_{BeP/P}, \nu_B >=< 1_{BeP/P}, \nu_e >= 1 \ .$$

D'où le résultat.

□

4. Harmonicité

L'immeuble X est naturellement un complexe simplicial de dimension le F-rang l de G. On note $C_R^j(X)$ l'espace vectoriel des R-cochaînes continues de dimension j de X (en particulier $C_R^l(X) = C_R(G/B)$), $d : C_R^j \longrightarrow C_R^{j+1}$ la différentielle et $\delta : C_R^j \longrightarrow C_R^{j-1}$ son adjoint pour un produit scalaire convenable ([1]).

Définition 6 (c.f. [1]). Une cochaîne $c \in C_R^j$ est dite harmonique si $dc = \delta c = 0$. On note $\mathcal{H}_R^j$ l'espace des j-cochaînes harmoniques sur X, en particulier on note aussi $\mathcal{H}_R(G/B) = \mathcal{H}_R^l$.

Proposition 1. $f(\mathbf{St}_R) \subset \mathcal{H}_R(G/B)^\infty$.

Preuve :
Comme $\mathbf{St}_R$ est lisse il suffit de montrer que $f(\mathbf{St}_R) \subset \mathcal{H}_R(G/B)$. Soit $\phi \in \mathbf{St}_R$. Comme f_ϕ est une cochaîne de dimension maximale sur X, on a automatiquement $df_\phi = 0$ et il suffit de montrer que $\delta f_\phi = 0$. Notons C_α, $\alpha \in \Delta_1$, les murs de C et B_α, $\alpha \in \Delta_1$, le parahorique de G stabilisant C_α. L'ensemble des chambres de X contenant C_α dans leur adhérence s'identifie à B_α/B et par définition de la codifférentielle δ on a

$$(\delta f_\phi)(C_\alpha) = \sum_{u \in B_\alpha/B} f_\phi(uB/B) \quad .$$

Comme $(\delta f_\phi)(gC_\alpha) = \delta(g^{-1}f_\phi)(C_\alpha) = \delta(f_{g^{-1}\phi})(C_\alpha)$, ceci pour tout élément g de G, il suffit pour montrer la proposition de montrer :

$$\forall \phi \in \mathbf{St}_R, \quad \sum_{u \in B_\alpha/B} f_\phi(uB/B) = < \phi, \sum_{u \in B_\alpha/B} u_*\nu_B >= 0 \quad .$$

La proposition est donc une conséquence du

Lemme 6. $\forall \alpha \in \Delta_1, \ \sum_{u \in B_\alpha/B} u_*\nu_B = 0$.

Preuve :
Notons μ la R-mesure $\sum_{u \in B_\alpha/B} u_*\nu_B$ et fixons $\alpha \in \Delta_1$.

1^er^ cas : $v(\alpha) \in \Delta$. L'ensemble des B_α-orbites sur G/P est en bijection avec le quotient $W/ < s_\alpha >$. Pour tout élément $x \in W/ < s_\alpha >$ on note $\mathcal{O}_x$ la B_α-orbite correspondante, qui se décompose en B-orbites selon :

$$\mathcal{O}_x = Bq_\alpha(x)P/P \cup Bq_\alpha(x)s_\alpha P/P \quad .$$

Soit ν_x l'unique R-mesure de probabilité B_α-invariante sur $\mathcal{O}_x$. La R-mesure μ est évidemment B_α-invariante. Elle s'écrit donc de façon unique $\mu = \sum_{x \in W/<s_\alpha>} r_x\nu_x$, où les r_x sont dans R. Par définition :

$$\begin{aligned} r_x = < 1_{\mathcal{O}_x}, \mu > &= \sum_{u \in B_\alpha/B} < 1_{\mathcal{O}_x}, u_*\nu_B > \\ &= \sum_{u \in B_\alpha/B} < 1_{\mathcal{O}_x} \circ u, \nu_B > \quad . \end{aligned}$$

Comme $\mathcal{O}_x$ est une B_α-orbite, $1_{\mathcal{O}_x} \circ u = 1_{\mathcal{O}_x}$ et donc

$$\begin{aligned} r_x = |B_\alpha/B| < 1_{\mathcal{O}_x}, \nu_B > &= |B_\alpha/B| < 1_{\mathcal{O}_{u_\alpha(x)}} + 1_{\mathcal{O}_{u_\alpha(x)s_\alpha}}, \nu_B > \\ &= |B_\alpha/B|((-1)^{l(u_\alpha(x))} + (-1)^{l(u_\alpha(x))+1}) = 0 \quad . \end{aligned}$$

D'où le résultat pour $v(\alpha) \in \Delta$.

