Sur la rigidité de certains groupes fondamentaux, l'arithméticité des réseaux hyperboliques complexes, et les "faux plans projectifs"

Bruno KLINGLER *

English summary :

The motivation of this work comes from the study of lattices in real simple Lie groups. The famous Margulis's superrigidity theorem claims that finite dimensional reductive representations of any lattice of a real simple Lie group of real rank ≥ 2 are superrigid. As a corollary such a lattice is arithmetic. These results extend to the real rank one case for lattices in $Sp(n,1)$ and $F_4^{(-20)}$ by the work of Corlette and Gromov-Schoen. On the other hand Mostow and Deligne-Mostow exhibited arithmetic lattices with non-superrigid representations as well as non-arithmetic lattices in the unitary group $PU(2,1)$. A natural question is then to find simple sufficient conditions for superrigidity or arithmeticity of lattices in $PU(2,1)$. Rogawski conjectured the following : let Γ be a torsion-free cocompact lattice in $PU(2,1)$ such that the hyperbolic quotient $M = \Gamma\backslash\mathbf{B}^2_{\mathbb{C}}$ verifies the cohomogical conditions $b_1(M) = 0$ and $H^{1,1}(M,\mathbb{C}) \cap H^2(M,\mathbb{Q}) \simeq \mathbb{Q}$. Then Γ is arithmetic.

In this paper we consider a smooth complex projective surface M verifying the above cohomological assumptions and study Zariski-dense representations of the fundamental group $\pi_1(M)$ in a simple k-group $\mathbf{H}$ of k-rank ≤ 2 (where k denotes a local field). Our main result states that there are strong restrictions on such representations, especially when k is non-archimedean (theorem 5). We then consider some cocompact lattices in $PU(2,1)$ of special geometric interest : recall that a "fake $\mathbf{P}^2\mathbb{C}$" is a smooth complex surface (distinct from $\mathbf{P}^2\mathbb{C}$) having the same Betti numbers as $\mathbf{P}^2\mathbb{C}$. "Fake $\mathbf{P}^2\mathbb{C}$" exist by a result of Mumford and are complex hyperbolic quotients $\Gamma\backslash\mathbf{H}^2_{\mathbb{C}}$ by Yau's proof of the Calabi conjecture. They obviously verify the hypotheses of Rogawski's conjecture. In this case we prove that every Zariski-dense representation of Γ in $\mathbf{PGL(3)}$ is superrigid in the sense of Margulis (theorem 3). As a corollary every "fake $\mathbf{P}^2\mathbb{C}$" is an *arithmetic* quotient of the ball $\mathbf{B}^2_{\mathbb{C}}$.

*support post-doctoral de l'IHES et EPSRC Grant GRK99015 de l'Isaac Newton Institute

Table des matières

1 Introduction

1.1 Motivation et cadre

Ce papier trouve sa motivation première dans l'étude des réseaux des groupes de Lie simples. Si G désigne un groupe de Lie réel simple connexe, les réseaux de G (i.e. ses sous-groupes discrets de covolume fini pour la mesure de Haar de G) sont précisément décrits par les travaux de Margulis dès que le groupe G est de rang réel strictement supérieur à 1. D'abord, leurs représentations réductives de dimension finie sur un corps local quelconque sont bornées, ou s'obtiennent par restriction d'une représentation de dimension finie de G (superrigidité). Ensuite, et comme corollaire du résultat précédent, ils s'obtiennent tous par un procédé de construction arithmétique, "comme" $\mathbf{SL}(n,\mathbb{Z})$ dans $\mathbf{SL}(n,\mathbb{R})$ (arithméticité).

Précisément, soit $\mathbf{G}$ un $\mathbb{R}$-groupe connexe presque simple $\mathbb{R}$-isotrope et Γ un réseau de $\mathbf{G}(\mathbb{R})$. Rappelons les notions d'*homomorphismes standards* et d'*arithméticité* pour Γ :

Définition : Soit k un corps local et $\mathbf{H}$ un k-groupe connexe adjoint k-simple. Un homomorphisme $\rho : \Gamma \longrightarrow \mathbf{H}(k)$ d'image $\rho(\Gamma)$ Zariski-dense dans $\mathbf{H}$ est dit standard si :
- soit $\rho(\Gamma)$ est relativement compact dans $\mathbf{H}(k)$,
- soit k est archimédien et ρ s'étend en un k-épimorphisme de $\mathbf{G}$ dans $\mathbf{H}$.

Définition : Le réseau Γ est dit arithmétique s'il existe un $\mathbb{Q}$-groupe connexe non-commutatif presque $\mathbb{Q}$-simple $\mathbf{H}$ et un $\mathbb{R}$-épimorphisme $p : \mathbf{H}(\mathbb{R}) \longrightarrow G$ surjectif continu de noyau $\ker p\,(\mathbb{R})$ compact et tel que les groupes $p(\mathbf{H}(\mathbb{Z}))$ et Γ sont commensurables (i.e. leur intersection est d'indice fini dans chacun d'entre eux).

L'arithméticité de Γ est alors la conséquence de la rigidité de certaines de ses représentations ([20, p.367]) :

Théorème 1 (Margulis) *Soit $\mathbf{G}$ un $\mathbb{R}$-groupe connexe absolument simple $\mathbb{R}$-isotrope et Γ un réseau de $\mathbf{G}(\mathbb{R})$. Soit L le corps engendré par les entrées des matrices de Γ et $\rho_0 : \Gamma \longrightarrow \mathbf{G}(L)$ l'inclusion canonique. Le réseau Γ est arithmétique si et seulement si pour tout plongement $\sigma : L \longrightarrow k$ dans un corps local k, le morphisme ${}^{\sigma}\rho_0 : \Gamma \longrightarrow {}^{\sigma}\mathbf{G}(k)$ est standard.*

Les théorèmes de superrigidité et d'arithméticité de Margulis s'énoncent alors :

Théorème 2 (Margulis) *Soit $\mathbf{G}$ un $\mathbb{R}$-groupe presque simple connexe $\mathbb{R}$-isotrope* tel que *$\mathrm{rang}_{\mathbb{R}}\mathbf{G} \geq 2$ et Γ un réseau de $\mathbf{G}(\mathbb{R})$. Si k désigne un corps local, $\mathbf{H}$ un k-groupe connexe adjoint k-simple, et $\rho : \Gamma \longrightarrow \mathbf{H}(k)$ un homomorphisme d'image Zariski-dense, alors l'homomorphisme ρ est standard. En particulier le réseau Γ est arithmétique.*

En rang réel 1, ces résultats ont été étendus par Corlette [5] et Gromov-Schoen [11] aux réseaux de $Sp(n,1)$ et $F_4^{(-20)}$. A l'inverse, le groupe $SO(n,1)$ possède des réseaux non-arithmétiques. De tels exemples ont été construits par Makarov [19] et Vinberg [31] pour n petit, et Gromov- Piatetski-Shapiro [10] pour toute valeur de n.

Reste alors à étudier les réseaux du groupe $PU(n,1) = \mathbf{PU}(n,1)(\mathbb{R})$, où $\mathbf{PU}(n,1)$ désigne le $\mathbb{R}$-groupe adjoint du $\mathbb{R}$-groupe $\mathbf{U(n,1)}$ des transformations linéaires préservant la forme hermitienne $|z_1|^2 + \cdots + |z_n|^2 - |z_{n+1}|^2$ (on considère le groupe $PU(n,1)$ plutôt que le groupe $SU(n,1)$ pour éviter les problèmes de torsion dû au centre de $SU(n,1)$, illisibles sur l'espace symétrique associé). En ce qui concerne l'arithméticité, Mostow [22] et Deligne-Mostow [6] ont construit des réseaux non-arithmétiques (en nombre fini), cocompacts et non-cocompacts, dans $PU(2,1)$ et $PU(3,1)$. En ce qui concerne la superrigidité, Mostow [22] exhibe deux réseaux arithmétiques cocompacts Γ et Γ' de $PU(2,1)$ et un morphisme *surjectif $\rho : \Gamma \longrightarrow \Gamma'$ de noyau infini* : il existe donc des réseaux arithmétiques cocompact de $PU(2,1)$ admettant des homomorphismes non-standards (en particulier vouloir montrer la superrigidité de *toutes* les représentations Zariski-dense dans $\mathbf{PGL}(n+1)$ d'un réseau Γ de $PU(n,1)$ pour montrer l'arithméticité de Γ est généralement trop demander).

1.2 Une conjecture de Rogawski et un premier résultat

Notons $\mathbf{H}^n_{\mathbb{C}}$ l'espace symétrique hermitien $PU(n,1)/P(U(n)\times U(1))$ associé au groupe $PU(n,1)$. Il s'identifie à la boule unité ouverte $\mathbf{B}^n_{\mathbb{C}} = \{[z_1,\cdots,z_{n+1}] \in \mathbf{P}^n\mathbb{C},\ /|z_1|^2 + \cdots + |z_n|^2 < |z_{n+1}|^2\}$ de l'espace projectif $\mathbf{P}^n\mathbb{C}$. Le groupe des isométries holomorphes de l'espace hyperbolique complexe $\mathbf{H}^n_{\mathbb{C}}$ s'identifie à $PU(n,1)$. Soit Γ un réseau cocompact sans torsion de $PU(n,1)$ et $M = \Gamma\backslash\mathbf{H}^n_{\mathbb{C}}$ le quotient hyperbolique complexe lisse associé. Dans ce papier on se demande si une condition cohomologique "raisonnable" sur M (c'est-à-dire sur Γ) suffit à impliquer des propriétés de rigidité forte ou d'arithméticité pour Γ. La condition considérée est la suivante :

$(*)$: $b_1(M) = 0$ et le groupe de Néron-Severi rationnel $NS(M,\mathbb{Q}) := H^{1,1}(M,\mathbb{C}) \cap H^2(M,\mathbb{Q})$ est isomorphe à $\mathbb{Q}$.

Conjecture 1 (Rogawski) *Soit Γ un réseau cocompact sans torsion de $PU(2,1)$ tel que le quotient $M = \Gamma\backslash\mathbf{H}^2_{\mathbb{C}}$ vérifie la condition $(*)$. Alors le réseau Γ est arithmétique.*

Indiquons de suite le résultat le plus frappant de ce papier, qui établit la superrigidité à valeur dans $\mathbf{PGL}(3)$ pour un sous-ensemble particulièrement intéressant d'un point de vue géométrique (mais malheureusement de cardinal fini) de l'ensemble des réseaux cocompacts sans torsion de $PU(2,1)$ vérifiant la condition $(*)$ (et démontre en corollaire la conjecture de Rogawski pour ce sous-ensemble de réseaux). Pour décrire ce sous-ensemble, rappelons qu'une question classique de Severi demande quelles sont les surfaces projectives complexes lisses M ressemblant topologiquement à $\mathbf{P}^2\mathbb{C}$, i.e. ayant les mêmes nombres de Betti. Il ressort du théorème de Calabi-Yau qu'un tel "faux $\mathbf{P}^2\mathbb{C}$" est nécessairement un quotient hyperbolique complexe $M = \Gamma\backslash\mathbf{H}^2_{\mathbb{C}}$, correspondant à la plus petite valeur possible du nombre caractéristique $c_1^2 = 3c_2 = 9$. Mumford ([23], [1, p.136]) a exhibé un tel exemple et remarqué que les "faux $\mathbf{P}^2\mathbb{C}$" sont nécessairement en nombre finis, mais qu'on ne sait pas les énumérer. Remarquons qu'un "faux $\mathbf{P}^2\mathbb{C}$" vérifie trivialement la condition $(*)$ (car $b_1(M) = 0$ et $H^{1,1}(M,\mathbb{C}) = \mathbb{C}$). Nous montrons le

Théorème 3 *Soit $M = \Gamma\backslash\mathbf{H}^2_{\mathbb{C}}$ un "faux $\mathbf{P}^2\mathbb{C}$" (lisse). Alors toute représentation Zariski-dense $\rho : \Gamma \longrightarrow \mathbf{PGL}(3)$ est un homorphisme standard. En particulier le réseau Γ est arithmétique.*

1.3 Cadre et résultats

On précisera à la section suivante ce que l'on sait des réseaux Γ de $PU(2,1)$ vérifiant la condition $(*)$ ainsi que des "faux $\mathbf{P}^2\mathbb{C}$". Soulignons pour l'instant que le cadre naturel du résultat précédent est l'étude des représentations réductives de dimension finie du groupe fondamental d'une variété projective complexe lisse.

Dans ce cadre, on dispose de "théorèmes de factorisation" qui décrivent les représentations du groupe fondamental d'une variété projective complexe lisse de dimension complexe n dans un k-groupe simple de k-rang *strictement inférieur à* n (c.f. [27], [18], [34], [14], [15]). Résumons grossièrement l'idée de ces théorèmes : si M désigne une variété projective complexe lisse, k un corps local, $\mathbf{H}$ un k-groupe simple de k-rang $r < n$, et si $\rho_M : \pi_1(M) \longrightarrow \mathbf{H}(k)$ désigne une représentation non-bornée Zariski-dense, non-rigide dans $Hom(\pi_1(M), \mathbf{H}(k))//\mathbf{H}(k)$ si k est archimédien, alors il existe une variété projective Y *de dimension* $\leq r$, un morphisme projectif $f : M \longrightarrow Y$ et une représentation ρ_Y tel que $\rho_M = \rho_Y \circ f_*$.

A l'inverse si $rang_k \mathbf{H} \geq \dim_{\mathbb{C}} M$, les représentations Zariski-denses du groupe fondamental $\pi_1(M)$ dans $\mathbf{H}(k)$ échappent en général à l'investigation. Au vu du théorème 1 de Margulis, le cas frontière $r = n$ est particulièrement crucial pour le problème de l'arithméticité des réseaux de $PU(n, 1)$ ($M = \Gamma \backslash \mathbf{H}^n_{\mathbb{C}}$, $\mathbf{H} = \mathbf{PGL}(n + 1)$). On peut espérer étendre notre compréhension à ce cas en imposant des contraintes géométriques aux variétés considérées. La condition $(*)$ est particulièrement naturelle de ce point de vue. D'une part, la condition $b_1(M) = 0$ permet de contrôler les représentations abéliennes de $\pi_1(M)$. Elle est d'autant plus naturelle si l'on veut que le groupe fondamental $\pi_1(M)$ ait un comportement approchant celui d'un réseau d'un groupe simple de rang supérieur (pour lequel la propriété (T) de Kazhdan force automatiquement l'annulation du nombre de Betti b_1). D'autre part et surtout, la condition $(*)$ implique que le groupe de Picard $H^1(M, \mathcal{O}^*_M)$ s'identifie, modulo torsion, à $\mathbb{Z}$; comme M est projective, tout diviseur effectif sur M est alors ample, ce qui permet par le théorème de Lefschetz ([12]) de contrôler la restriction d'une représentation $\rho_M : \pi_1(M) \longrightarrow \mathbf{H}(k)$ au groupe fondamental d'une hypersurface (complexe) de M.

1.3.1 Rigidité non-archimédienne

L'étude de la rigidité non-archimédienne commence par la preuve du théorème (facile) suivant :

Théorème 4 (rigidité non-archimédienne en rang 1) *Soit M une variété complexe projective lisse vérifiant la condition $(*)$, k un corps local non-archimédien, $\mathbf{H}$ un k-groupe k-simple connexe de k-rang 1 et $\rho : \pi_1(M) \longrightarrow \mathbf{H}(k)$ une représentation d'image Zariski-dense dans $\mathbf{H}$. Alors la représentation ρ est d'image bornée dans $\mathbf{H}(k)$.*

Le coeur du papier s'intéresse alors à la question bien plus délicate :

Question : Soit M une surface complexe projective lisse vérifiant la condition $(*)$, k un corps local non-archimédien, $\mathbf{H}$ un k-groupe connexe k-simple de k-rang 2 et $\rho : \pi_1(M) \longrightarrow \mathbf{H}(k)$ une représentation d'image Zariski-dense dans $\mathbf{H}$. La représentation ρ est-elle d'image bornée dans $\mathbf{H}(k)$?

Pour étudier une telle question, on étudie en détail l'application pluriharmonique ρ-équivariante $f : \tilde{M} \longrightarrow X$ attachée à ρ par Gromov et Schoen [11], où X désigne l'immeuble de Bruhat-Tits de $\mathbf{H}(k)$. Rappelons qu'un point $\tilde{x}$ de $\tilde{M}$ est dit régulier s'il admet un voisinage dans $\tilde{M}$ dont l'image par f est contenue dans un appartement de X, qu'il est dit singulier sinon. L'ensemble des points singuliers de f est un fermé $S(\tilde{M}, \rho)$ de $\tilde{M}$ pour la topologie usuelle, naturellement $\pi_1(M)$-invariant. Notons $S(M, \rho)$ l'image de $S(\tilde{M}, \rho)$

par la projection naturelle. Gromov et Schoen [11] montrent que ce fermé de M (pour la topologie usuelle) est de codimension de Hausdorff supérieure ou égale à 2. D'après [15], c'est en fait un fermé algébrique de M. Une stratégie pour attaquer la question 1.3.1 consiste à :

1. montrer que $S(M,\rho)$ n'a pas de composantes de pure codimension (complexe) 1.
2. montrer que l'image $f(\tilde{M})$ est contenue dans un appartement de X et conclure par contradiction à la Zariski-densité de ρ.