2$^{\text{ème cas}}$: α est l'unique racine affine de Δ_1 telle que $v(\alpha) \notin \Delta$. Mais alors $v(\alpha)$ est proportionelle à $-\mu_0$ et le raisonnement du cas précédent s'applique à la lettre en remplaçant s_α par la réflexion $s_{-\mu_0}$, où μ_0 désigne la plus grande racine de Φ^+. □

Ce qui achève la preuve de la proposition 1. □

PREUVE DU THÉORÈME : C'est une conséquence directe du lemme 5 et de la proposition 1. □

5. CARRÉ-INTÉGRABILITÉ DANS LE CAS COMPLEXE

Dorénavant on suppose $R = \mathbb{C}$.

On admet que la représentation de Steinberg $\mathbf{St}_\mathbb{C}$ est irréductible (c.f. [6]), de même que la représentation $\mathcal{H}_\mathbb{C}^{(2)}(G/B)^\infty$ (c'est la représentation spéciale de Matsumoto [16] et Shalika [17]). Rappelons qu'une représentation admissible (π, V) de G de caractère central unitaire est dite de carré intégrable (modulo Z) si pour tout couple $(v, \tilde{v}) \in (V, \tilde{V})$ (où $\tilde{V}$ désigne la représentation contragédiente de V), la fonction $g \mapsto < \pi(g)v, \tilde{v} >$ est de carré intégrable sur G/Z (où Z désigne le centre de G). Une telle représentation est évidemment unitarisable. Notons μ_G la mesure de Haar complexe sur G normalisée par $\mu_G(B) = 1$. La mesure μ_G induit une mesure $\bar{\mu_G}$ sur G/B qui est G-invariante à gauche. On note $L^2(G/B)$ l'espace des fonctions L^2 pour $\bar{\mu_G}$ et $|| \cdot ||$ la norme L^2 correspondante.

Lemme 7. *Les assertions suivantes sont équivalentes :*
(i) Le G-module de Steinberg $\mathbf{St}_\mathbb{C}$ est de carré intégrable.
(ii) $\forall \phi \in \mathbf{St}_\mathbb{C}$, $f_\phi \in L^2(G/B)$.
(iii) Il existe $\phi \in \mathbf{St}_\mathbb{C}$, $\phi \neq 0$, telle que $f_\phi \in L^2(G/B)$.

Preuve :
Notons L la forme linéaire sur $\mathbf{St}_\mathbb{C}$ définie par

$$\forall \phi \in \mathbf{St}_\mathbb{C}, \quad < \phi, L > = f_\phi(eB) \quad .$$

Par définition de la carré-intégrabilité, si $\mathbf{St}_\mathbb{C}$ est de carré intégrable, la fonction $g \mapsto < g\phi, L > = f_\phi(g^{-1})$ est de carré intégrable sur G/Z pour tout $\phi \in \mathbf{St}_\mathbb{C}$. C'est-à-dire $f_\phi \in L^2(G/B)$. Donc $(i) \Rightarrow (ii)$.

Evidemment $(ii) \Rightarrow (iii)$.
Pour $(iii) \Rightarrow (i)$, comme $\mathbf{St}_{\mathbb{C}}$ est irréductible il suffit pour montrer que $\mathbf{St}_{\mathbb{C}}$ est de carré intégrable de montrer qu'il existe $\phi \in \mathbf{St}_{\mathbb{C}}$ et $\tilde{\psi} \in \tilde{\mathbf{St}}_{\mathbb{C}}$ tous deux non-nuls tels que la fonction $g \mapsto < g.\phi, \tilde{\psi} >$ est de carré intégrable sur G/Z (c.f. [9, prop.2.5.3]). On choisit $\tilde{\psi} = L$, qui est non-nulle car $< 1_{BeP/P}, L >= 1$. $\square$

5.1. **Calcul de $||f_\phi||^2$.** Soit $\phi \in \mathbf{St}_{\mathbb{C}}$, on a $||f_\phi||^2 = \int_{G/B} |f_\phi(x)|^2 d\bar{\mu_G}(x)$. La décomposition de Bruhat-Tits de G s'écrit $G = \cup_{w \in W_{\text{aff}}} BwB$. D'où

$$||f_\phi||^2 = \sum_{w \in W_{\text{aff}}} \int_{BwB/B} |f_\phi|^2 d\bar{\mu_G}(x) \quad .$$

Pour tout élément $w \in W_{\text{aff}}$ on note $\pi_w : B \longrightarrow BwB/B$ la projection $\pi_w(b) = bwB/B$.