Dans ce papier on démontre le point 1. On commence par définir une notion d'holonomie locale $\tau : \pi_1(R(M,\rho)) \longrightarrow W$ (où $R(M,\rho)$ désigne l'ouvert $M - S(M,\rho)$ de M et W le groupe de Weyl fini de H). Cette holonomie locale décrit la compatibilité des marquages des appartements rencontrés par f. On construit alors un revêtement ramifié galoisien fini $p : Z \longrightarrow M$ de groupe de Galois $\Lambda = Im\tau$, dont le lieu de ramification $D \subset Z$ est contenu dans le lieu singulier $S(Z,\rho_Z)$ et correspond aux composantes de codimension 1 de $S(M,\rho)$ ayant de l'holonomie locale. Ce revêtement est l'outil principal pour l'étude de ρ, il est relié au revêtement spectral $\pi : M^{sp} \longrightarrow M$ défini par Katzarkov ([17]) mais paraît plus simple à étudier. Le résultat principal de ce papier est le

Théorème 5 (rigidité faible non-archimédienne) *Soit M une surface complexe projective lisse vérifiant la condition $(*)$, k un corps local non-archimédien et $\rho : \pi_1(M) \longrightarrow$-$\mathbf{PGL}(3,k)$ d'image Zariski-dense dans $\mathbf{PGL}(3)$. Alors le revêtement $p : Z \longrightarrow M$ est étale.*

Corollaire 1 *Sous les mêmes hypothèses que le théorème précédent, l'ensemble singulier $S(M,\rho)$ associé à l'application f est une union finie de points de M.*

Bien que le revêtement $p : Z \longrightarrow M$ contienne l'essentiel de l'information holomorphe donnée par l'application pluriharmonique $f : \tilde{M} \longrightarrow X$, je ne sais pas conclure du théorème précédent à la superrigidité des représentations à valeur dans $\mathbf{PGL}(3,k)$ en toute généralité sous l'hypothèse $(*)$. Dans le cas cependant où l'on suppose de plus $h^{2,0}(M) = 0$ (c'est-à-dire le cas des "faux $\mathbf{P}^2\mathbb{C}$'), on obtient le :

Théorème 6 *Avec les notations du théorème 5 et si de plus M est un "faux $\mathbf{P}^2\mathbb{C}$" alors ρ est bornée.*

1.3.2 Rigidité archimédienne

Si M désigne encore une surface projective complexe lisse vérifiant $(*)$, on étudie ensuite les représentations archimédiennes de $\pi_1(M)$. C'est la partie la plus simple du papier, grâce à l'efficacité de la théorie de Simpson décrivant l'équivalence entre la catégorie des représentations linéaires semi-simples de dimension finie de $\pi_1(M)$ et la catégorie des fibrés de Higgs polystables de classes de Chern nulles sur M (c.f. section 3 pour les notions de fibrés de Higgs et de représentations de Hodge). On montre le

Théorème 7 (rigidité faible archimédienne) *Soit M une surface complexe kählérienne compacte vérifiant la condition $NS(M,\mathbb{Q}) \simeq \mathbb{Q}$.*

1. Toute représentation $\rho : \pi_1(M) \longrightarrow PGL(3, \mathbb{C})$ d'image Zariski-dense se déforme dans la variété des représentations $Hom(\pi_1(M), PGL(3, \mathbb{C}))//PGL(3, \mathbb{C})$ en une représentation unitaire, ou en une représentation de Hodge $\rho' : \pi_1(M) \longrightarrow PU(2, 1)$ associée à une variation complexe de structure de Hodge ρ'-équivariante $f' : \tilde{M} \longrightarrow \mathbf{H}^2_{\mathbb{C}}$ génériquement immersive.

2. Supposons de plus que la surface M est un quotient hyperbolique complexe $\Gamma \backslash \mathbf{H}^2_{\mathbb{C}}$ avec $\Gamma \overset{\rho_0}{\hookrightarrow} PU(2, 1)$ un réseau cocompact sans torsion de $PU(2, 1)$, et que le groupe de Néron-Severi modulo torsion $NS(M)/\text{tors} = (Pic(M)/Pic^0(M))/\text{tors}$ est engendré par un multiple entier de la classe de la forme de Kähler ω de la métrique à courbure sectionnelle holomorphe constante -2 sur M. Soit $\rho : \pi_1(M) \longrightarrow PGL(3, \mathbb{C})$ une représentation d'image Zariski-dense. Alors ou bien ρ se déforme dans la variété des représentations $Hom(\pi_1(M), PGL(3, \mathbb{C}))//PGL(3, \mathbb{C})$ en une représentation unitaire, ou bien $\overline{\rho}$ est conjuguée à $\overline{\rho_0}$.

3. Si M est un "faux $\mathbf{P}^2\mathbb{C}$", alors l'homomorphisme $\overline{\rho} : \Gamma \longrightarrow PGL(3, \mathbb{C})$ est standard.

Le point 2 est dû a à Reznikov [24]. Sa preuve est un calcul direct de fibré de Higgs. La nôtre s'appuie sur le point 1., qui étudie la géométrie des variations complexes de structures de Hodge sur M via les domaines de périodes. Cette approche a l'avantage de donner quelques renseignements en dimension supérieure. Elle a été proposée par Wang mais l'argument principal de [32] est incorrect (c.f. sections 3.2.1, 3.3). Enfin le point 3. se démontre à partir du point 2. et du théorème 6 de rigidité non-archimédienne.

Dans la brève section 4, on déduit des théorèmes 1, 6 et 7 le théorème 3 d'arithméticité pour les "faux $\mathbf{P}^2\mathbb{C}$".

1.4 Remarques et questions

1. De très nombreuses variétés projectives complexes vérifient la condition $(*)$. Pour les plus simples d'entre elles (par exemple les hypersurfaces génériques lisses de $\mathbf{P}^n\mathbb{C}$), la réponse à la question 1.3.1 (adaptée à la dimension correspondante) est trivialement positive car elles sont simplement connexes. Les cas intéressants (c'est-à-dire possédant un "gros" groupe fondamental et pour lesquels la question 1.3.1 est absolument non-triviale) sont difficiles a construire. Les exemples les plus simples sont certaines surfaces hyperboliques complexes (c.f. ci-dessous).

2. Notons $\mathcal{R}(*)$ le sous-ensemble de l'ensemble des réseaux cocompacts sans torsion Γ de $PU(2, 1)$ tels que la surface complexe lisse $M = \Gamma \backslash \mathbf{H}^2_{\mathbb{C}}$ vérifie la condition $(*)$. D'après un théorème de Blasius et Rogawski ([2, theor.1, theor.3]), le sous-ensemble $\mathcal{R}(*)$ est "très gros" : tout réseau arithmétique de congruence de $PU(2, 1)$ suffisamment petit obtenu à partir d'une algèbre à division lui appartient. Précisément, soit F un corps de nombre totalement réel et E/F une extension quadratique totalement imaginaire de F. Soit D une algèbre à division sur E de dimension 9, munie d'une involution ι de deuxième espèce, dont le groupe unitaire $PU(D, \iota)$ défini sur F est compact en toute place infinie de F

sauf une. Pour K un sous-groupe compact ouvert du groupe $G(\mathbb{A}_f)$, où $\mathbb{A}_f$ désignent les adèles finies de F, notons Γ_K l'intersection $G(F) \cap K$ et regardons Γ_K comme un sous-groupe de $PU(2,1)$ par la projection naturelle $PU(D,\iota)_\infty \longrightarrow PU(2,1)$. Alors pour tout K suffisamment petit le quotient $\Gamma_K \backslash \mathbf{H}^2_{\mathbb{C}}$ vérifie $(*)$.

3. Soit Γ un réseau cocompact sans torsion de $PU(n,1)$ de quotient hyperbolique complexe associé $M = \Gamma\backslash\mathbf{H}^n_{\mathbb{C}}$. Notons ω la forme de Kähler ω de la métrique à courbure sectionnelle holomorphe constante -2 sur M, elle définit un élément $[\omega] \in H^{1,1}(M,\mathbb{C}) \cap H^2(M,\mathbb{R})$. Comme la forme $(n+1)\omega$ est aussi la forme de courbure du fibré canonique K_M, l'élément $(n+1)[\omega]$ est dans le groupe de Néron-Severi modulo torsion $NS(M)/\text{tors}$ et $[\omega]$ est dans le groupe de Néron-Severi rationnel $NS(M,\mathbb{Q})$ (mais pas nécessairement dans $NS(M)/\text{tors}$). Remarquons que si le réseau Γ de $PU(n,1)$ se relève en un réseau *sans torsion* de $SU(n,1)$, la classe $[\omega]$ est automatiquement dans $NS(M)/\text{tors}$. En effet, notons L le fibré en droite holomorphe tautologique $\mathcal{O}_{\mathbf{P}^n\mathbb{C}}(-1)_{|\mathbf{H}^n_{\mathbb{C}}}$ sur $\mathbf{H}^n_{\mathbb{C}}$. Ce fibré est naturellement $SU(n,1)$-équivariant (mais pas $PU(n,1)$-équivariant). Si Γ est un réseau *sans torsion* de $SU(n,1)$, le quotient $\Gamma\backslash L$ définit un élément $L_M \in H^1(M,\mathcal{O}^*_M)$. Comme sa forme de courbure n'est autre que ω, on a bien $[\omega] \in NS(M)/\text{tors}$.

Introduisons alors la condition cohomologique plus forte que $(*)$ rencontrée dans le théorème 7 de rigidité archimédienne :
$(**)$: $b_1(M) = 0$, et le groupe de Néron-Severi modulo torsion $NS(M)/\text{tors}$ est engendré par un multiple entier de la classe $[\omega]$.

Dans le cas où Γ se relève en un réseau *sans torsion* de $SU(n,1)$, cette condition implique d'après la remarque précédente que $NS(M)/\text{tors}$ est engendré par la classe $[\omega]$. En termes plus géométriques, cela revient à demander que tout fibré en droite holomorphe sur $M = \Gamma\backslash\mathbf{H}^n_{\mathbb{C}}$ soit (modulo torsion) localement homogène, i.e. quotient par Γ d'un fibré en droite holomorphe $SU(n,1)$-équivariant sur $\mathbf{H}^n_{\mathbb{C}}$.

Il est possible que la réponse à la question 1.3.1 de rigidité non-archimédienne soit positive pour tout élément Γ de l'ensemble $\mathcal{R}(*)$, mais que la rigidité archimédienne de Γ ne soit vraie que pour le sous-ensemble $\mathcal{R}(**)$ des réseaux cocompacts sans torsion de $PU(2,1)$ vérifiant la condition $(**)$.

4. Alors que l'ensemble $\mathcal{R}(*)$ est "très gros", la taille de l'ensemble $\mathcal{R}(**)$ me reste mystérieuse. En particulier je ne sais pas si les réseaux arithmétiques construits par Blasius et Rogawski lui appartiennent. Remarquons que $\mathcal{R}(**)$ contient les groupes fondamentaux des "faux $\mathbf{P}^2\mathbb{C}$" : soit M un "faux $\mathbf{P}^2\mathbb{C}$" et h un générateur positif de $NS(M)/\text{tors}$, d'après la dualité de Poincaré on a $h.h = 1 = [\omega].[\omega]$ d'où $h = [\omega]$. D'où le résultat. Toutefois, je ne sais pas si pour $M = \Gamma\backslash\mathbf{H}^2_{\mathbb{C}}$ un "faux $\mathbf{P}^2\mathbb{C}$", le réseau Γ de $PU(2,1)$ se relève en un réseau sans torsion dans $SU(2,1)$.

5. En ce qui concerne les "faux $\mathbf{P}^2\mathbb{C}$", on en connait (pour autant que je sache) trois exemples, tous obtenus par uniformisation p-adique. Le premier a été construit par Mum-

ford [23], les deux autres par H.Kato [16], tous trois par des méthodes d'uniformisation p-adique. Kato a montré au cas par cas dans ces trois exemples que les réseaux de $PU(2,1)$ ainsi construits sont arithmétiques, du type construit par Blasius et Rogawski, en réalisant les "faux $\mathbf{P}^2\mathbb{C}$" en question comme surfaces de Shimura de type PEL, espace de module grossier pour un certain type de variétés abéliennes polarisées de dimension 9 avec endomorphismes et structures de niveau prescrits. Je ne sais pas si tout "faux $\mathbf{P}^2\mathbb{C}$" est nécessairement de cette sorte.

1.5 Remerciements

Je remercie Y. Benoist et J.Bellaiche pour d'intéressantes discussions et D.Toledo pour ses commentaires. Je remercie particulièrement le referee, qui m'a signalé un argument incomplet dans une première version et simplifié une preuve.

2 Rigidité non-archimédienne

2.1 Notations et rappels

Si M désigne une variété kählérienne compacte connexe, l'étude d'une représentation résductive de dimension finie non-archimédienne de $\pi_1(M)$ peut se faire à l'aide de l'application pluriharmonique à valeur dans un immeuble qui lui est attachée par Gromov et Schoen [11].

Précisément, soit k un corps local non-archimédien, $\mathbf{H}$ un k-groupe connexe k-simple de k-rang r, H le groupe $\mathbf{H}(k)$ de ses k-points, X l'immeuble euclidien associé à H, W (resp. W^{aff}) le groupe de Weyl (resp. le groupe de Weyl affine) associé à H et $V_{\mathbb{R}}$ (respectivement V) l'espace vectoriel euclidien modèle des appartements de X sur lequel W^{aff} agit par réflexions affines (respectivement son complexifié $V = V_{\mathbb{R}} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$). Soit N une variété riemannienne et $f : N \longrightarrow X$ une application continue. Rappelons qu'un point x de N est dit *régulier* pour f s'il existe un appartement F de X contenant l'image par f d'un voisinage de x [11, p.225]. Sinon x est dit *singulier*. D'autre part, l'application f est dite *harmonique* si pour tout point x de N, il existe un voisinage de ce point sur lequel f minimise l'énergie [11, p.232].

Soit M une variété kählérienne compacte connexe de dimension complexe n et $\rho : \pi_1(M)$-$\longrightarrow H$ une représentation du groupe fondamental $\pi_1(M)$ de M, d'image Zariski-dense dans $\mathbf{H}$. D'après [11, theor.7.1, lemma 8.1], il existe une application ρ-équivariante $f_{\tilde{M}} : \tilde{M} \longrightarrow X$ lipschitzienne harmonique, d'énergie finie car M est compacte. Notons $R(\tilde{M}, \rho)$ l'ouvert des points réguliers de $f_{\tilde{M}}$, cet ensemble est bien-sûr $\pi_1(M)$-invariant et on notera $R(M, \rho)$ son image dans M. D'après [11, theor. 6.4], le complémentaire $S(M, \rho)$ de $R(M, \rho)$ dans M est de dimension de Hausdorff plus petite que $2n-2$. De plus l'application $f_{\tilde{M}}$ est pluriharmonique, c'est-à-dire vérifie l'équation $\partial\overline{\partial} f_{\tilde{M}} = 0$ sur $R(\tilde{M}, \rho)$ (c.f. [11, theor.7.3]).

Supposons maintenant que M est une variété complexe projective lisse. Si Y désigne une variété complexe projective (non-nécessairement lisse) de revêtement universel $\tilde{Y}$, et si $j : Y \longrightarrow M$ désigne un morphisme analytique de relèvement $\tilde{j} : \tilde{Y} \longrightarrow \tilde{M}$ fixé, on désignera par $f_{\tilde{Y}}$ l'application $f_{\tilde{M}} \circ \tilde{j} : \tilde{Y} \longrightarrow X$ et par ρ_Y la représentation $\rho \circ j_* : \pi_1(Y) \longrightarrow H$. L'application $f_{\tilde{Y}}$ est ρ_Y-équivariante. On notera $R(Y, \rho_Y)$ (respectivement $S(Y, \rho_Y)$) l'ensemble des points réguliers (respectivement singuliers) de $f_{\tilde{Y}}$. Remarquons que si l'application j est ouverte pour la topologie usuelle (en particulier si j est un revêtement ramifié) alors $S(Y, \rho_Y) = j^{-1} S(M, \rho_M)$. Si Y désigne une sous-variété analytique de M et $\hat{Y}$ une composante connexe de la préimage de Y dans $\tilde{M}$, on notera $f_{\hat{Y}} : \hat{Y} \longrightarrow X$ la restriction à $\hat{Y}$ de $f_{\tilde{M}}$, on désignera par $\Gamma(\hat{Y}/Y)$ le sous-groupe de $\pi_1(M)$ stabilisateur de $\hat{Y}$ dans $\tilde{M}$ et par $\rho_{\hat{Y}} : \Gamma(\hat{Y}/Y) \longrightarrow H$ la représentation du groupe de revêtement $\Gamma(\hat{Y}/Y)$ obtenue par restriction de ρ_M à $\Gamma(\hat{Y}/Y)$. L'application $f_{\hat{Y}}$ est $\rho_{\hat{Y}}$-équivariante. Le groupe de revêtement $\Gamma(\hat{Y}/Y)$ est naturellement un quotient $q : \pi_1(Y) \longrightarrow \Gamma(\hat{Y}/Y) \simeq \pi_1(Y)/\pi_1(\hat{Y})$ de $\pi_1(Y)$ et le revêtement universel $p_{\tilde{Y}/Y} : \tilde{Y} \longrightarrow Y$ s'identifie au composé des revêtements $p_{\tilde{Y}/\hat{Y}} : \tilde{Y} \longrightarrow \hat{Y}$ et $p_{\hat{Y}/Y} : \hat{Y} \longrightarrow Y$. Le revêtement $p_{\tilde{Y}/\hat{Y}}$ est q-équivariant. L'application $f_{\tilde{Y}} : \tilde{Y} \longrightarrow X$ s'identifie alors à la composée $f_{\hat{Y}} \circ p_{\tilde{Y}/Y}$ et la représentation $\rho_Y : \pi_1(Y) \longrightarrow H$ s'identifie à la composée $\rho_{\hat{Y}} \circ q$ (autrement dit factorise par le quotient $\Gamma(\hat{Y}/Y)$).

2.2 Revêtements ramifiés

Pour étudier ρ, on veut construire à partir de l'application harmonique $f_{\tilde{M}}$ des tenseurs holomorphes sur M. Ainsi, localement au voisinage d'un point x de $R(\tilde{M}, \rho)$, la partie $\partial f_{\tilde{M}}$ de type $(1,0)$ de la différentielle complexifiée $df_{\tilde{M}}^{\mathbb{C}}$ définit une 1-forme holomorphe à valeur dans V. Le problème est de recoller ces informations locales en objets globaux.

2.2.1 Revêtement spectral

Rappelons la solution proposée par Katzarkov [17] puis Jost et Zuo [15], que nous allons utiliser. Soit $\Phi = \{\beta_1, \cdots \beta_l\} \subset V_{\mathbb{R}}^*$ le système de racines de W. Pour chaque appartement A de X, on peut considérer les 1-formes réelles $\{d\beta_1, \cdots, d\beta_l\}_A$ sur A. Sur l'intersection de deux appartements A et A', les ensembles $\{d\beta_1, \cdots, d\beta_l\}_A$ et $\{d\beta_1, \cdots, d\beta_l\}'_A$ coïncident à permutation par un élément de W près. En particulier les polynômes symétriques $\overline{\sigma_1}, \cdots, \overline{\sigma_l}$ en les $d\beta_i$ sont définis indépendamment du choix de A. Notons $\tilde{\sigma_i}$ la partie de type holomorphe du pull-back complexifié $f_{\tilde{M}}^*(\overline{\sigma_i}^{\mathbb{C}})$, c'est une section holomorphe de la i-ème puissance symétrique $S^i \Omega^1_{\tilde{M}}$ sur $R(\tilde{M}, \rho)$, où $\Omega^1_{\tilde{M}}$ désigne le faisceau des 1-formes holomorphes sur $\tilde{M}$. Comme $f_{\tilde{M}}$ est lipschitzienne, $\tilde{\sigma_i}$ est bornée. Comme $S(\tilde{M}, \rho)$ est de codimension de Hausdorff ≥ 2, $\tilde{\sigma_i}$ s'étend à $\tilde{M}$ toute-entière. Enfin par invariance sous $\pi_1(M)$, $\tilde{\sigma_i}$ descend en une section $\sigma_i \in H^0(M, S^i \Omega^1_M)$. Le polynôme caractéristique $\sum_i \sigma_i.T^{l-i}$ définit alors un sous-schéma Q de l'espace cotangent total T^*M. Notons Q^{norm} la normalisation du réduit de Q, c'est un revêtement ramifié (non-necessairement irréductible) de M de degré $\leq l$ pour la projection naturelle $\pi : Q \longrightarrow M$. De plus, le plongement $Q \subset T^*M$ définit tautologiquement une 1-forme holomorphe ω_1 de $\pi^* \Omega_M$, racine du polynôme $\sum_i \pi^* \sigma_i.T^{l-i}$. En réitérant l'opération sur une composante irréductible de Q, etc... (c'est-à-dire en prenant le revêtement ramifié M^{sp} de corps de fonction $K(M^{sp})$ le corps de scindage de l'extension

$K(Q^{norm})/K(M))$, on obtient un revêtement ramifié galoisien irréductible $\pi : M^{sp} \longrightarrow M$ et des 1-formes holomorphes $\mu_1, \cdots, \mu_l$ racines du polynôme $\sum_i \pi^*\sigma_i.T^{l-i}$. De plus, l'ensemble singulier $S(\tilde{M^{sp}}, \rho_{M^{sp}})$ a son image par $f_{M^{sp}}$ contenue dans les murs de l'immeuble X. Considérant des suites convergeant vers les points singuliers dans des directions normales aux murs, on obtient que $S(M^{sp}, \rho_{M^{sp}})$ est contenue dans le lieu des zéros des tirés en arrière des formes définissant les murs de X. D'où le

Lemme 2.1 *[15, lemma 2.1] Il existe un revêtement ramifié galoisien fini $\pi : M^{sp} \longrightarrow M$ appelé revêtement spectral de M, tel que les différentielles $\partial(\beta_i \circ f_{\tilde{M}} \circ \pi)$, $1 \leq i \leq l$, se recollent en des 1-formes holomorphes $\mu_1, \cdots, \mu_l \in H^0(M^{sp}, \pi^*\Omega_M)$. De plus, l'ensemble singulier $S(M^{sp}, \rho_{M^{sp}})$ de l'application harmonique $f_{\tilde{M}} \circ \tilde{\pi} : \tilde{M^{sp}} \longrightarrow X$ est un fermé algébrique de M^{sp}, contenu dans la réunion des lieux des zéros de 1-formes holomorphes (en nombre fini), combinaisons linéaires des μ_i.*

Nous retiendrons de cette construction le corollaire immédiat

Lemme 2.2 *L'ensemble $S(M, \rho)$ est un fermé algébrique propre de M.*

On notera b_M la réunion des composantes de pure codimension 1 de $S(M, \rho)$ et M_0 l'ouvert de Zariski $M - b_M$ de M.

2.2.2 Un fibré plat sur $R(M, \rho)$ et le revêtement associé

Le revêtement $\pi : M^{sp} \longrightarrow M$ construit à la section précédente contient beaucoup d'information sur ρ et $f_{\tilde{M}}$. Dans cette section, nous construisons le revêtement ramifié galoisien fini $p : Z \longrightarrow M$ de l'introduction, moins riche à priori que le revêtement spectral, mais plus maniable et "plus visuel" me semble-t-il. On commence par construire un fibré plat naturel $F(M, \rho)$ sur $R(M, \rho)$, qui est intuitivement le tiré en arrière par $f_{\tilde{M}}$ du "fibré tangent complexifié de X". L'holonomie locale $\tau : \pi_1(R(M, \rho)) \longrightarrow W$ indique la compatibilité des orientations des appartements rencontrés par $f_{\tilde{M}}$. Le revêtement ramifié $p : Z \longrightarrow M$ galoisien de groupe $\Lambda = Im\tau$ est le revêtement sur lequel ce fibré se trivialise.

Commençons par construire le fibré $F(M, \rho)$. Pour tout appartement A de X, fixons une isométrie $g_A : A \longrightarrow V_{\mathbb{R}}$. Etant donnés deux appartements A et B d'intersection non-vide, l'application $g_A \circ g_B^{-1}$ définie sur $g_B(A \cap B)$ est localement constante à valeur dans W^{aff}. On notera g_{AB} sa partie linéaire à valeur dans $W \subset O(V_{\mathbb{R}})$, où $O(V_{\mathbb{R}})$ désigne le groupe orthogonal de $V_{\mathbb{R}}$.

Choisissons $(U_i)_{i \in I}$ un recouvrement par des ouverts connexes de $R(\tilde{M}, \rho)$ tel que pour tout i de I, l'image $f_{\tilde{M}}(U_i)$ est contenue dans un appartement A_i de X. Comme le groupe $\rho(\pi_1(M))$ agit sur X en préservant sa structure d'immeuble, on peut supposer que $\pi_1(R(M, \rho))$ agit sur I de sorte que :

$$\forall \gamma \in \pi_1(R(M, \rho)),\ \forall i \in I,\ \ U_{\gamma(i)} = \gamma.U_i \ \ .$$

Définissons alors le fibré plat $F_{\mathbb{R}}(\tilde{M}, \rho)$ de fibre $V_{\mathbb{R}}$ sur $R(\tilde{M}, \rho)$ par le cocycle :

$$f_{ij} \ : U_i \cap U_j \longrightarrow W \subset O(V_{\mathbb{R}}), \quad f_{ij} = g_{A_i A_j} \quad .$$

Le groupe $\pi_1(R(M,\rho))$ agit naturellement de façon équivariante sur $F_{\mathbb{R}}(\tilde{M},\rho)$, l'action d'un élément γ de $\pi_1(M)$ dans la carte U_i est définie par

$$\begin{array}{cccc} \gamma_i : & U_i \times V_{\mathbb{R}} & \longrightarrow & U_{\gamma(i)} \times V_{\mathbb{R}} \\ & (x,v) & \longrightarrow & (\gamma x, d(g_{A_{\gamma(i)}} \circ \rho(\gamma) \circ g_{A_i}^{-1}).v) \end{array}$$

et on vérifie bien les relations de compatibilité : sur $U_i \cap U_j$,

$$(Id \times f_{\gamma(i)\gamma(j)}) \circ \gamma_j = \gamma_i \circ (Id \times f_{ij}) \quad .$$

On notera $F_{\mathbb{R}}(M,\rho)$ le fibré plat quotient $\pi_1(R(M,\rho))\backslash F_{\mathbb{R}}(\tilde{M},\rho)$ de base $R(M,\rho)$.

Définition : On appelle holonomie locale associée à la représentation ρ le morphisme $\tau : \pi_1(R(M,\rho)) \longrightarrow W$ holonomie du fibré plat $F_{\mathbb{R}}(\tilde{M},\rho)$.

L'application $f_{\tilde{M}}$ induit alors une 1-forme réelle sur $R(\tilde{M},\rho)$ à valeur dans $F_{\mathbb{R}}(\tilde{M},\rho)$, qu'on notera $df_{\tilde{M}}$ (analogue de la "dérivée" de l'application $f_{\tilde{M}} : \tilde{M} \longrightarrow X$). Sur l'ouvert U_i, l'application $df_{\tilde{M}}$ est définie par $d(g_{A_i} \circ f_{\tilde{M}}) : T\tilde{M}^{\mathbb{R}}_{|U_i} \longrightarrow V_{\mathbb{R}}$, où $T\tilde{M}^{\mathbb{R}}$ désigne le fibré tangent réel de $\tilde{M}$. Notons alors $F(\tilde{M},\rho)$ (respectivement $F(M,\rho)$) le fibré plat complexifié de $F_{\mathbb{R}}(\tilde{M},\rho)$ (respectivement $F_{\mathbb{R}}(M,\rho)$) muni de sa structure holomorphe naturelle. Comme l'application $f_{\tilde{M}}$ restreinte à $R(\tilde{M},\rho)$ est pluriharmonique, la composante $\partial f_{\tilde{M}}$ de type $(1,0)$ de la complexifiée $df^{\mathbb{C}}_{\tilde{M}}$ définit une 1-forme holomorphe sur $R(\tilde{M},\rho)$ à valeur dans $F(\tilde{M},\rho)$. La 1-forme $\partial f_{\tilde{M}}$ est bien-sûr $\pi_1(R(M,\rho))$-invariante et définit donc une 1-forme holomorphe sur $R(M,\rho)$ à valeur dans $F(M,\rho)$, qu'on notera μ_M. Remarquons que μ_M est bornée car $f_{\tilde{M}}$ est lipschitzienne.

A priori le fibré plat $F(M,\rho)$ n'a aucune raison de s'étendre en un fibré plat sur tout M : d'où la nécessité de passer à un revêtement ramifié de M. C'est le théorème 5 qui nous permettra d'étendre $F(M,\rho)$.

Construisons maintenant le revêtement ramifié $p : Z \longrightarrow M$ de M sur lequel le fibré F se trivialise. Rappelons la proposition bien connue (c.f. [26]) :

Proposition 2.1 *Soit Y une variété projective complexe normale, B une réunion finie de sous-variétés propres de pure codimension 1, et notons Y_0 l'ouvert de Zariski $Y - B$ de Y. Pour tout revêtement topologique non-ramifié $p_0 : Z_0 \longrightarrow Y_0$, avec Z_0 connexe, il existe une variété irréductible normale Z, un revêtement algébrique ramifié $p : Z \longrightarrow Y$, et un homéomorphisme $s : Z_0 \longrightarrow p^{-1}(Y_0)$ tel que $p \circ s = p_0$.*

Soit alors M_0 l'ouvert de Zariski $M \backslash b_M$ de M défini au lemme 2.2. Les ouverts $R(M,\rho)$ et M_0 de M diffèrent par des fermés algébriques de codimension complexe au moins 2. En particulier $\pi_1(M_0) \simeq \pi_1(R(M,\rho))$ et le fibré plat $F(M,\rho)$ s'étend à M_0. Soit $p_0 : Z_0 \longrightarrow M_0$ une composante connexe du revêtement galoisien étale associé au noyau du morphisme $\tau : \pi_1(M_0) \longrightarrow W$, c'est encore un revêtement galoisien étale de groupe de galois $\Lambda \subset W$. On notera $p : Z \longrightarrow X$ la variété projective normale revêtement ramifié galoisien associé par la proposition précédente aux données $Y = M$, $Y_0 = M_0$ et $p_0 : Z_0 \longrightarrow M_0$. Soit $D \subset Z$

le lieu de ramification de $p: Z \longrightarrow M$ (c'est-à-dire le fermé algébrique des points z de Z où p n'est pas étale) et $B = p(D) \subset M$ le lieu de branchement. Comme M est lisse, d'après le théorème de pureté de Zariski les fermés algébriques D et B sont de pure codimension 1 respectivement dans Z et M. Par construction $D \subset S(Z, \rho_Z)$ et $B \subset d_M$, ces inclusions pouvant être strictes : B correspond aux composantes de d_M ayant de l'holonomie locale pour τ.

Le fibré plat $F(M, \rho)$ est défini sur l'ouvert de Zariski $M \backslash B$ de M. Par construction de $p : Z \longrightarrow M$, son tiré en arrière $F(Z, \rho_Z) = p^* F(M, \rho)$ est le fibré plat trivial de fibre V sur $Z \backslash p^{-1}(D)$ et s'étend donc à tout Z. La 1-forme holomorphe $\mu_Z = p^* \mu_M$ définie sur $Z \backslash p^{-1}(D)$ à valeur dans V est bornée, et s'étend donc en une 1-forme $\mu_Z \in H^0(Z, p^* \Omega^1_M \otimes V)$. Bien-sûr la 1-forme μ_Z est identiquement nulle si et seulement si f est constante. D'où le

Lemme 2.3 *Il existe un revêtement normal ramifié galoisien fini $p : Z \longrightarrow M$ de groupe de Galois $\Lambda \subset W$, tel que le fibré $F(Z, \rho_Z)$ est trivial, et l'application pluriharmonique $f \circ \tilde{p} : \tilde{Z} \longrightarrow X$ définit une 1-forme holomorphe $\mu_Z \in H^0(Z, \Omega^1_Z \otimes V)$. La 1-forme μ_Z est identiquement nulle si et seulement si l'application $f_{\tilde{M}}$ est constante.*

On notera Z^s une désingularisation de Z et encore $p : Z^s \longrightarrow X$ la projection naturelle. On notera $\mu_{Z^s} \in H^0(Z^s, \Omega^1_{Z^s} \otimes V)$ la 1-forme sur Z^s naturellement déduite de μ_Z. On aura besoin du

Lemme 2.4 *Les morphismes $\rho_Z : \pi_1(Z) \longrightarrow H$ et $\rho_{Z^s} : \pi_1(Z^s) \longrightarrow H$ sont encore d'image Zariski-dense.*

Preuve :
Faisons la preuve pour Z. Comme $Z_0 = p^{-1}(M_0)$ est un ouvert de Zariski de la variété normale Z, le morphisme $\pi_1(Z_0) \longrightarrow \pi_1(Z)$ induit par l'inclusion est surjectif. Si on note $\mathbf{L}$ l'adhérence de Zariski $\overline{\rho_Z(\pi_1(Z))}$ dans $\mathbf{H}$, on a donc l'égalité $\mathbf{L} = \overline{\rho_Z(\pi_1(Z_0))}$. De même le morphisme $\pi_1(M_0) \longrightarrow \pi_1(M)$ est surjectif et donc $\overline{\rho_M(\pi_1(M_0))} = \overline{\rho_M(\pi_1(M))} = \mathbf{H}$. Remarquons que le morphisme $p : Z_0 \longrightarrow M_0$ est fini étale galoisien, donc le sous-groupe $p_*(\pi_1(Z_0))$ est normal dans $\pi_1(M_0)$. En passant aux adhérences de Zariski, on obtient que $\mathbf{L}$ est un sous-groupe algébrique normal de $\mathbf{H}$. Comme $\mathbf{H}$ est un k-groupe presque simple, $\mathbf{L} = \mathbf{H}$ ou bien $\mathbf{H}$ est un sous-groupe fini du centre $Z(\mathbf{H})$ de $\mathbf{H}$. Dans le deuxième cas, d'après la suite exacte $1 \longrightarrow \pi_1(Z_0) \longrightarrow \pi_1(M_0) \longrightarrow Gal(Z_0/M_0) \longrightarrow 1$, la représentation $\overline{\rho} : \pi_1(Z_0) \longrightarrow H/Z(H)$ induite par ρ et d'image Zariski-dense factoriserait par le groupe fini $Gal(Z_0/M_0)$: contradiction, donc $\mathbf{L} = \mathbf{H}$. La preuve est identique pour Z^s. $\square$

2.3 Intégration des formes

Pour étudier $f_{\tilde{M}} : \tilde{M} \longrightarrow X$ nous utiliserons la forme μ_{Z^s} et l'application holomorphe à valeur dans V qu'elle définit par intégration. Notons $\mu_{\widetilde{Z^s}}$ la 1-forme holomorphe sur le revêtement universel $\widetilde{Z^s}$ de Z^s à valeur dans V relevée de μ_{Z^s}. Comme μ_{Z^s} est holomorphe donc fermée et que $\widetilde{Z^s}$ est simplement connexe, la forme $\mu_{\widetilde{Z^s}}$ est exacte. Fixons z_0 un point de $\widetilde{Z^s}$ et posons

$$\begin{array}{cccc} \phi: & \widetilde{Z^s} & \longrightarrow & V \\ & z & \longrightarrow & \int_{z_0}^{z} \mu_{\widetilde{Z^s}} \end{array} ,$$

l'application ϕ est bien définie car $\mu_{\widetilde{Z^s}}$ est exacte. Notons $\lambda : \pi_1(Z^s) \longrightarrow V$ le morphisme de groupe (où V est vu comme groupe de translation de l'espace vectoriel V) défini par :

$$\forall \gamma \in \pi_1(Z^s), \ \ \lambda(\gamma) = \int_{z_0}^{\gamma z_0} \mu_{\widetilde{Z^s}} \ ,$$

l'application ϕ est alors naturellement λ-équivariante :

$$\forall \gamma \in \pi_1(Z^s), \ \ \forall z \in \widetilde{Z^s}, \ \ \phi(\gamma z) = \phi(z) + \lambda(\gamma) \ .$$

L'étude de $f_{\tilde{M}}$ passe alors par celle du diagramme

$$\begin{array}{ccc} \widetilde{Z^s} & \stackrel{\Re\phi}{\longrightarrow} & V_{\mathbb{R}} \\ \tilde{p} \downarrow & & \\ \tilde{M} & \stackrel{f_{\tilde{M}}}{\longrightarrow} & X \end{array} ,$$

(où $\Re\phi$ désigne la partie réelle $(\phi + \overline{\phi})/2$) : l'application $f_{\widetilde{Z^s}} = f_{\tilde{M}} \circ \tilde{p} : \widetilde{Z^s} \longrightarrow X$ est par définition constante le long des composantes connexes de $\Re\phi$.

2.4 Deux lemmes géométriques

Dans cette section nous montrons deux lemmes utiles pour l'étude de ρ. Commençons par un lemme général :

Lemme 2.5 *Soit N une variété projective complexe lisse, C une courbe projective lisse et $\Pi : N \longrightarrow C$ un morphisme à fibre connexe. Soit $\tilde{\Pi} : \tilde{N} \longrightarrow \tilde{C}$ un relevé de Π aux revêtements universels. Alors $\tilde{\Pi}$ est à fibre connexe.*

Preuve :
Soit S l'ensemble des valeurs singulières de $\Pi : N \longrightarrow C$ défini par $S = \{x \in C, \ \exists z \in N \ / \ \ \Pi(z) = x \ et \ d\Pi(z) \ n'est \ pas \ surjective\}$. L'ensemble S est un fermé analytique propre de la courbe C, c'est donc un ensemble fini de points de C. Notons C_0 l'ouvert de C complémentaire de S et N_0 la préimage $N \backslash \Pi^{-1}(S)$. L'application $\Pi : N_0 \longrightarrow C_0$ est alors une fibration analytique, différentiellement localement triviale, à fibre F connexe par hypothèse. Notons $\tilde{N}_0$ (respectivement $\tilde{C}_0$) la préimage dans $\tilde{N}$ (resp. dans $\tilde{C}$) de N_0 (resp. C_0). On a donc un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \tilde{N}_0 & \stackrel{\tilde{\Pi}}{\longrightarrow} & \tilde{C}_0 \\ q_Z \downarrow & & \downarrow q_C \\ N_0 & \stackrel{\Pi}{\longrightarrow} & C_0 \end{array} ,$$

où les flèches q_Z et q_C sont des revêtements étales.

Montrons d'abord que $\tilde{\Pi} : \tilde{N}_0 \longrightarrow \tilde{C}_0$ est une fibration différentielle localement triviale. En effet, notons Y le produit fibré $N_0 \times_{C_0} \tilde{C}_0$. C'est un revêtement étale de N_0 et le diagramme commutatif précédent indique que le revêtement étale $\tilde{N}_0 \longrightarrow N_0$ factorise en $\tilde{N}_0 \longrightarrow Y \longrightarrow N_0$. Comme par définition d'un produit fibré, Y est une fibration différentielle localement triviale de fibre F sur $\tilde{C}_0$, $\tilde{N}_0$ est donc aussi une fibration différentielle localement triviale sur $\tilde{C}_0$.