Définition 7. Soit $q : W_{\text{aff}} \longrightarrow \mathbb{N}$ la fonction définie par $q(w) = (BwB : B) = [B : B \cap wBw^{-1})] = \mu_G(BwB)$.

Les mesures $\mu_{G|BwB}$ et $(\pi_w)_* \mu_{B\times B}$ sont deux mesures $B\times B$-invariantes sur le $B\times B$-espace homogène BwB. Elles sont donc proportionnelles. Au vu des normalisations,

$$\mu_{G|BwB} = q(w)\, (\pi_w)_* \mu_{B\times B} \quad .$$

D'où :

$$||f_\phi||^2 = \sum_{w \in W_{\text{aff}}} q(w) \int_{B\times B} |f_\phi(bwb')|^2 d\mu_{B\times B}(b, b') \quad .$$

Comme $f_\phi \in C_R(G/B)$ on en déduit le

Lemme 8. $\forall \phi \in \mathbf{St}_{\mathbb{C}},\ \ ||f_\phi||^2 = \sum_{w \in W_{\text{aff}}} q(w) \int_B |f_\phi(bwB/B)|^2 d\mu_B(b)$.

Notons $\mathbf{St}_{\mathbb{C}}^B$ le sous-espace de dimension 1 des B-invariants de $\mathbf{St}_{\mathbb{C}}$, engendré par la fonction $1_{\mathcal{O}_e}$. On déduit immédiatement du lemme précédent l'égalité

$$\forall \phi \in \mathbf{St}_{\mathbb{C}}^B,\ \ ||f_\phi||^2 = \sum_{w \in W_{\text{aff}}} q(w) |f_\phi(wB/B)|^2 \quad . \tag{5}$$

Proposition 2. $\forall w \in W_{\text{aff}},\ \forall \phi \in \mathbf{St}_{\mathbb{C}}^B,\ \ |f_\phi(wB/B)|^2 = \frac{|f_\phi(eB/B)|^2}{q(w)^2}$.

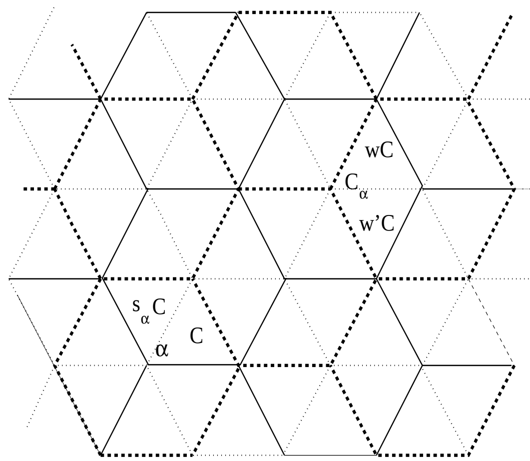
Preuve :
Raisonnons par récurrence sur la longueur $l(w)$ de w dans W_{aff}. Si $l(w) = 0$, on a $w = e$, $q(w) = 1$ et le lemme est trivialement vrai. Supposons le lemme vrai pour tout élément w' de W_{aff} de longueur $l(w') \leq r$. Soit $w \in W_{\text{aff}}$ de longueur $l(w) = r+1$. Soit $w = w's_\alpha$ où w' est de longueur $l(w') = r$ et α est une racine de Δ_1. L'élément w s'écrit encore

$$w = (w's_\alpha {w'}^{-1})w' \quad .$$

Soit C_α le mur de type α de la chambre $w'C$.

Lemme 9. *La fonction f_ϕ prend la même valeur sur toutes les chambres de X ayant C_α comme mur, à l'exception de $w'C$.*

FIG. 2 – Cas $G = \mathbf{SL(3)}$



Preuve :
Il suffit de remarquer que deux telles chambres sont images l'une de l'autre par un élément de $B \cap B^{w'}$ et de conclure par la B-invariance de ϕ. $\square$

Par définition de la codifférentielle et le lemme précédent on a

$$\delta f_\phi(C_\alpha) = f_\phi(w'B/B) + \mu(B^{w'} : B^{w'} \cap B^{w}) f_\phi(wB/B) \quad . \tag{6}$$

Comme f_ϕ est harmonique on a $\delta f_\phi(C_\alpha) = 0$. Par hypothèse de récurrence $|f_\phi(w'B/B)|^2 = |f_\phi(eB/B)|^2/q(w')^2$. Enfin $\mu(B^{w'} : B^{w'} \cap B^{w}) = \mu(B : B \cap B^{w'^{-1}w}) = q(s_\alpha)$. On déduit donc de l'équation (6) la relation

$$|f_\phi(wB/B)|^2 = \frac{|f_\phi(eB/B)|^2}{(q(w')q(s_\alpha))^2} \quad .$$

Mais $q(w) = q(w')q(s_\alpha)$ d'où le résultat pour w. Ce qui achève la preuve de la proposition 2. $\square$

On déduit immédatement de la formule (5) et de la proposition précédente le

Corollaire 2. $\forall \phi \in \mathbf{St}_{\mathbb{C}}^{B}, \;\; ||f_\phi||^2 = |f_\phi(eB/B)|^2 \times (\sum_{w \in W_{\text{aff}}} 1/q(w))$.

Ce corollaire et le lemme 7 réduisent la carré-intégrabilité de la Steinberg à une assertion sur le groupe de Weyl affine de G :

Proposition 3. *Soit* $\mathbf{G}$ *un* F*-groupe réductif connexe sur un corps local* F *non-archimédien, de groupe de Weyl affine* W_{aff}. *Le module de Steinberg* $\mathbf{St}_{\mathbb{C}}$ *de* $G = \mathbf{G}(F)$ *est de carré intégrable si et seulement si la série* $\sum_{w \in W_{\text{aff}}} 1/q(w)$ *converge.*

Remarques :
Dans le cadre des G-modules produits par des $\mathcal{HI}$-caractères, Borel obtient aussi ce résultat dans [1, prop.5.2].

5.2. **Fin de la preuve du corollaire.** D'après [15] (voir [1, 5.4-5.6]), la série $\sum_{w\in W_{\mathrm{aff}}} 1/q(w)$ converge . On déduit de la proposition précédente et de la proposition 1 que l'application f injecte $\mathbf{St}_{\mathbb{C}}$ dans $\mathcal{H}^{(2)}(G/B)^{\infty}$. On conclut à l'égalité par irréductibilité de la représentation spéciale $\mathcal{H}^{(2)}(G/B)$. $\square$

Références

[1] Borel A., Admissible representations of a semi-simple group over a local field with vectors fixed under an Iahori subgroup, *Invent. Math* 35 (1976) 23-259

[2] Borel A., Serre J.P., Cohomologie d'immeubles et de groupes S-arithmétiques, *Topology* 15 (1976) 211-232

[3] Borel A., Wallach N., Continuous cohomology, discrete subgroups, and representations of reductive groups, Princeton University Press, 1980

[4] Bruhat F., Tits J., Groupes réductifs sur un corps local I, *Publ. Math. IHES* 41 (1972) 1-251

[5] Cartier P., Representations of p-adic groups : a survey in Automorphic forms, representations and L-functions *Proc. Sympos. Pure Math.* XXXIII Part 1, (1979) pp. 111–155

[6] Casselman W., On a p-adic vanishing theorem of Garland, *Bull. AMS* 80 (1974) 1001-1004

[7] Casselman W., The Steinberg character as a true character. Harmonic analysis on homogeneous spaces. PSPM 26, (1974) 413-417

[8] Casselman W., Introduction to the theory of admissible representations of p-adic reductive groups, preprint

[9] Casselman W., A new nonunitarity argument for p-adic representations, *J.Fac.Sci.Univ.Tokyo* 28 (1981) 907-928

[10] Furstenberg H., A Poisson formula for semi-simple Lie groups , *Annals of Math.* 77 (1963) 335-386

[11] Furstenberg H., Random walks and discrete subgoups of Lie groups, in Advances in Probability and Related Topics, Vol.1, Dekker (1971) 1-63

[12] Furstenberg H., Boundary theory and stochastic processes on homogeneous spaces, PSPM 26 (1972) 193-229

[13] Knapp A.W., Fatou's theorem for symmetric spaces *Annals of Math.* 88 (1968) 106-127

[14] Knapp A.W., Williamson R.E., Poisson integrals and semisimple groups, *J.Analyse Math.* 24 (1971) 53-76

[15] Mac Donald I.G., The Poincaré series of a Coxeter group, *Math.Annalen* 199 (1972) 161-174

[16] Matsumoto H., Fonctions sphériques sur un groupe semi-simple p-adique, *CRAS* 269 (1969) 829-832

[17] Shalika J.A., On the space of cusp forms of a p-adic Chevalley group, *Annals of Math.* 92 (1970) 262-278

[18] Tits J., Reductive groups over local fields, in Automorphic forms, representations and L-functions, PSPM 33 Corvallis part 1 (1979) 29-69

Bruno Klingler
Institut Post-Doctoral Européen
IHES 35 route de Chartres
91440 Bures sur Yvette
FRANCE

klingler@math.polytechnique.fr