Notons alors $\tilde{F}$ la fibre de la fibration localement triviale $\tilde{\Pi} : \tilde{N}_0 \longrightarrow \tilde{C}_0$, montrons que $\tilde{F}$ est connexe. Ecrivons la suite exacte longue d'homotopie pour $\tilde{\Pi}$:

$$\pi_1(\tilde{N}_0) \xrightarrow{\tilde{\Pi}_*} \pi_1(\tilde{C}_0) \longrightarrow \pi_0(\tilde{F}) \longrightarrow \pi_0(\tilde{N}_0) \ .$$

Comme $\Pi^{-1}(S)$ est de codimension réelle 2 dans N, $\tilde{N}_0$ est connexe. Il suffit donc de montrer que le morphisme $\tilde{\Pi}_* : \pi_1(\tilde{N}_0) \longrightarrow \pi_1(\tilde{C}_0)$ est surjectif. Remarquons que $\pi_1(\tilde{C}_0)$ est engendré par de petits lacets $\tilde{\gamma}$ autour des points de $q_C^{-1}(S)$, relevés dans $\tilde{C}$ de petits lacets γ dans C_0 autour des points de S. Comme $\Pi : N \longrightarrow C_0$ est à fibre connexe, un petit lacet γ se relève dans N en un petit lacet δ. Comme $q_Z : \tilde{N} \longrightarrow N$ est un revêtement, un petit lacet $\tilde{\gamma}$ se relève en un petit lacet $\tilde{\delta}$ de $\tilde{N}_0$. Donc $\tilde{\Pi}_*$ est surjectif et $\pi_0(\tilde{F}) = 0$. Finalement on a montré que le morphisme $\tilde{\Pi} : \tilde{N}_0 \longrightarrow \tilde{C}_0$ est à fibre connexe.

Reste à montrer que les fibres exceptionnelles de $\tilde{\Pi}$ sont elles-aussi connexes. Soit $\tilde{s}$ un point de $q_C^{-1}(S)$ et supposons par l'absurde que la fibre $\tilde{F}_{\tilde{s}} = \tilde{\Pi}^{-1}(\tilde{s})$ contienne plusieurs composantes connexes distinctes. Munissons N d'une métrique riemannienne d, induisant une distance encore notée d sur $N \times_C \tilde{C}$ et $\tilde{N}$.

Sous-lemme 2.1 *Pour tout nombre réel $\varepsilon > 0$, il existe deux composantes connexes distinctes $\tilde{F}_{\tilde{s},1}$ et $\tilde{F}_{\tilde{s},2}$ de $\tilde{F}_{\tilde{s}}$, et un couple $(\tilde{z}_1, \tilde{z}_2)$ dans $\tilde{F}_{\tilde{s},1} \times \tilde{F}_{\tilde{s},2}$ tel que $d(\tilde{z}_1, \tilde{z}_2) \leq \varepsilon$.*

Pour tout entier naturel n, choisissons grâce au sous-lemme précédent deux points $\tilde{z}_{1,n}$ et $\tilde{z}_{2,n}$ dans deux composantes connexes distinctes de $\tilde{F}_{\tilde{s}}$ vérifiant $d(\tilde{z}_{1,n}, \tilde{z}_{2,n}) < 1/n$. Utilisant que l'action de $\pi_1(N)$ sur $\tilde{N}$ est cocompacte, préserve la fibration $\tilde{N} \longrightarrow \tilde{C}$ ainsi que la distance d sur $\tilde{N}$, on obtient facilement une contradiction. Les détails, faciles, du sous-lemme 2.1 et de sa conséquence sont laissés au lecteur. Ce qui achève la preuve du lemme 2.5. $\square$

Revenons maintenant à l'étude du revêtement $p : Z \longrightarrow M$.

Lemme 2.6 *Soit M une variété complexe projective lisse vérifiant $(*)$, k un corps local non-archimédien, $\mathbf{H}$ un k-groupe k-simple et $\rho : \pi_1(M) \longrightarrow H = \mathbf{H}(k)$ une représentation Zariski-dense d'image non-bornée. Soit $p : Z \longrightarrow M$ le revêtement précédemment construit, Y_Z un diviseur effectif irréductible de Z et $\widehat{Y_Z}$ une composante connexe de $q_Z^{-1}(Y_Z)$ dans $\tilde{Z}$. Alors la restriction $f_{\widehat{Y_Z}} : \widehat{Y_Z} \longrightarrow X$ de $f_{\tilde{Z}}$ à $\widehat{Y_Z}$ n'est pas constante.*

Preuve :
Notons $\widehat{Y_M}$ l'image $\tilde{p}(\widehat{Y_Z})$ dans $\tilde{M}$ et Y_M l'image $p(Y_Z)$ dans M, c'est un diviseur effectif irréductible de M. Comme $f_{\tilde{Z}} = f_{\tilde{M}} \circ \tilde{p}$, on a encore $f_{\widehat{Y_Z}} = f_{\widehat{Y_M}} \circ \tilde{p}$, où $f_{\widehat{Y_M}} : \widehat{Y_M} \longrightarrow X$

désigne la restriction à $\widehat{Y_M}$ de $f_{\tilde{M}}$. Supposons par l'absurde que l'application $f_{\widehat{Y_Z}}$ est constante, égale à un point x de X. L'application $f_{\widehat{Y_M}}$ l'est donc aussi. Comme f_{Y_M} est $\rho_{\widehat{Y_M}}$-équivariante, le groupe $\rho_{\widehat{Y_M}}(\Gamma(\widehat{Y_M}/Y_M))$ préserve le point x de X. Comme $\rho_{Y_M}(\pi_1(Y_M)) = \rho_{\widehat{Y_M}}(\Gamma(\widehat{Y_M}/Y_M))$, le groupe $\rho_{Y_M}(\pi_1(Y_M))$ préserve aussi le point x de X donc est borné dans H. D'après l'hypothèse $(*)$, le diviseur Y_M est ample dans X donc le morphisme $\pi_1(Y_M) \longrightarrow \pi_1(M)$ induit par l'inclusion de Y_M dans M est surjectif d'après le théorème de Lefschetz ([12, Cor.3.5 p.152]). Finalement $\rho_M(\pi_1(M)) = \rho_{Y_M}(\pi_1(Y_M))$ est un sous-groupe borné de H, ce qui contredit l'hypothèse. $\square$

2.5 Preuve du théorème 4

Comme le k-groupe $\mathbf{H}$ est de k-rang 1, l'immeuble X est un arbre, $V \simeq \mathbb{C}$ et μ est une 1-forme holomorphe sur Z. Rappelons alors ([28, theor.1]) :

Théorème 8 (Simpson) *Soit Y une variété projective complexe connexe lisse et α une 1-forme holomorphe sur Y non-identiquement nulle. Notons $q : \hat{Y} \longrightarrow Y$ un revêtement sur lequel la fonction $g(y) = \int_{y_0}^{y} q^*\alpha$ est bien définie. Alors :*
a) soit il existe une courbe projective lisse C, un morphisme $\Pi : Y \longrightarrow C$ à fibre connexe, et une 1-forme holomorphe β sur C telle que $\alpha = \Pi^*\beta$;
b) soit pour tout $v \in \mathbb{C}$, la fibre $g^{-1}(v)$ est connexe.

Appliquons ce résultat à $Y = Z^s$ et $\alpha = \mu$.

Dans le cas a), il existe une courbe algébrique lisse C ; une 1-forme holomorphe $\overline{\mu}$ de $H^0(C, K_C \otimes V)$, où K_C désigne le fibré canonique de C ; et un morphisme à fibre connexe $\Pi : Z^s \longrightarrow C$ telle que $\Pi^*\overline{\mu} = \mu$. Notons $\tilde{\Pi} : \tilde{Z^s} \longrightarrow \tilde{C}$ un relèvement de $\Pi : Z^s \longrightarrow C$. Notons x_0 le point $\tilde{\Pi}(z_0)$ de $\tilde{C}$ et définissons l'application analytique $\overline{\phi} : \tilde{C} \longrightarrow V$ par $\overline{\phi}(x) = \int_{x_0}^{x} \tilde{\overline{\mu}}$, où $\tilde{\overline{\mu}}$ désigne la 1-forme holomorphe sur $\tilde{C}$ à valeur dans V relevée de $\overline{\mu}$ (comme $\overline{\mu}$ est holomorphe donc fermée et $\tilde{C}$ est simplement connexe, $\tilde{\overline{\mu}}$ est exacte et $\overline{\phi}$ est bien définie). L'application $\phi : \widetilde{Z^s} \longrightarrow V$ se factorise alors en $\widetilde{Z^s} \xrightarrow{\tilde{\Pi}} \tilde{C} \xrightarrow{\overline{\phi}} V$. Considérons le diagramme

$$\begin{array}{ccccc} \widetilde{Z^s} & \xrightarrow{\tilde{\Pi}} & \tilde{C} & \xrightarrow{\Re\overline{\phi}} & V_{\mathbb{R}} \simeq \mathbb{R} \\ \tilde{p}\downarrow & & & & \\ \tilde{M} & \xrightarrow{f_{\tilde{M}}} & X & & \end{array} .$$

Comme l'application $f_{\widetilde{Z^s}} = f_{\tilde{M}} \circ \tilde{p}$ est constante le long des feuilles de $\Re\phi = \Re\overline{\phi} \circ \tilde{\Pi}$ et que $\tilde{\Pi}$ est à fibre connexe d'après le lemme 2.5, l'application $f_{\widetilde{Z^s}}$ factorise par $\tilde{C}$: il existe une application harmonique $f_{\tilde{C}} : \tilde{C} \longrightarrow X$ et une représentation $\rho_C : \pi_1(C) \longrightarrow H$ tels que $f_{\tilde{C}}$ soit ρ_C-équivariante et les diagrammes

$$\begin{array}{ccc} \widetilde{Z^s} & \xrightarrow{\tilde{\Pi}} & \tilde{C} \\ \tilde{p}\downarrow & & \downarrow f_{\tilde{C}} \\ \tilde{M} & \xrightarrow{f_{\tilde{M}}} & X \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{ccc} \pi_1(Z^s) & \xrightarrow{\Pi_*} & \pi_1(C) \\ p_*\downarrow & & \downarrow \rho_C \\ \pi_1(M) & \longrightarrow & H \end{array}$$

sont commutatifs. Soit t un point de $\tilde{C}$, notons $\widehat{Z_t^s}$ la fibre connexe $\tilde{\Pi}^{-1}(t)$ de $\widetilde{Z^s}$, d'images $\widehat{Z_t}$, Z_t^s et Z_t respectivement dans $\tilde{Z}$,

Z^s et Z. Comme $f_{\widetilde{Z^s}} = f_{\tilde{C}} \circ \tilde{\Pi}$, la restriction $f_{\widehat{Z^s_t}} : \widehat{Z^s_t} \longrightarrow X$ est constante. Comme $f_{\widehat{Z^s_t}}$ factorise par $f_{\widehat{Z_t}} : \tilde{Z}_t \longrightarrow X$, l'application $f_{\widehat{Z_t}}$ est constante. Pour t générique dans $\tilde{C}$, Z_t est une courbe irréductible lisse de Z. On conclut à la contradiction par le lemme 2.6 appliqué à la courbe Z_t de Z. Ce qui achève la preuve dans ce cas.

Dans le cas b), l'application ϕ est à fibre connexe. L'espace topologique des composantes connexes des fibres de ϕ est alors une variété complexe qui s'identifie naturellement à V (c.f. [15, lemma 3.2]). L'espace topologique des composantes connexes des fibres de $\Re\phi$ s'identifie alors à $V_{\mathbb{R}} \simeq \mathbb{R}$. Comme $f_{\widetilde{Z^s}} = f_{\tilde{M}} \circ \tilde{p}$ est constante le long des composantes connexes des fibres de $\Re\phi$, il existe une factorisation $\Phi : \Re L \longrightarrow X$ telle que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \widetilde{Z^s} & \stackrel{\Re\phi}{\longrightarrow} & V_{\mathbb{R}} \\ \tilde{p}\downarrow & & \downarrow\Phi \\ \tilde{M} & \longrightarrow & X \end{array}$$

est cartésien. Mais alors $\rho_{Z^s}(\pi_1(Z^s)) = \Phi_*(\Re\lambda(\pi_1(Z^s)))$ est abélien : contradiction à la Zariski-densité de ρ_{Z^s} (lemme 2.4), ce qui achève la preuve du théorème 4. $\square$

2.6 Non-dégénérescence de $f_{\tilde{M}}$

Dans le cas où la variété M est de dimension complexe n et $\mathbf{H}$ est de k-rang n, nous avons souligné dans l'introduction que nous sommes au cas limite $\dim_{\mathbb{C}} M = rg_k\mathbf{H}$ où les théorèmes de factorisation ne s'appliquent pas. Les techniques développées dans la section précédente permettent néanmoins de montrer, sous l'hypothèse $(*)$, que si la représentation ρ n'est pas bornée alors l'image de l'application $f_{\tilde{M}}$ est "grosse". Par souci de simplicité nous ferons désormais l'hypothèse

(H) : La variété M est une surface projective complexe lisse vérifiant $(*)$, k désigne un corps local non-archimédien, $\mathbf{H}$ est un k-groupe connexe k-simple de k-rang 2 et $\rho : \pi_1(M) \longrightarrow H = \mathbf{H}(k)$ est une représentation Zariski-dense d'image non-bornée.

Sous l'hypothèse (H), remarquons d'abord que la section μ_M est évidemment non-nulle : sinon l'application $f_{\tilde{M}}$ serait constante et ρ serait bornée. On aimerait montrer qu'en fait $f_{\tilde{M}} : \tilde{M} \longrightarrow X$ est d'image de dimension maximale. Posons la

Définition : On dira que $f_{\tilde{M}} : \tilde{M} \longrightarrow X$ est dégénérée si μ_M n'est pas de rang maximal, c'est-à-dire si la section holomorphe $\det \mu_{Z^s} \in H^0(Z^s, K_{Z^s})$ induite par $\mu_{Z^s} \in H^0(Z^s, \Omega^1_{Z^s} \otimes V)$ est identiquement nulle.

Proposition 2.2 *Sous l'hypothèse (H), l'application $f_{\tilde{M}}$ est non-dégénérée.*

Preuve :
Fixons (e_1, e_2) une base de $V \simeq \mathbb{R}^2$ et écrivons $\mu_{Z^s} = \mu_1.e_1 + \mu_2.e_2$ dans cette base, où $\mu_i \in H^0(Z^s, \Omega^1_{Z^s})$. Supposons par l'absurde que $\det \mu_{Z^s} = 0$, c'est-à-dire $\mu_1 \wedge \mu_2 = 0$.

1^{er} cas : μ_1 et μ_2 sont linéairement indépendantes dans $H^0(Z^s, \Omega^1_{Z^s})$.

Appliquons alors le théorème de Castelnuovo- De Francis [1, prop4.1 p.123] : il existe une courbe algébrique lisse C ; une 1-forme holomorphe $\overline{\mu}$ de $H^0(C, K_C \otimes V)$, où K_C désigne le fibré canonique de C ; et un morphisme à fibre connexe $\Pi : Z^s \longrightarrow C$ telle que $\Pi^*\overline{\mu} = \mu$. On conclut comme au cas a) de la section précédente.

2^e cas : μ_1 et μ_2 sont linéairement dépendantes dans $H^0(Z^s, \Omega^1_{Z^s})$.
Dans ce cas, l'application $\phi : \widetilde{Z^s} \longrightarrow V \simeq \mathbb{C}^2$ a son image contenue dans une droite complexe L. Cette image n'est pas réduite à un point : sinon μ_1 et μ_2 seraient identiquement nulles, l'application $f_{\tilde{M}}$ serait constante, et ρ serait d'image bornée.

Lemme 2.7 *L'application $\phi : \widetilde{Z^s} \longrightarrow L$ est surjective.*

Preuve :
Soit U l'adhérence pour la topologie usuelle de $\lambda(\pi_1(Z^s))$ dans L, vu comme groupe de translation de V préservant L. Le groupe U se décompose en $U = A \oplus B$, où $A \simeq \mathbb{R}^k$, $k = 0, 1$ ou 2, et B est discret. Si $k \neq 2$, notons F un supplémentaire du sous-espace vectoriel A de L et $P : L \longrightarrow F$ la projection parallèlement à A. Le groupe B agit proprement sur F. L'application continue $P \circ \phi : \widetilde{Z^s} \longrightarrow F$ factorise alors en $\overline{P \circ \phi} : Z^s \longrightarrow F/B$, d'image compacte puisque la variété Z^s est compacte. L'application $\overline{P \circ \phi}$ est aussi ouverte puisque ϕ est analytique non-constante. Finalement $P \circ \phi$, donc aussi ϕ, est surjective. $\square$

Appliquons alors le théorème de Simpson cité à la section précédente : soit $\phi : \widetilde{Z^s} \longrightarrow L$ factorise par une courbe, et on conclut comme dans le premier cas ; soit ϕ est à fibre connexe. L'espace topologique des composantes connexes des fibres de ϕ est alors une variété complexe qui s'identifie naturellement à L (c.f. [15, lemma 3.2]). L'espace topologique des composantes connexes des fibres de $\Re\phi$ s'identifie alors à $\Re L$, qui est soit une droite de $V_{\mathbb{R}}$, soit $V_{\mathbb{R}}$ tout entier selon que L est stable par la conjugaison complexe de V ou non. Comme $f_{\widetilde{Z^s}} = f_{\tilde{M}} \circ \tilde{p}$ est constante le long des composantes connexes des fibres de $\Re\phi$, il existe une factorisation $\Phi : \Re L \longrightarrow X$ telle que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \widetilde{Z^s} & \xrightarrow{\Re\phi} & \Re L \\ \tilde{p}\downarrow & & \downarrow\Phi \\ \tilde{M} & \longrightarrow & X \end{array}$$

est cartésien. Mais alors $\rho_{Z^s}(\pi_1(Z^s)) = \Phi_*(\Re\lambda(\pi_1(Z^s)))$ est abélien : contradiction à la Zariski-densité de ρ_{Z^s} (lemme 2.4), ce qui achève la preuve de la proposition 2.2. $\square$

Remarques : Dans le cas où non-seulement $NS(M, \mathbb{Q}) = \mathbb{Q}$ mais aussi $H^{1,1}(M, \mathbb{C}) = \mathbb{C}$ (c'est le cas par exemple pour les "faux $\mathbf{P}^2\mathbb{C}$"), la preuve de la proposition 2.2 est très simple : Posons $\tau = \imath\mu_M \wedge \overline{\mu_M}$, c'est une $(1,1)$-forme $\overline{\partial}$-fermée sur $R(M, \rho)$ à valeur dans le fibré $End(F(M, \rho))$. En coordonnées, $\tau = \imath((\mu_1 \wedge \overline{\mu_1})e_1 \otimes e_1^* + (\mu_2 \wedge \overline{\mu_2})e_2 \otimes e_2^* + (\mu_1 \wedge \overline{\mu_2}.e_1 \otimes e_2^* + \mu_2 \wedge \overline{\mu_1}.e_2 \otimes e_1^*))$. Sa trace $tr\tau$ est une $(1,1)$-forme réelle ≥ 0 et $\overline{\partial}$-fermée sur $R(M, \rho)$. En coordonnées, $tr\tau = \imath(\mu_1 \wedge \overline{\mu_1} + \mu_2 \wedge \overline{\mu_2})$. Comme f est lipschitzienne, $tr\tau$ est bornée. Comme $S(M, \rho)$ est de dimension réelle plus petite que $2n-2$, $tr\tau$ s'étend en une $(1,1)$-forme sur M, encore $\overline{\partial}$-fermée et ≥ 0. Sa classe de cohomologie dans $H^{1,1}(M, \mathbb{C})$ s'écrit alors $[tr\tau] = s.[\omega_M]$, où s désigne un réel positif et ω_M la forme kählérienne de

M. Notons U l'ouvert de $R(M,\rho)$ sur lequel μ_M est injectif. Si U est vide, la (n,n)-forme $(tr\ \tau)^n$ est nulle sur M, et donc

$$0 = \int_M (tr\ \tau)^n =< [M], s^n [w_M]^n >= s^n.vol(M) \ .$$

Donc $s = 0$ et $[tr\tau] = 0$. Comme $tr\tau$ est une $(1,1)$-forme positive sur M, on en déduit $tr\tau = 0$, donc $\mu_1 \wedge \overline{\mu_1} = \mu_2 \wedge \overline{\mu_2} = 0$ puis $\mu_1 = \mu_2 = 0$ c'est-à-dire $\mu_M = 0$. Donc f est constante et ρ est d'image bornée : contradiction à l'hypothèse (H). Donc U est non-vide, ce qui achève la preuve de la proposition 2.2 dans ce cas.

2.7 Contrôle du lieu singulier : preuve du théorème 5

Fixons quelques notations (on se réfèrera à [3, p.277-] pour plus d'informations sur les systèmes de racines). Notons $R \subset V_{\mathbb{R}}$ le système de racine du complexe de Coxeter $(V_{\mathbb{R}}, W)$ de système dual $R^{\vee}$. Pour tout $\alpha \in R$, il existe une coracine $\alpha^{\vee}$ bien définie, qui s'identifie par le produit scalaire naturel $(\,;\,)$ sur $V_{\mathbb{R}}$ à $2\alpha/(\alpha,\alpha)$. Pour tout $\alpha \in R$, on définit la symétrie orthogonale s_α de $V_{\mathbb{R}}$ par rapport à l'hyperplan $\ker \alpha^{\vee}$. Le groupe de réflexions W est engendré par les s_α, $\alpha \in R$. Fixons C une chambre de Weyl fondamentale de $(V_{\mathbb{R}}, W)$, et notons R_+ l'ensemble des racines positives de R associées à C. L'ensemble R_+ est en bijection avec l'ensemble des murs de $V_{\mathbb{R}}$: à tout $\alpha \in R_+$ on associe l'hyperplan $\ker \alpha^{\vee}$.

On s'intéresse alors aux 1-formes holomorphes sur Z provenant de X. Précisément on pose la

Définition : On note $V^*.\mu_Z$ le sous-espace vectoriel complexe de $H^0(Z, \Omega^1_Z)$ image de l'application linéaire $\eta : V^* \longrightarrow H^0(Z, \Omega^1_Z)$ qui à $\lambda \in V^*$ associe la 1-forme holomorphe $\lambda \circ \mu_Z$.

Pour α une racine de R, on notera $\eta_\alpha = \eta(\alpha^{\vee})$. L'espace $V^*.\mu_Z$ est alors engendré par les 1-formes holomorphes $\eta_\alpha \in H^0(Z, \Omega^1_Z)$. Remarquons que d'après la proposition 2.2, la 1-forme η_α est non identiquement nulle, pour tout α dans R.

Rappelons que lerevêtement $p : Z \longrightarrow M$ est galoisien de groupe $\Lambda \subset W$. L'espace vectoriel complexe V^* est un W-module naturel (à gauche), donc aussi un Λ-module (à gauche).L'espace vectoriel complexe $H^0(Z, \Omega^1_Z)$ est lui aussi un Λ-module (à gauche) naturel :

$$\forall \gamma \in \Lambda, \ \ \forall \eta \in H^0(Z, \Omega^1_Z), \quad \gamma.\eta = (\gamma^{-1})^* \eta.$$

Lemme 2.8 *Sous l'hypothèse (H), l'espace vectoriel $V^*.\mu_Z$ est un sous-Λ-module de $H^0(Z, \Omega^1_Z)$ et l'application linéaire $\eta : V^* \longrightarrow V^*.\mu_Z$ est un isomorphisme de Λ-modules.*

Preuve :
Comme μ_M est une 1-forme sur $R(M,\rho)$ à valeur dans le fibré plat $F(M,\rho)$, on a l'égalité

$$\forall \gamma \in \Lambda, \quad \gamma^* \mu_Z = \gamma \circ \mu_Z,$$

où la composition est donnée par l'action naturelle de Λ sur V. Donc

$$\gamma.(\lambda \circ \mu_Z) = (\gamma^{-1})^*(\lambda \circ \mu_Z) = \lambda \circ ((\gamma^{-1})^* \mu_Z) = \lambda \circ \gamma^{-1} \circ \mu_Z = \gamma(\lambda).\mu_Z.$$

En particulier $V^*.\mu_Z$ est un sous-Λ-module de $H^0(Z, \Omega^1_Z)$, et la flèche surjective naturelle $V^* \longrightarrow V^*.\mu_Z$ qui à λ associe $\lambda \circ \mu_Z$ est un morphisme surjectif de Λ-module. Comme d'après la proposition 2.2 les espaces vectoriels V^* et $V^*.\mu_Z$ ont même dimension, c'est un isomorphisme de Λ-modules. $\square$

Preuve du théorème 5 :
Le théorème est trivialement vrai si ρ est bornée (l'application f étant alors constante et $Z = M$). On peut donc supposer que l'hypothèse (H) est vérifiée. Rappelons qu'on a noté D le lieu de ramification du revêtement ramifié $p : Z \longrightarrow M$ et $B = p(D)$ le lieu de branchement. Supposons par l'absurde que D est non-vide. Pour tout α dans R_+, définissons LM_α comme la réunion des composantes de codimension 1 du lieu des zéros de α. Le lieu mural de Z est le fermé analytique de codimension 1 dans Z défini par $LM = \bigcup_{\alpha \in R_+} LM_\alpha$. Comme dans le lemme [15, lemma 2.1], le lieu D est une réunion de composantes irréductibles de LM. Pour toute composante irréductible D' de D, on notera $I_{D'} \subset \Lambda$ son groupe d'inertie, c'est-à-dire le sous-groupe non-trivial de Λ fixant D' point à point.

Pour simplifier on considère le cas $\mathbf{H} = \mathbf{PGL}(3)$. Dans ce cas on $R_+ = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 = \alpha_1 + \alpha_2\}$ et $W \simeq S_3$ le groupe de permutations à trois éléments.

Lemme 2.9 1. *L'inclusion $\Lambda \subset S_3$ est une égalité $\Lambda \simeq S_3$ (donc le revêtement $p : Z \longrightarrow M$ est de degré 6).*
2. *pour toute composante irréductible D' de D, il existe une unique racine $\alpha \in R_+$ telle que la 1-forme η_α soit nulle en tout point de D'. Le groupe d'inertie $I_{D'} \subset S_3$ s'identifie alors au sous-groupe $< s_\alpha > \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ de S_3.*

Preuve :
Supposons par l'absurde que le point 1. est faux, c'est-à-dire que le sous-groupe Λ de S_3 est propre. Donc Λ est isomorphe au groupe $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ ou au groupe de rotations A_3.

1^{er} cas : $\Lambda \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.
Il existe donc $\alpha \in R$ tel que $\Lambda =< s_\alpha >$. Mais alors il existe une forme linéaire non-nulle λ dans V^* invariante sous l'action du groupe Λ. Comme l'application $\eta : V^* \longrightarrow V^*.\mu_Z$ est un isomorphisme de Λ-modules, la 1-forme η_λ de $V^*.\mu_Z \subset H^0(Z, p^*\Omega^1_M)$ est elle-aussi Λ-invariante. Elle descend donc en une 1-forme holomorphe sur $M_0 \subset M$. Comme f est lipschitzienne, cette dernière est bornée donc s'étend à tout M ; elle est donc nulle puisque $b_1(M) = 0$ par hypothèse. Donc la 1-forme η_λ est également nulle : contradiction puisque λ est supposée non-nulle, ce qui achève ce cas.

$2^{ème}$ cas : $\Lambda \simeq A_3$.
Le revêtement $p : Z \longrightarrow M$ est à trois feuillets et pour toute composante irréductible D' de D, on a l'égalité $I_{D'} = A_3$ (puisque A_3 n'a pas de sous-groupe propre non-trivial). Comme $D \subset LM$, il existe α dans R_+ telle que η_α est nulle en tout point de D'. Comme A_3 fixe D', pour tout γ dans A_3 la 1-forme $\eta_{\gamma(\alpha)} = (\gamma^{-1})^*\eta_\alpha$ est nulle sur D'. Finalement $\eta_{\alpha|D'} = 0$ pour tout α dans R. Pour toute composante connexe $\widehat{D'}$ de $q_{\tilde{Z}}^{-1}(D')$ dans $\tilde{Z}$, la restriction $f_{\widehat{D'}} : \widehat{D'} \longrightarrow X$ de $f_{\tilde{Z}}$ à $\widehat{D'}$ est donc constante : contradiction au lemme 2.6, ce qui achève la preuve de 1.

Pour le point 2., soit D' une composante irréductible de D. Comme $D' \subset LM$, il existe $\alpha \in R_+$ telle que η_α soit nulle en tout point de D'. Soit $\alpha' \in R_+$ avec $\eta_{\alpha'} = 0$ sur D'. Si α' n'est pas proportionnelle à α alors comme précédemment pour toute composante connexe $\widehat{D'}$ de $q_{\tilde{Z}}^{-1}(D')$ dans $\tilde{Z}$, la restriction $f_{\widehat{D'}} : \widehat{D'} \longrightarrow X$ de $f_{\tilde{Z}}$ à $\widehat{D'}$ est constante : contradiction au lemme 2.6. Donc α' est proportionnelle à α et comme le système R est réduit, $\alpha' = \alpha$. Soit g un élément du groupe d'inertie $I_{D'}$. Comme η_α est nulle sur D', la forme $g^*\eta_\alpha$ aussi. Mais $g^*\eta_\alpha = \eta_{g^1(\alpha)}$ donc $g^1(\alpha)$ est proportionnel à α. Donc $g \in < s_\alpha >$ et $I_{D'} \subset < s_\alpha >$. Comme $I_{D'}$ est non-trivial, $I_{D'} = < s_\alpha >$. $\square$

Notons $(B_i)_{i\in I}$ l'ensemble des composantes irréductibles du lieu de branchement $B = p(D)$. Comme B est de pure codimension 1, chaque B_i est une courbe irréductible de M. On munit B d'une structure de diviseur en posant $B = \sum_{i\in I} B_i$.

Notons D_i le fermé $p^{-1}(B_i)$ de Z. Comme le revêtement $p : Z \longrightarrow M$ est galoisien, D_i est une réunion de composantes irréductibles du lieu de ramification D. D'après le lemme précédent, $D_i = \bigcup_{\alpha\in R_+} D_{i,\alpha}$, où $D_{i,\alpha}$ est l'unique composante irréductible de D_i telle que la 1-forme holomorphe η_α soit nulle en tout point de $D_{i,\alpha}$.

Notons K_Z la faisceau dualisant de la variété projective normale Z. Comme la variété Z est normale, le faisceau K_Z est réflexif et s'identifie au bidual du faisceau Ω_Z^2 des 2-formes holomorphes sur Z. Le lieu de branchement D a une structure de diviseur de Weil définie par l'égalité $K_Z = p^*K_M \otimes \mathcal{O}_Z(D)$, où K_M désigne le faisceau canonique de M et $\mathcal{O}_Z(D)$ est le faisceau réflexif de rang 1 sur M définissant D. Le diviseur de Weil D s'écrit $D = \sum_{i\in I}(\sum_{\alpha\in R_+}(e_{i,\alpha}-1).D_{i,\alpha})$, où $e_{i,\alpha}$ désigne le degré de ramification de la composante $D_{i,\alpha}$ ([1, p.41]). Comme le revêtement $p : Z \longrightarrow M$ est galoisien, le degré $e_{i,\alpha}$ n'est autre que le cardinal du groupe d'inertie $I_{D_{i,\alpha}}$. D'après le lemme 2.9 on a $I_{D_{i,\alpha}} \simeq < s_\alpha >$, donc $e_{i,\alpha} = 2$ pour tout i et tout α. Finalement on a les égalités

$$D = \sum_{i\in I} D_i = \sum_{i\in I} \sum_{\alpha\in R_+} D_{i,\alpha} \ ,$$

$$p^*B_i = 2 \sum_{\alpha\in R_+} D_{i,\alpha} \ .$$

Utilisons maintenant la structure particulière du diviseur de ramification pour obtenir la contradiction.

Lemme 2.10 *Pour tout i dans I et tout α dans R_+, la 1-forme holomorphe η_α s'annule à un ordre pair $2a_i > 0$ indépendant de α le long de $D_{i,\alpha}$.*

Preuve :
Soit (z, w) un système de coordonnées locales de Z au voisinage d'un point lisse de $D_{i,\alpha}$, dans lesquelles l'équation locale de $D_{i,\alpha}$ est $z = 0$. Comme la 1-forme η_α est d-fermée et s'annule sur $D_{i,\alpha}$, elle s'écrit localement dans ces coordonnées $\eta_\alpha = z^r dz$, où r désigne un entier strictement positif. Le groupe d'inertie $I_{D_{i,\alpha}} =< s_\alpha >$ agit dans ces coordonnées par $s_\alpha(z, w) = (-z, w)$. Comme $s_\alpha(\alpha^\vee) = -\alpha^\vee$ et $\eta_\alpha = \alpha^\vee \circ \mu_Z$, on a $s_\alpha(\eta_\alpha) = -\eta_\alpha$. D'où $(-1)^{r+1} z^r dz = -z^r dz$. Donc r est pair, $r = 2a_{i,\alpha}$.

Remarquons qu'à i fixé, le groupe Λ permute les composantes $D_{i,\alpha}$, $\alpha \in R_+$. En particulier l'entier $a_i = a_{i,\alpha}$ est indépendant de α. □

Remarquons que $\det \mu_M$ définit sur l'ouvert M_0 de M une section holomorphe du fibré $K_{M|M_0} \otimes \det F(M, \rho)$. Le fibré $\det F(M, \rho)$ est un fibré plat sur M_0, d'holonomie $\det \tau : \pi_1(M_0) \longrightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Son carré est donc trivial, et $\det^2 \mu_M$ définit sur M_0 une section holomorphe du fibré K_M^2. Cette section est bornée car f est lipschitzienne. Elle s'étend donc en une section $\det^2 \mu_M \in H^0(M, K_M^2)$.

Lemme 2.11 *Pour tout i dans I la section $\det^2 \mu_M \in H^0(M, K_M^2)$ s'annule à un ordre pair $2s_i > 0$ le long de B_i.*

Preuve :
Etant donnés un faisceau réflexif L de rang 1 sur une variété normale N et une section σ de L sur N, on notera $[\sigma]$ le diviseur de Weil des zéros de σ. Considérons la section $\det \mu_Z$ du faisceau réflexif K_Z. Le long de $D_{i,\alpha}$ cette section s'écrit comme produit extérieur de η_α avec une 1-forme holomorphe ne s'annulant pas le long de $D_{i,\alpha}$. Donc $\det \mu_Z$ s'annule au même ordre $2a_i$ que η_α le long de $D_{i,\alpha}$. Le diviseur de Weil $[\det \mu_Z]$ associé à la section $\det \mu_Z$ s'écrit alors

$$[\det \mu_Z] = \sum_{i \in I} 2a_i (\sum_{\alpha \in R_+} D_{i,\alpha}) \; + \; p^* L \quad ,$$

où L désigne un diviseur effectif sur M. Comme $p^* B_i = 2 \sum_{\alpha \in R_+} D_{i,\alpha}$ on obtient finalement

$$[\det \mu_Z] = p^* (\sum_{i \in I} a_i B_i + L) \quad .$$

Comme $p^* \det^2 \mu_M = \det^2 \mu_Z$ en tant que sections de K_Z^2, on en déduit l'égalité de diviseurs de Weil effectifs sur Z :

$$p^*[\overset{2}{\det} \mu_M] = [p^*(\overset{2}{\det} \mu_M)] = [\overset{2}{\det} \mu_Z] = 2[\det \mu_Z] = p^*(2(\sum_{i \in I} a_i B_i + L)) \; .$$

Donc $\det^2 \mu_M$ s'annule à un ordre pair strictement positif le long de chacun des B_i, $i \in I$.
□

Soit alors (t_1, t_2) des coordonnées locales au voisinage d'un point lisse de B_i, dans lesquelles l'équation de B_i s'écrit $t_1 = 0$. Localement au voisinage de B_i on a d'après le lemme précédent

$$(\det \mu_M)^2 = t_1^{2s_i}(dt_1 \wedge dt_2)^2 .$$

Fixons $\alpha \in R_+$. Localement au voisinage de $D_{i,\alpha}$, l'application $p : Z \longrightarrow M$ s'écrit $(z, w) \longrightarrow (t_1 = z^2, t_2 = w)$, d'où :

$$(\det \mu_Z)^2 = p^*(\det \mu_M)^2 = 4z^{4s_i+2}(dz \wedge dw)^2 .$$

On a vu dans la preuve du lemme précédent que $\det \mu_Z$ s'annule à l'ordre $2a_i$ le long de $D_{i,\alpha}$. On en déduit $4a_i = 4s_i + 2$ et la contradiction.

Donc le lieu de ramification D est nécessairement trivial, ce qui achève la preuve du théorème 5. $\square$

2.8 Preuve du corollaire 1

Rappelons que les composantes de codimension 1 du lieu singulier $S(M, \rho)$ sont contenues dans le lieu de branchement du revêtement spectral $\pi : M^{sp} \longrightarrow M$. Le corollaire 1 est alors une conséquence immédiate du théorème 5 et du

Lemme 2.12 *Supposons que $p : Z \longrightarrow M$ est un revêtement étale. Alors le revêtement spectral $\pi : M^{sp} \longrightarrow M$ est étale.*

Preuve :
Fixons α une racine de R et notons en général Z^0 l'ouvert des points de Z non-ramifiés au-dessus de M. Il existe alors un morphisme analytique $q_\alpha : Z^0 \longrightarrow Q$ tel que le morphisme $p : Z^0 \longrightarrow M$ factorise en $Z^0 \xrightarrow{q_\alpha} Q \longrightarrow M$, où $Q \subset T^*M$ désigne le revêtement ramifié de M construit à la section 2.2. Le morphisme $q_\alpha : Z^0 \longrightarrow T^*M$ associe à un point z de Z^0 le point $(p(z), \eta_\alpha(z)) \in T^*M$, où l'élément $\eta_\alpha(z)) \in T_z^*(Z)$ est identifié à un élément de $T^*_{p(z)}M$ via $p : Z^0 \longrightarrow M$ qui est un biholomorphisme local. Dans le cas où $p : Z \longrightarrow M$ est étale, on obtient ainsi un morphisme $q : Z \longrightarrow Q$. Comme Z est irréductible lisse, ce morphisme factorise via $q : Z \longrightarrow Q^{norm}$, où ce dernier espace désigne la normalisée d'une composante connexe de Q. Comme ce raisonnement est valable pour tout α dans R, on obtient en réitérant l'opération un morphisme $q : Z \longrightarrow M^{sp}$ tel que $p : Z \longrightarrow M$ s'identifie au composé de $q : Z \longrightarrow M^{sp}$ et $\pi : M^{sp} \longrightarrow M$.

Comme $p : Z \longrightarrow M$ est étale et M est lisse, on en déduit facilement que q et π sont des morphismes étales, ce qui achève la preuve du lemme. $\square$

2.9 Rigidité non-archimédienne forte : le cas des "faux $\mathbf{P}^2\mathbb{C}$"

Le théorème précédent dit que les composantes de codimension 1 de d_M n'ont pas d'holonomie locale. La représentation d'holonomie locale $\tau : \pi_1(M_0) \longrightarrow \Lambda$ s'étend alors en une représentation $\tau : \pi_1(M) \longrightarrow W$ et le fibré plat $F(M, \rho)$ défini sur M_0 s'étend en un fibré plat sur tout M, encore noté $F(M,\rho)$. On notera encore $\tau : \pi_1(M) \longrightarrow W = S_3$ l'holonomie de ce fibré et Λ l'image de τ. La 1-forme holomorphe μ_M définie sur $R(M,\rho)$ à valeur dans $F(M,\rho)$ est bornée car f est lipschitzienne. Elle s'étend donc en un élément $\mu_M \in H^0(M, \Omega^1_M \otimes F(M,\rho))$. On notera D_M le diviseur $[\det \mu_M]$ de M associé à la section $\det \mu_M \in H^0(M, K_M \otimes \det F(M,\rho))$. .

Supposons désormais que M est un "faux $\mathbf{P}^2\mathbb{C}$". En particulier $c_2(M) = 3$, $c_1^2(M) = 9$, $b_1(M) = h^{2,0}(M) = 0$ et $h^{1,1}(M) = 1$. Etudions le revêtement étale galoisien $p : Z \longrightarrow M$ de groupe de Galois $\Lambda \subset S_3$. On notera D_Z le diviseur canonique $D_Z = p^* D_M = [\det \mu_Z]$. D'après le lemme 2.8 (valable sans hypothèse de ramification sur $p : Z \longrightarrow M$), l'application linéaire $\eta : V^* \longrightarrow V^*.\mu_Z$ est un isomorphisme de Λ-modules. Commençons par montrer l'analogue du lemme 2.9,1. dans le cas étale.

Lemme 2.13 $\Lambda \simeq S_3$.

Preuve :
Supposons par l'absurde que Λ est un sous-groupe propre de S_3.

1^{er} cas : $\Lambda \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.
Le Λ-module $V^*.\mu_z$ est alors isomorphe à $1 \oplus \varepsilon$, où ε désigne le caractère signature de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. En particulier il existe une 1-forme $\alpha \in V^*.\mu_Z$, non-nulle et Λ-invariante. Elle provient donc d'une 1-forme holomorphe non-nulle sur M. Comme $b_1(M) = 0$, on obtient une contradiction.

$2^{ème}$ cas : $\Lambda \simeq A_3$.
Dans ce cas le fibré en droite plat $\det F(M,\rho)$, d'holonomie $\det \tau : \pi_1(M) \longrightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, est trivial. Mais alors la section $\det \mu_M \in H^0(M, K_M \otimes \det F(M,\rho))$ définit un élément de $H^0(M, K_M)$, non-nul d'après la proposition 2.2 : contradiction à $h^{2,0}(M) = 0$. $\square$

Donc $p : Z \longrightarrow M$ est un revêtement étale galoisien de groupe de Galois $\Lambda = S_3$. On notera $p' : Y \longrightarrow M$ le quotient de Z par le sous-groupe A_3 de S_3, c'est un revêtement étale de M d'ordre 2.

Lemme 2.14 $b_1(Y) = 0$ *et* $h^{2,0}(Y) = 1$.

Preuve :
L'espace vectoriel $H^0(Y, \Omega^1_Y)$ est un $Gal(Y/M)$-module, où $Gal(Y/M) \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ désigne le groupe de Galois du revêtement étale p'. Il se décompose en une somme de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-modules irréductibles $a1 \oplus b\varepsilon$. Comme $b_1(M) = 0$, $a = 0$ comme au premier cas du lemme précédent. Soit alors λ un élément de $H^0(Y, \Omega^1_Y)$. La $(1,1)$-forme positive $\lambda \wedge \bar{\lambda}$ est $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-invariante, elle provient donc d'une $(1,1)$-forme positive β sur M. La $(1,1)$-forme $\lambda \wedge \bar{\lambda}$ est d-fermée, donc β aussi. Comme $H^{1,1}(M) = \mathbb{C}$, il existe un réel positif r tel que $[\beta] = r[\omega_M]$, où ω_M désigne la forme de Kähler de M et $[\ ]$ désigne le passage aux classes de cohomologie. Mais $(\lambda \wedge \bar{\lambda})^2 = 0$ donc aussi $[\beta]^2 = r^2 [\omega_M]^2 = 0$. Comme la forme de Kähler ω_M est non-dégénérée, on a $r = 0$, donc $[\beta] = 0$ puis $[\lambda \wedge \bar{\lambda}] = 0$. Il existe alors une fonction réelle g sur Y telle que $\lambda \wedge \bar{\lambda} = \imath \partial \bar{\partial} g$. Comme la $(1,1)$-forme $\lambda \wedge \bar{\lambda}$ est positive, la fonction g est

plurisousharmonique sur Y compacte, donc constante. Finalement $\lambda \wedge \bar{\lambda} = 0$ d'où $\lambda = 0$ et $b_1(Y) = 0$.

Comme $p' : Y \longrightarrow X$ est étale, Y est encore un quotient hyperbolique complexe compact. On a donc l'égalité $c_1^2(Y) = 3c_2(Y)$. Comme $p' : Y \longrightarrow M$ est de degré 2, $c_2(Y) = 2c_2(M) = 6$, donc $c_1^2(Y) = 18$. D'après la formule de Noether, $1 - h^{1,0}(Y) + h^{2,0}(Y) = 1/12(c_1^2(Y) + c_2(Y)) = 2$. Comme $h^{1,0}(Y) = 0$, on en déduit bien $h^{2,0}(Y) = 1$. □

L'espace vectoriel complexe $H^0(Z, \Omega_Z^1)$ est naturellement un Λ-module, admettant le Λ-module $V^*.\mu_Z \simeq V^*$ comme sous-module. Décomposons le Λ-module $H^0(Z, \Omega_Z^1)$ en somme d'irréductibles $a1 \oplus b\varepsilon \oplus cV^*$, où a, b et c désignent trois entiers naturels. Comme $b_1(M) = 0$ on a encore $a = 0$. Par le même raisonnement sur les $(1,1)$-formes qu'au lemme 2.14, on a aussi $b = 0$. Finalement $H^0(Z, \Omega_Z^1) \simeq cV^*$ comme Λ-module.

En tant que A_3-module, V^* se décompose en une somme de caractères $\chi \oplus \chi^{-1}$ dans la base $\mathbb{C}.\tau \oplus \mathbb{C}.\tau'$, avec

$$\tau = \alpha_1^\vee + e^{i\pi/3}.\alpha_2^\vee \ ,$$
$$\tau' = \alpha_1^\vee + e^{-i\pi/3}.\alpha_2^\vee \ .$$

Notons γ l'élément s_{α_2} de $\Lambda \simeq S_3$. En particulier $\gamma(\tau) = \tau'$.

Lemme 2.15 *Supposons $c > 1$. Alors il existe une 1-forme holomorphe $\beta \in H^0(Z, \Omega_Z^1)$ non colinéaire à η_τ et telle que $\eta_\tau \wedge \beta = 0$.*

Preuve :
Choisissons $\nu : V^* \simeq V'$ un Λ-sous-module irréductible de $H^0(Z, \Omega_Z^1)$ en somme directe avec $V^*.\mu_Z$. Soit il existe un élément $\beta \in V'$ tel que $\eta_\tau \wedge \beta = 0$ et on a le lemme. Sinon $\eta_\tau \wedge \eta_{\tau'}$ et $\eta_\tau \wedge \nu_{\tau'}$ sont deux éléments de $H^0(Z, K_Z)$, non identiquement nulles sur Z : $\eta_\tau \wedge \eta_{\tau'}$ s'identifie à $\det \mu_Z$ et est donc non-nulle d'après la proposition 2.2, $\eta_\tau \wedge \nu_{\tau'}$ est non-nulle par construction. Ces formes sont A_3-invariantes, elles proviennent donc de deux 2-formes holomorphes sur le quotient lisse $Y = Z/A_3$. Comme $h^{2,0}(Y) = 1$ d'après le lemme 2.14, il existe un nombre complexe x non-nul tel que $\eta_\tau \wedge \eta_{\tau'} = x(\eta_\tau \wedge \nu_{\tau'})$. C'est-à-dire $\eta_\tau \wedge \beta = 0$, avec $\beta = \eta_{\tau'} - x\nu_{\tau'}$. Comme $\eta_{\tau'} \in V^*.\mu_Z$ et $\nu_{\tau'} \in V'$, les 1-formes η_τ et β ne sont pas colinéaires. □

Proposition 2.3 $H^0(Z, \Omega_Z^1) = V^*.\mu_Z$.

Preuve :
Raisonnons par l'absurde et supposons $c > 1$. D'après le lemme précédent, il existe une 1-forme $\beta \in H^0(Z, \Omega_Z^1)$ non-colinéaire à η_τ et telle que $\eta_\tau \wedge \beta = 0$. D'après le théorème de Castelnuovo-DeFranchis, il existe une courbe algébrique lisse Σ de genre $g \geq 2$, une 1-forme holomorphe δ de $H^0(\Sigma, K_\Sigma)$ et un morphisme $p_1 : Z \longrightarrow \Sigma$ tels que $\eta_\tau = p_1^*\delta$. Soit $p_2 : Z \longrightarrow \Sigma$ le morphisme défini par $p_2 = p_1 \circ \gamma$. On a l'égalité de 1-formes $\eta_{\tau'} = p_2^*\delta$. Par la fonctorialité de la construction, le groupe $\Lambda = S_3$ agit naturellement sur $\Sigma \times \Sigma$ (le sous-groupe A_3 préservant globalement chacun des des facteurs et γ les interchangeant) et l'application $p_1 \times p_2 : Z \longrightarrow \Sigma \times \Sigma$ est S_3-équivariante.

Comme $\det \mu_Z \in H^0(Z, K_Z)$ est non identiquement nul d'après la proposition 2.2, le morphisme $p_1 \times p_2 : Z \longrightarrow \Sigma \times \Sigma$ est d'image de dimension 2 donc surjectif. Par ailleurs si C désigne une courbe de Z contractée en un point par le morphisme $p_1 \times p_2$, les 1-formes η_τ et $\eta_{\tau'}$ sont nulles le long de C. Mais alors l'application $f_C : \tilde{C} \longrightarrow X$ est constante : contradiction au lemme 2.6. Donc $p_1 \times p_2$ ne contracte aucune courbe. Finalement, $p_1 \times p_2 : Z \longrightarrow \Sigma \times \Sigma$ est un revêtement ramifié. On notera d le degré de ce revêtement.

Notons Q le diviseur canonique $[\delta]$ de Σ défini par les zéros de la 1-forme holomorphe δ. Notons C (respectivement C') le diviseur $p_1^* Q$ de Z (respectivement $p_2^* Q$). Comme τ et τ' sont vecteurs propres pour A_3 et sont permutés par γ, le diviseur effectif $C + C'$ est invariant sous l'action du groupe de revêtement Λ. Il est donc de la forme $C + C' = p^* E$, où E désigne un diviseur effectif de M. Comme $\det \mu_Z = \eta_\tau \wedge \eta_{\tau'}$, la 2-forme holomorphe $\det \mu_Z$ s'annule le long de C (resp. C') au même ordre que η_τ (resp. $\eta_{\tau'}$). En particulier on a l'inégalité de diviseurs effectifs $C + C' \leq D_Z$. Comme $\det \mu_Z = p^*(\det \mu_M)$, on en déduit l'inégalité de diviseurs effectifs $E \leq D_M$.

Comme les composantes irréductibles de C (resp. C') sont des fibres de $p_1 : Z \longrightarrow \Sigma$ (resp. $p_2 : Z \longrightarrow \Sigma$), les produits d'intersection $C.C$ et $C'.C'$ sont nuls. D'où l'égalité $(C + C').(C + C') = 2C.C'$. Comme $C = p_1^* Q$, on a aussi $C = (p_1 \times p_2)^*(Q \times \Sigma)$. De même $C' = (p_1 \times p_2)^*(\Sigma \times Q)$. Finalement :

$$C.C' = (p_1 \times p_2)^*(Q \times \Sigma).(p_1 \times p_2)^*(\Sigma \times Q) = d.(Q \times \Sigma).(\Sigma \times Q) \ ,$$

où le produit d'intersection du terme de droite est pris dans $\Sigma \times \Sigma$. Mais $(Q \times \Sigma).(\Sigma \times Q) = (\deg Q)^2$. Comme Q est un diviseur canonique sur Σ, $\deg Q = 2g - 2$, où $g \geq 2$ désigne le genre de Σ. Finalement :

$$(C + C').(C + C') = 8\, d\, (g - 1)^2 \ .$$

Notons alors l_M un générateur positif du groupe de Picard $PicM$ (modulo torsion) et l_Z son tiré en arrière à Z. Comme le diviseur E est effectif, le fibré en droite L_E associé à E s'écrit $l_M^r \otimes P_M$, où P_M désigne un fibré de torsion sur M et r est un entier strictement positif. Comme M est un "faux $\mathbf{P}^2\mathbb{C}$", d'après la remarque 3 de l'introduction on a $l_M.l_M = 1$. Comme $E \leq D_M$ et comme le fibré associé au diviseur D_M est K_M, on en déduit $1 \leq r \leq 3$. L'autointersection $E.E = r^2(l_M.l_M) = r^2$ vaut alors 1, 4 ou 9. Le revêtement étale $p : Z \longrightarrow M$ est d'ordre 6, donc $(C + C').(C + C') = p^*E.p^*E = 6r^2$ vaut 6, 24 ou 54. Mais 8 divise $(C + C').(C + C')$, qui vaut donc 24. D'où $d(g - 1)^2 = 3$, donc $g = 2$, $d = 3$ et $r = 2$.

Remarquons que l'action de S_3 sur $\Sigma \times \Sigma$ est engendrée par des pseudo-réflexions : l'involution γ échangeant les deux facteurs et les deux involutions similaires dont les points fixes sont les graphes dans $\Sigma \times \Sigma$ de a et a^2, où a est un générateur de l'action de A_3 sur le premier facteur. En particulier d'après un théorème de Chevalley le quotient $(\Sigma \times \Sigma)/S_3$ est lisse.

Considérons alors l'application quotient $q : M \longrightarrow (\Sigma\times\Sigma)/S_3$ entre surfaces complexes lisses déduite de $p_1 \times p_2$. Comme M est un "faux $\mathbf{P}^2\mathbb{C}$" le quotient $(\Sigma\times\Sigma)/S_3$ a aussi l'homologie de $\mathbf{P}^2\mathbb{C}$. Le degré de toute application entre deux surfaces lisses ayant l'homologie de $\mathbf{P}^2\mathbb{C}$ est évidemment un carré. Donc l'application q a pour degré un carré. Mais ce degré est aussi le degré de $p_1 \times p_2 : Z \longrightarrow \Sigma \times \Sigma$, c'est-à-dire 3 d'après ce qui précède : contradiction. Ce qui achève la preuve de la proposition 2.3. $\square$

Preuve du théorème 6 :
Rappelons qu'on procède par l'absurde en supposant $\rho : \pi_1(M) \longrightarrow PGL(3,k)$ non bornée. D'après la proposition précédente, la variété d'Albanese $A = Alb(Z) = H^0(Z,\Omega^1_Z)^*/H_1(Z,\mathbb{Z})$ est une alors une surface abélienne. Fixons z_0 un point de Z et notons $\psi : Z \longrightarrow A$ le morphisme d'Albanese associé à z_0. Rappelons que le morphisme ψ associe à un point z de N l'élément $\psi(z)$ de A qui à $\beta \in H^0(Z,\Omega^1_Z)$ associe $\int_{z_0}^{z}\beta$. Rappelons aussi que toute 1-forme holomorphe β sur Z définit une forme linéaire sur l'espace tangent $H^0(Z,\Omega^1_Z)$ en l'identité e de A et donc une 1-forme holomorphe $\overline{\beta}$ sur $Alb(Z)$. Bien-sûr $\beta = \psi^*(\overline{\beta})$. On déduit facilement du lemme 2.6 que le morphisme $\sigma : Z \longrightarrow A = Alb(Z)$ est un revêtement ramifié. On note d le degré de ce revêtement.

Remarques : Je ne sais pas s'il peut exister en général des surfaces hyperboliques complexes revêtements ramifiés de leur variété d'Albanese.

Comme le morphisme $\psi : Z \longrightarrow A$ est universel pour les morphismes de Z dans les variétés abéliennes et que le groupe $\Lambda \simeq S_3$ agit sur Z, il existe une représentation $l^{aff} : \Lambda \longrightarrow Aut^{aff}(A)$ tel que le morphisme ψ est l^{aff}-équivariant (où Aut^{aff} désigne le groupe des biholomorphismes de la variété A. Le groupe $Aut^{aff}(A)$ est un produit semi-direct $Aut(A) \ltimes A$, où $Aut(A)$ désigne le groupe des automorphismes de la variété abélienne $AlbZ$. La partie linéaire $l : \Lambda \longrightarrow Aut(A)$ de $l^{aff} : \Lambda \longrightarrow Aut^{aff}(A)$ est induite de l'action linéaire de S_3 sur $H^0(Z,\Omega^1_Z)^*$ c'est-à-dire sur V. On en déduit que l'action l^{aff} de S_3 est par pseudo-réflexions, qu'elle fixe un point de A, puis que quitte a changer le point base z_0 de l'application d'Albanese on peut supposer que l'action de S_3 sur A est linéaire. On montre facilement qu'une surface abélienne admettant S_3 comme groupe d'automorphisme est isogène à un produit $E \times E$, où E désigne une courbe elliptique. D'après Fujiki [7, Table 11 p.51 cas 12,12', réferrant à la Table 8 p.47 cas 2,2'] on a en fait l'un des cas suivants :

Cas 1 (resp. $1'$) : la surface abélienne A est isomorphe au produit $E \times E$ (resp. au quotient $(E \times E)/\mathbb{Z}_3$, où le groupe cyclique $\mathbb{Z}_3$ agit diagonalement via un point de 3-torsion de E), et l'action de S_3 sur $E \times E$ est induite de son action par permutation des facteurs dans $E \times E \times E$ préservant la surface $E \times E$ d'equation $x + y + z = 0$ dans $E \times E \times E$ (cette action commute à l'action de $\mathbb{Z}_3$ et passe donc au quotient sur $(E \times E)/\mathbb{Z}_3$).

Cas 2 (respectivement $2'$) : la surface abélienne A est toujours isomorphe au produit $E \times E$ (resp. au quotient $(E \times E)/\mathbb{Z}_3$), mais cette fois les 3 réflexions élémentaires de S_3 ont comme ensemble de points fixes dans leur action sur $E \times E$ le premier facteur, le second, et la courbe elliptique d'équation $x + y = 0$ dans $E \times E$ respectivement.

Rappelons que $R_+ = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$ désigne l'ensemble des racines positives de R. De la description de A on déduit aussitôt que les feuilletages holomorphes de A définis par les 1-formes holomorphes $\overline{\eta}_{\alpha_i}$, $i = 1, 2, 3$, sont à feuilles fermées (des courbes elliptiques).

Lemme 2.16 *Pour $i = 1, 2, 3$ soit $E_i \subset Z$ une courbe elliptique feuille générique du feuilletage défini par la 1-forme holomorphe $\overline{\eta}_{\alpha_i}$. Alors sa préimage $C_i = \psi^{-1}(E_i) \subset Z$ est irréductible (lisse).*

Preuve :
Comme le feuilletage de A défini par $\overline{\eta}_{\alpha_i}$ est à feuilles fermées, le feuilletage $\mathcal{F}_i$ de Z défini par η_{α_i} aussi. Notons $\lambda_i : Z \longrightarrow \Sigma$ la fibration à fibre connexe définie par ce feuilletage (les feuilletages $\mathcal{F}_i$ sont permutés par l'action de S_3 donc la courbe projective Σ est indépendante de $i = 1, 2, 3$). L'application $\lambda_1 \times \lambda_2 : Z \longrightarrow \Sigma \times \Sigma$ est évidemment surjective. Comme $h^{1,0}(Z) = 2$ la courbe Σ est nécessairement elliptique. Par universalité de l'application d'Albanese l'application $\lambda_1 \times \lambda_2$ factorise via $\psi : Z \longrightarrow A$. Mais alors $C_1 = \psi^{-1}(E_1)$ n'est autre que la fibre générique de λ_1, donc irréductible (lisse). $\square$

L'orbite de E_1 sous S_3 est réunion de trois courbes elliptiques $E_1 \cup E_2 \cup E_3$ de A se coupant deux a deux et d'intersection commune $E_1 \cap E_2 \cap E_3 = \emptyset$ (dès que E_1 ne contient pas un point de A fixe sous le sous-groupe A_3 de S_3). Comme l'application $\psi : Z \longrightarrow A$ est S_3-équivariante, la S_3-orbite de C_1 dans Z s'identifie à la réunion $C_1 \cup C_2 \cup C_3$, où chacune des courbes $C_i = \psi^{-1}(E_i)$ est irréductible d'après le lemme précédent. Notons C l'image dans M de C_1 via le revêtement étale $p : Z \longrightarrow M$. Comme d'après l'hypothèse $(*)$ le diviseur C est ample, la préimage $p^{-1}(C) = C_1 \cup C_2 \cup C_3$ est connexe. Comme l'action de S_3 sur Z est sans point fixe, on montre facilement que tout point d'intersection de deux courbes distinctes parmi les C_i, $i = 1, 2, 3$, est nécessairement dans l'intersection $C_1 \cap C_2 \cap C_3$. Contradiction à $E_1 \cap E_2 \cap E_3 = \emptyset$. Ce qui achève la preuve du théorème 6. $\square$

3 Représentations archimédiennes.

3.1 Variations complexes de structures de Hodge

Dans ce paragraphe on rappelle les définitions et les résultats de théorie de Hodge qui nous seront utiles. On pourra consulter [29]. Commençons par la

Définition : Soit M une variété analytique complexe (lisse). Une variation complexe de structure de Hodge sur M est la donnée d'un système local complexe H sur M (de rang fini) et d'une décomposition $\mathcal{C}^\infty$ de $\mathcal{H} = \mathcal{O}_M \otimes_{\mathbb{C}} H$ en somme directe de sous-fibrés complexes $\mathcal{H} = \bigoplus_{r \in \mathbb{Z}} \mathcal{H}^r$ telle que :
1. pour tout couple d'entiers (p, q), le fibré $\bigoplus_{r \geq p} \mathcal{H}^r$ définit un sous-fibré holomorphe $\mathcal{F}^p$ de $\mathcal{H}$ et $\bigoplus_{r \leq -q} \mathcal{H}^r$ un sous-fibré antiholomorphe $\overline{\mathcal{F}}^q$.
2. si ∇ désigne la connexion plate associée à H, ∇ vérifie la condition de transversalité de Griffiths : $\nabla(\mathcal{F}^p) \subset \Omega^1 \otimes_{\mathcal{O}_M} \mathcal{F}^{p-1}$ et $\nabla(\overline{\mathcal{F}}^q) \subset \overline{\Omega}^1 \otimes_{\mathcal{O}_M} \overline{\mathcal{F}}^{q-1}$.
Une *polarisation* de la variation complexe $\mathcal{H}$ est une forme hermitienne plate h sur $\mathcal{H}$ rendant la décomposition de Hodge $\mathcal{H} = \bigoplus \mathcal{H}^r$ orthogonale et telle que $(-1)^r h$ est définie

positive sur $\mathcal{H}^r$.

Spécialisons la définition précédente au cas où M est réduite à un point : une structure de Hodge complexe sur un espace vectoriel complexe H est une décomposition $H = \bigoplus_{r \in \mathbb{Z}} H^r$; une polarisation est une forme hermitienne h sur H pour laquelle cette décomposition est orthogonale et telle que $(-1)^r h$ est définie positive sur H^r ; ses nombres de Hodge sont les $h^r = \dim H^r$.

Soit H un espace vectoriel complexe de dimension finie, (h^r) une famille d'entiers ≥ 0 avec $\sum_r h^r = \dim H$ et h une forme hermitienne sur H de signature $\sum (-1)^r h^r$. On notera $D(H, h, (h^r))$ ou simplement D l'espace des structures de Hodge complexes sur H, de nombres de Hodge h^r, polarisées par h. L'application qui à un point de D associe la filtration de Hodge de H par les $F^p = \bigoplus_{r \geq p} H^r$ est une injection de D dans une variété de drapeaux $\check{D}$ de H (il suffit de remarquer que $\overline{F}^q = \bigoplus_{r \leq -q} H^r$ est le h-orthogonal de F^{-q+1} et que $H^r = F^r \cap \overline{F}^{-r}$).

Notons G le groupe unitaire $U(H,h)$. On a alors $G \simeq U(p,q)$, où $p = \sum_{r\, pair} h^r$ et $q = \sum_{r\, impair} h^r$, et $G_{\mathbb{C}} \simeq GL(H)$. On vérifie facilement que le groupe G (resp. $G_{\mathbb{C}}$) agit transitivement sur D (resp. $\check{D}$). Fixons un point d_0 de D correspondant à une décomposition $H = \bigoplus H^r$, le stabilisateur de ce point dans G (resp. $G_{\mathbb{C}}$) est le sous-groupe compact $V = \prod_r U(H^r, h_{|H^r})$ (resp. le sous-groupe parabolique Q fixant la filtration (F^p)). Le radical de Levi de Q est le complexifié $V_{\mathbb{C}}$ de V et la structure complexe de D est induite du plongement ouvert de la G-orbite

$$D = G/V \hookrightarrow \check{D} = G_{\mathbb{C}}/Q \quad .$$

En chaque point (F^p) de $\check{D}$, l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}} \simeq EndH$ de $G_{\mathbb{C}}$ hérite d'une filtration $F^p\mathfrak{g}_{\mathbb{C}} = \{f \in \mathfrak{g}_{\mathbb{C}} \, / f(F^i) \subset F^{i+p}\}$. L'espace tangent holomorphe en ce point s'identifie à $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}/F^o(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$ et hérite de la filtration image de celle de $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$. On notera $I(\check{D})$ le sous-fibré holomorphe $F^{-1}(T\check{D})$ de $T\check{D}$ et $I(D)$ sa restriction à D. Notons $\mathfrak{q}$ l'algèbre de Lie de Q, elle s'identifie à la filtration $F^0(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$ en d_0. En particulier le fibré $T\check{D}$ s'identifie au fibré $G_{\mathbb{C}}$-équivariant $G_{\mathbb{C}} \times_Q \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}/\mathfrak{q}$ et le fibré $I(\check{D})$ au fibré $G_{\mathbb{C}}$-équivariant $G_{\mathbb{C}} \times_Q F^{-1}(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})/\mathfrak{q}$.

Par application du principe de monodromie on obtient alors la définition équivalente :

Définition : Soit M une variété analytique complexe lisse de groupe fondamental $\pi_1(M)$ et de revêtement universel $\tilde{M}$. Une variation complexe polarisée de structure de Hodge sur M est la donnée d'une représentation, dite représentation de Hodge, $\rho : \pi_1(M) \longrightarrow G$ et d'une application holomorphe ρ-équivariante $f : \tilde{M} \longrightarrow D = G/V$ telle que $df(T\tilde{M}) \subset I(D)$.

Remarques : La condition $df(T\tilde{M}) \subset I(D)$ équivaut à la condition 2. de la définition précédente.

Rappelons qu'un fibré de Higgs sur M est un fibré holomorphe E muni d'une section

$\theta \in H^o(End(E)\otimes\Omega^1_M)$ telle que $\theta\wedge\theta = 0$. Supposons dorénavant M kählérienne compacte. Dans [29], Simpson identifie (par un homéomorphisme) l'espace de module $\mathcal{M}_{Betti}(N)$ des représentations de Γ à valeur dans $GL(N,\mathbb{C})$ à l'espace de module $\mathcal{M}_{Dol}$ des fibrés de Higgs semi-stables de rang N à classes de Chern nulles sur M. Cet espace de module est naturellement muni d'une $\mathbb{C}^*$-action (définie par $t : (E,\theta) \longrightarrow (E, t.\theta)$) dont les points fixes correspondent à des variations de structure de Hodge sur M. Simpson montre ainsi le résultat fondamental ([29, p.44, p.46]) :

Théorème 9 (Simpson) *Soit M une variété kählérienne compacte, N un entier positif et $\rho : \pi_1(M)\longrightarrow GL(N,\mathbb{C})$ une représentation de $\pi_1(M)$. Alors il existe une représentation de Hodge $\rho' : \pi_1(M)\longrightarrow GL(N,\mathbb{C})$ et un chemin continu $\rho_t : \pi_1(M)\longrightarrow GL(N,\mathbb{C})$, $t \in [0,1]$, de représentations reliant $\rho_0 = \rho$ à $\rho_1 = \rho'$. De plus, si ρ est semi-simple, l'adhérence de Zariski $\overline{\rho_t(\pi_1(M))}$ est constante égale à l'adhérence de Zariski $\overline{\rho(\pi_1(M))}$. Enfin l'adhérence de Zariski réelle $\overline{\rho_t(\pi_1(M))}^{reel}$ est une forme réelle de $\overline{\rho(\pi_1(M))}$ et c'est un groupe de Hodge.*

3.2 Géométrie de $D = G/V$

Pour une étude générale des domaines de Griffiths (i.e. d'une G-orbite ouverte dans l'espace homogène complexe compact $G_\mathbb{C}/Q$, où G désigne un groupe de Lie réel semi-simple, $G_\mathbb{C}$ son complexifié et Q un sous-groupe parabolique de $G_\mathbb{C}$), on consultera [9]. Etant donné un domaine de Griffiths G/V, on notera K l'unique sous-groupe compact maximal de G contenant V et $\pi : D = G/V\longrightarrow X = G/K$ la fibration sur l'espace symétrique associé. Comme on étudie le cas des représentations à valeur dans $PGL(n+1,\mathbb{C})$ et que toute forme réelle de $PGL(n+1,\mathbb{C})$ de type Hodge est un $G = PU(p,q)$, $p+q = n+1$, on se restreint au cas où $D = D(H,h,(h^r)) = G/V$ désigne l'espace des structures de Hodge complexes sur H, de nombres de Hodge (h^r), polarisées par h ; $G = PU(p,q)$ et $K = P(U(p)\times U(q))$. Une particularité de ce domaine parmi les domaines de Griffiths est que l'espace symétrique $X \simeq PU(p,q)/P(U(p)\times U(q))$ est lui aussi muni d'une structure complexe G-homogène.

3.2.1 La projection $\pi : D\longrightarrow X$

Commençons par poser les notations nécessaires. Pour tout sous-groupe L de G, on notera $\mathfrak{l}$ son algèbre de Lie, $\mathfrak{l}_\mathbb{C}$ son algèbre de Lie complexifiée. On désigne par σ (resp. τ) la conjugaison de $\mathfrak{g}_\mathbb{C}$ par rapport à la forme réelle $\mathfrak{g}$ (resp. $\mathfrak{k}$) et $\theta = \sigma\tau = \tau\sigma$ la complexifiée de l'involution de Cartan de $\mathfrak{g}$ associée à $\mathfrak{k}$. On notera $\mathfrak{g}_\mathbb{C} = \mathfrak{k}_\mathbb{C}\oplus\mathfrak{p}_\mathbb{C}$ (resp. $\mathfrak{g}_\mathbb{C} = \mathfrak{v}_\mathbb{C}\oplus\mathfrak{n}_\mathbb{C}$) la décomposition de $\mathfrak{g}_\mathbb{C}$ associée à $\mathfrak{k}_\mathbb{C}$ (resp. à $\mathfrak{v}_\mathbb{C}$). En particulier θ vaut 1 sur $\mathfrak{k}_\mathbb{C}$ et -1 sur $\mathfrak{p}_\mathbb{C}$. De façon explicite, on notera H^+ (resp. H^-) la somme directe $\oplus_{r\,pair}H^r$ (resp. $\oplus_{r\,impair}H^r$) et J l'endomorphisme de $H = \oplus_{r\in\mathbb{Z}}H^r$ diagonal par bloc et valant $(-1)^r Id$ sur H^r. On a alors les identifications :

$\mathfrak{g}_\mathbb{C} = \mathfrak{gl}(H)$,
$\forall X \in \mathfrak{g}_\mathbb{C},\ \ \sigma(X) = -J.{}^t\overline{X}.J$ et $\tau(X) = -{}^t\overline{X}$,
$\mathfrak{g} = \{X \in \mathfrak{g}_\mathbb{C},\ \ \sigma(X) = X\}$ et $\mathfrak{k} = \{X \in \mathfrak{g}_\mathbb{C},\ \ \tau(X) = X\}$,
$\mathfrak{k}_\mathbb{C} = End(H^+)\oplus End(H^-)$ et $\mathfrak{v}_\mathbb{C} = \oplus_i End(H^i)$,

$\mathfrak{p}_{\mathbb{C}} = Hom(H^+, H^-) \oplus Hom(H^-, H^+)$ et $\mathfrak{n}_{\mathbb{C}} = \oplus_{i \neq j} Hom(H^i, H^j)$.

Rappelons alors le lemme bien connu suivant :

Lemme 3.1 *Soit G un groupe de Lie et L un sous-groupe de Lie de G. L'ensemble des structures complexes G-invariantes sur l'espace homogène G/L est en bijection avec les sous-algèbres $\mathfrak{q}$ de $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ telles que :*
1. $\mathfrak{l}_{\mathbb{C}} \subset \mathfrak{q}$ *et* $Ad V\ \mathfrak{q} = \mathfrak{q}$.
2. $\mathfrak{q} \cap \sigma(\mathfrak{q}) = \mathfrak{l}_{\mathbb{C}}$, *où σ désigne la conjugaison de $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ par rapport à la forme réelle $\mathfrak{g}$.*
3. $\dim_{\mathbb{C}} \mathfrak{q}/\mathfrak{l}_{\mathbb{C}} = \frac{1}{2} \dim_{\mathbb{R}} \mathfrak{g}/\mathfrak{l}$.

Ainsi la structure holomorphe de D est définie par la sous-algèbre parabolique $\mathfrak{q}$ de $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$, $\mathfrak{q} = \oplus_{i \leq j} Hom(H^i, H^j)$. De même, l'espace symétrique X admet une structure complexe G-homogène, unique à conjugaison près, définie par la sous-algèbre parabolique maximale $\mathfrak{q}_{max} = End(H^+) \oplus Hom(H, H^-)$ de $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ (resp. par sa conjuguée $\sigma(\mathfrak{q}_{max}) = End(H^-) \oplus Hom(H, H^+)$). On notera $\mathfrak{n}_{\mathbb{C}} = \mathfrak{n}_+ \oplus \sigma(\mathfrak{n}_+)$ la décomposition associée à $\mathfrak{q} = \mathfrak{v}_{\mathbb{C}} \oplus \sigma(\mathfrak{n}_+)$ et $\mathfrak{p}_{\mathbb{C}} = \mathfrak{p}_+ \oplus \sigma(\mathfrak{p}_+)$ celle associée à $\mathfrak{q}_{max} = \mathfrak{k}_{\mathbb{C}} \oplus \sigma(\mathfrak{p}_+)$. Explicitement : $\mathfrak{n}_+ = \oplus_{i>j} Hom(H^i, H^j)$ et $\mathfrak{p}_+ = Hom(H^-, H^+)$.

On a alors la

Proposition 3.1 *Si D est muni de la structure holomorphe définie par la sous-algèbre parabolique $\mathfrak{q}$ de $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$, et X de l'une de ses deux structures holomorphes, la fibration $\pi : D \longrightarrow X$ n'est holomorphe que si $D = X$.*

Preuve :
Le fibré tangent holomorphe à D (resp. à X) s'identifie à la restriction à D (resp. à X) du fibré $G_{\mathbb{C}}$-homogène $G_{\mathbb{C}} \times_Q \mathfrak{n}_+$ (resp. $G_{\mathbb{C}} \times_{Q_{max}} \mathfrak{p}_+$). Il suffit de remarquer que $\mathfrak{n}_+$ n'est pas contenu dans $\mathfrak{p}_+$ (ou $\sigma(\mathfrak{p}_+)$), sauf si $D = X$. □

Remarques : En particulier la proposition 2.5 de [32] est fausse : sur D il existe bien une structure complexe G-homogène rendant la projection π holomorphe, mais ça n'est jamais celle paramétrant les variations de structure de Hodge de type (h^r), sauf si $D = X$.

3.2.2 Les fibrés $T_{hor}D$ et $I(D)$

Pour un domaine de Griffiths D quelconque, la décomposition de V-modules $\mathfrak{n}_+ \simeq \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}/\mathfrak{q} = \mathfrak{k}_{\mathbb{C}}/(\mathfrak{k}_{\mathbb{C}} \cap \mathfrak{q}) \oplus \mathfrak{p}_{\mathbb{C}}/(\mathfrak{p}_{\mathbb{C}} \cap \mathfrak{q})$ induit une décomposition $TD = T_v D \oplus T_{hor} D$ du fibré tangent holomorphe en somme directe de deux fibrés $\mathcal{C}^{\infty}$, appelés *fibré tangent vertical* et *fibré tangent horizontal* respectivement. Dans notre cas notons $\mathfrak{s}_+ = \mathfrak{k}_{\mathbb{C}} \cap \mathfrak{n}_+ = \oplus_{i>j,\, i+j\, pair} Hom(H^i, H^j)$ et $\mathfrak{m}_+ = \mathfrak{p}_{\mathbb{C}} \cap \mathfrak{n}_+ = \oplus_{i>j,\, i+j\, impair} Hom(H^i, H^j)$, ce sont naturellement des sous-$\mathfrak{q}$-modules de $\mathfrak{n}_+$ et $\mathfrak{n}_+ = \mathfrak{s}_+ \oplus \mathfrak{m}_+$. En tant que V-modules, $\mathfrak{s}_+$ et $\mathfrak{n}_+$ sont isomorphes à $\mathfrak{k}_{\mathbb{C}}/(\mathfrak{k}_{\mathbb{C}} \cap \mathfrak{q})$ et $\mathfrak{p}_{\mathbb{C}}/(\mathfrak{p}_{\mathbb{C}} \cap q)$ respectivement. Ainsi les fibrés $T_v D$ et $T_{hor} D$ sont munis d'une structure holomorphe G-équivariante, en tant que restrictions à D des fibrés holomorphes $G_{\mathbb{C}}$-équivariants $G_{\mathbb{C}} \times_Q \mathfrak{s}_+$ et $G_{\mathbb{C}} \times_Q \mathfrak{m}_+$ respectivement. D'où le

Lemme 3.2 *La décomposition $TD = T_v D \oplus T_{hor} D$ est holomorphe.*

Remarques : Pour un domaine de Griffiths quelconque, $T_v D$ est toujours un sous-fibré holomorphe de TD alors que $T_{hor}D$ ne l'est pas en général [9, p.261].

Enfin on notera $\mathfrak{i}_+$ le sous-$\mathfrak{q}$-module $\oplus_i Hom(H^{i+1}, H^i)$ de $\mathfrak{m}_+$. Il s'identifie à $F^{-1}(\mathfrak{g}_\mathbb{C})/\mathfrak{q}$ et le fibré $I(D)$ n'est autre que le sous-fibré holomorphe de $T_{hor}D$ restriction à D du fibré holomorphe $G_\mathbb{C}$-équivariant $G_\mathbb{C} \times_Q \mathfrak{i}_+$.

Intéressons nous aux propriétés métrique de la fibration $\pi : D \longrightarrow X$. Etant donné un fibré holomorphe F sur une variété complexe Y, on regardera une métrique hermitienne sur F comme une forme symétrique complexe h sur $F \oplus \overline{F}$ telle que

a) $h(x, y) = 0$ si x et y sont de même type.

b) $\forall x, y \in F, \;\; h(x, \overline{y}) = \overline{h(y, \overline{x})}$.

On munit alors les fibrés $T_v D$, $T_{hor}D$ et TX de métriques hermitiennes G-invariantes en définissant sur les espaces tangents complexifiés respectifs $\mathfrak{s}_\mathbb{C}$, $\mathfrak{m}_\mathbb{C}$ et $\mathfrak{p}_\mathbb{C}$ aux points bases respectifs eV, eV et eK les formes bilinéaires complexes

$\forall x, y \in \mathfrak{s}_\mathbb{C}, \;\; h_v(x, y) = -B(x, y)$,

$\forall x, y \in \mathfrak{m}_\mathbb{C}, \;\; h_{hor}(x, y) = B(x, y)$,

$\forall x, y \in \mathfrak{p}_\mathbb{C}, \;\; h_X(x, y) = B(x, y)$.

Remarques : On vérifie facilement les conditions d'hermicianité. Remarquons que sur $\mathfrak{g}_\mathbb{C} = \mathfrak{gl}(H)$, le produit de Killing $B(x, y)$ est de la forme $\lambda.Tr(xy)$, où λ est un réel.

a) Si $x, y \in \mathfrak{n}_+ = \mathfrak{s}_+ \oplus \mathfrak{m}_+$, x et y et donc aussi leur produit xy sont des matrices avec des blocs non-nuls uniquement strictement au-dessus de la diagonale ; en particulier $Tr(xy) = 0$ et donc aussi $B(x, y) = 0$. Donc h_v et h_{hor} s'annulent sur des vecteurs de même type. Si $x, y \in \mathfrak{p}_+$, la métrique définie est l'usuelle métrique kählérienne de l'espace symétrique hermitien X.

b) Sur $\mathfrak{g}_\mathbb{C}$ la conjugaison est donnée par σ. En utilisant l'expression de B comme trace, on en déduit aussitôt $B(x, \sigma(y)) = \overline{B(y, \sigma(x))}$.

La définition de h_{hor} implique aussitôt le

Lemme 3.3 $\pi^* h_X = h_{hor}$.

On notera ω_{hor} la $(1, 1)$-forme semipositive associée à la métrique hermitienne h_{hor} sur $T_{hor}D$, d'après le lemme précédent $\omega_{hor} = \pi^*\omega_X$, où ω_X désigne la forme kählérienne de X. En particulier ω_{hor} est fermée.

3.3 Structure des représentations de Hodge

Commençons par la

Proposition 3.2 *Soit M une variété kählérienne compacte de dimension complexe n et supposons que $NS(M, \mathbb{Q}) = \mathbb{Q}$. Soit $f : \tilde{M} \longrightarrow D = G/V$ une variation complexe de structure de Hodge sur M, de représentation de Hodge associée $\rho : \pi_1(M) \longrightarrow G = PU(p, q)$. Alors f est génériquement une immersion holomorphe, ou constante.*

Preuve :

La forme de type $(1,1)$ semi-positive ω_{hor} est la forme de courbure du fibré holomorphe hermitien $\wedge^{max} T_{hor} D$, en particulier $f^*\omega_{hor}$ est fermée et $[f^*\omega_{hor}] \in NS(M, \mathbb{Q})$. Comme $NS(M, \mathbb{Q}) = \mathbb{Q}$, il existe un nombre réel r positif ou nul tel que $[f^*\omega_{hor}] = r.[\omega_M]$, où ω_M désigne la forme de Kähler de M. Supposons que f n'est pas génériquement immersive. Par définition, la forme $f^*\omega_{hor}^n$ s'annule alors sur M, donc $0 = \int_M f^*\omega_{hor}^n = r^n. \int_M \omega^n$. D'où $r = 0$, et il existe une fonction réelle ϕ sur M telle que $f^*\omega_{hor} = \imath\partial\overline{\partial}\phi$. Comme $f^*\omega_{hor}$ est semi-positive, ϕ est plurisousharmonique, donc constante sur M compacte. Finalement $f^*\omega_{hor} = 0$ et f est constante. $\square$

Corollaire 2 *Soit n la dimension complexe de M. Sous les hypothèses de la proposition précédente, si $f : \tilde{M} \longrightarrow D$ est une variation complexe de structure de Hodge non-constante, alors le $\mathfrak{q}$-module $\mathfrak{i}_+$ contient une sous-algèbre abélienne complexe de dimension n.*

Preuve :
Soit x un point générique de $\tilde{M}$, notons $\mathfrak{a}_x$ l'image $df_x(T\tilde{M})$, qui s'identifie naturellement à un sous-espace vectoriel complexe de $\mathfrak{i}_+$. D'après la proposition précédente, $\mathfrak{a}_x$ est de dimension complexe n. Le calcul de courbure de [4, theor. 2.2] implique que $\mathfrak{a}_x$ est une sous-algèbre abélienne de $\mathfrak{i}_+$. $\square$

Corollaire 3 *Soit M une variété kählérienne compacte de dimension complexe n et supposons que $NS(M, \mathbb{Q}) = \mathbb{Q}$. Soit $\rho : \pi_1(M) \longrightarrow G = PU(p,q)$, $p+q = n+1$, une représentation de Hodge associée à la variation de structure de Hodge $f : \tilde{M} \longrightarrow D$. Si $2 \leq n \leq 4$, alors $D = X$.*

Preuve :
Pour $2 \leq n \leq 4$, on vérifie facilement que $\mathfrak{i}_+$ ne contient de sous-algèbre abélienne de dimension n que si $\mathfrak{m}_+ = \mathfrak{p}_+$, i.e $D = X$. Pour $n = 5$, ce n'est plus le cas : pour $G = PU(3,3)$ et $V = P(U(1) \times U(3) \times U(2))$, l'espace vectoriel $\mathfrak{i}_+$ est l'espace de matrices de la forme
$$\left(\begin{array}{|c|ccc|cc|}\hline & * & * & * & & \\ \hline & & & & * & * \\ & & & & * & * \\ & & & & * & * \\ \hline & & & & & \\ & & & & & \\ \hline\end{array}\right)$$
qui contient la sous-algèbre abélienne de dimension 5 des matrices de la forme
$$\left(\begin{array}{|c|ccc|cc|}\hline & * & 0 & 0 & & \\ \hline & & & & 0 & 0 \\ & & & & * & * \\ & & & & * & * \\ \hline & & & & & \\ & & & & & \\ \hline\end{array}\right).$$
$\square$

Proposition 3.3 *1. Soit M une surface complexe projective lisse vérifiant la condition $(*)$. Soit $\rho : \pi_1(M) \longrightarrow G = PU(p,q)$, $p+q = 3$, une représentation de Hodge. Alors ou bien ρ est unitaire, ou bien l'image de ρ est contenue dans un conjugué de $PU(2,1)$ dans $PGL(3, \mathbb{C})$ et il existe une application holomorphe ρ-équivariante $f : \tilde{M} \longrightarrow \mathbf{H}^2_{\mathbb{C}}$ génériquement immersive.*
2. Dans ce dernier cas, si de plus M est un quotient hyperbolique complexe $\Gamma \backslash \mathbf{H}^2_{\mathbb{C}}$ (avec $\Gamma \overset{\rho_0}{\hookrightarrow} PU(2,1)$ un réseau cocompact sans torsion de $PU(2,1)$) et si M vérifie la condition $(**)$, alors la représentation ρ est conjuguée à la représentation ρ_0.

Preuve :
D'après les résultats précédents, la variation complexe de structure de Hodge associée à ρ est constante (auquel cas ρ est unitaire), ou une application holomorphe génériquement immersive $f : \tilde{M} \longrightarrow \mathbf{H}^2_{\mathbb{C}}$. Pour le point 2., on conclut comme Wang [32] que f est une isométrie : d'une part la classe $[f^*\omega]$ s'écrit $r.[\omega]$, où r désigne un entier positif. Il existe donc une fonction ϕ sur M telle que $f^*\omega = r.\omega + i\partial\overline{\partial}\phi$. D'autre part $f^*\omega \leq \omega$ d'après le lemme de Schwarz, d'où $i\partial\overline{\partial}\phi \leq (1-r)\omega \leq 0$ et la fonction ϕ est plurisousharmonique. Comme la variété M est compacte la fonction ϕ est constante, d'où $r = 1$ puis $f^*\omega = \omega$. Donc f est une isométrie et la représentation $\rho : \Gamma \longrightarrow PGL(3, \mathbb{C})$ est conjuguée à la représentation standard ρ_0. $\square$

3.4 Rigidité archimédienne

Preuve du théorème 7 :
Soit M une surface complexe projective lisse vérifiant la condition $(*)$. Soit $\rho : \pi_1(M) \longrightarrow PGL(3, \mathbb{C})$ une représentation d'image $\Lambda = \rho(\pi_1(M))$ Zariski-dense. D'après le théorème 9 de Simpson, la représentation ρ se déforme en une représentation de Hodge, qui vérifie alors les conclusions de la proposition 3.3. Ceci démontre le point 1. du théorème. Pour démontrer le point 2., il suffit en vertu de la même proposition de remarquer que pour un réseau $\Gamma \overset{\rho_0}{\hookrightarrow} PU(2,1)$ la représentation standard ρ_0 est rigide dans $Hom(\pi_1(M), PGL(3, \mathbb{C}))$-$//PGL(3, \mathbb{C})$ (théorème de rigidité locale de Weil). Reste à montrer le point 3. Soit alors M un "faux $\mathbf{P}^2\mathbb{C}$. Identifions $\mathbf{PGL}(3)$ à sa réalisation $Ad\,\mathbf{GL}(3) \subset \mathbf{GL}(\mathfrak{sl}(3))$ En particulier pour tout élément g de $PGL(3, \mathbb{C})$ on notera Trg le nombre complexe $TrAd\,g$.

Lemme 3.4 *Tout élément $g \in \Lambda$ a pour trace un nombre complexe algébrique.*

Preuve :
Notons L le corps engendré par les entrées des matrices de Λ dans $\mathbf{PGL}(3, \mathbb{C})$. Comme Γ est un groupe de type fini, Λ également et L est donc une extension de type fini de $\mathbb{Q}$. Soit $\sigma : L \longrightarrow l$ un plongement de L dans un corps local non-archimédien l, la représentation $\sigma \circ \rho$ est encore d'image Zariski-dense. D'après le théorème 5, le groupe $\sigma(\Lambda)$ est donc relativement compact dans $PGL(3, l)$. En particulier pour tout élément g de Λ, les valeurs propres (dans une extension finie l' de l) de l'élément $\sigma(g)$ de $PGL(3, l)$ sont de norme 1 pour la norme $|\ |_{l'}$ extension naturelle à l' de la norme $|\ |_l$ de l. Donc $|\sigma(trg)|_l = |tr(\sigma(g))|_l \leq 1 \quad (1)$.

Soit alors $g \in \Lambda$ avec $trg \in L$ transcendant sur $\mathbb{Q}$. Comme tout corps local l de caractéristique 0 est de degré de transcendance infini sur $\mathbb{Q}$, que l'ensemble des éléments transcendants de l n'est pas borné, et que L est de type fini, pour tout $c > 0$ on peut trouver un plongement $\sigma : L \longrightarrow l$ dans un corps local l tel que $|\sigma(trg)|_l > c$, ce qui contredit (1). Donc trg est algébrique. $\square$

Lemme 3.5 *La représentation ρ est conjuguée dans $PGL(3, \mathbb{C})$ à une représentation ρ' : $\Gamma \longrightarrow PGL(3, \overline{\mathbb{Q}})$, où $\overline{\mathbb{Q}}$ désigne le corps des nombres complexes algébriques.*

Preuve :

Il suffit de montrer qu'il existe une représentation fidèle $\pi : PGL(3,\mathbb{C}) \longrightarrow GL(m,\mathbb{C})$ telle que $\pi(\Lambda) \subset GL(m,\overline{\mathbb{Q}})$, où $\overline{\mathbb{Q}}$ désigne le corps des nombres complexes algébriques. C'est l'analogue du lemme 6.1.7 de [33, p.118]. On considère le $PGL(3,\mathbb{C})$-module E de dimension finie, sous-module engendré par la fonction trace de l'algèbre de fonctions $\mathbb{C}[PGL(3)]$ (munie de l'action induite par translation à droite de $PGL(3,\mathbb{C})$ sur lui-même). La représentation $\pi : PGL(3,\mathbb{C}) \longrightarrow GL(E)$ est évidemment fidèle et fournit la représentation cherchée : la preuve est identique à celle de Zimmer, qui n'utilise que la Zariski-densité de Λ. $\square$

Proposition 3.4 *Supposons que $M = \Gamma \backslash \mathbf{H}^2_{\mathbb{C}}$ est un "faux $\mathbf{P}^2\mathbb{C}$" et $\rho : \Gamma \longrightarrow PGL(3,\mathbb{C})$ est une représentation Zariski-dense. Alors la représentation ρ est rigide dans l'espace $Hom(\Gamma, PGL(3,\mathbb{C}))/PGL(3,\mathbb{C})$.*

Preuve :
Soit $\rho_t : \Gamma \longrightarrow PGL(3,\mathbb{C})$, $t \in [0,1]$, une famille continue à un paramètre de représentations de Γ avec $\rho_o = \rho$. Comme la représentations ρ est d'image Zariski-dense, on peut supposer que les représentations ρ_t le sont. D'après le lemme précédent, il existe une famille continue à un paramétre (M_t) de matrices de $PGL(3,\mathbb{C})$ et une famille continue à un paramètre $\rho'_t : \Gamma \longrightarrow PGL(3,\overline{\mathbb{Q}})$ de représentations d'images Zariski-denses dans $PGL(3,\mathbb{C})$ telles que $\rho_t = M_t.\rho'_t.M_t^{-1}$. Comme $\overline{\mathbb{Q}}$ muni de la topologie induite de $\mathbb{C}$ est totalement discontinu, la famille (ρ'_t) est constante égale à ρ_0. Donc $\rho_t = M_t.\rho'_0.M_t^{-1}$ et le résultat. $\square$

La proposition 3.4 implique, si M est un "faux $\mathbf{P}^2\mathbb{C}$", que toute représentation $\rho : \Gamma \longrightarrow PGL(3,\mathbb{C})$ Zariski-dense est de Hodge, donc standard d'après la proposition 3.3. Ce qui achève la preuve du point 3. $\square$

4 Arithméticité

Preuve du théorème 3 :
Identifions le groupe $\mathbf{PU}(2,1)$ à sa réalisation linéaire $Ad\,\mathbf{SU}(2,1)$. Soit $\Gamma \overset{\rho_0}{\hookrightarrow} PU(2,1)$ vérifiant les hypothèses du théorème 3. Soit alors L le corps engendré par les entrées de Γ dans $PU(2,1)$ et $\sigma : L \longrightarrow l$ un plongement de L dans un corps local l. Si l est non-archimédien, remarquons que quitte à prendre une extension finie l' de l le groupe ${}^{\sigma}\mathbf{PU}(2,1)$ est l-isomorphe à $\mathbf{PGL}(3)$. Le théorème 5 appliqué à la représentation ${}^{\sigma}\rho_0 : \Gamma \longrightarrow {}^{\sigma}\mathbf{PU}(2,1)(l)$ implique alors que le morphisme ${}^{\sigma}(\overline{\rho_0}) : \Gamma \longrightarrow \mathbf{PU}(2,1)(l)$ est standard. Si l est archimédien, le théorème 6, 3., affirme que ρ est standard. D'après le théorème 1 de Margulis, le réseau Γ de $\mathbf{PU}(2,1)(\mathbb{R})$ est donc arithmétique. $\square$

Références

[1] Barth W. ; Peters C. ; Van de Ven A. Compact complex surfaces. Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete (3) 4. Springer-Verlag, Berlin-New York, 1984

[2] Blasius D., Rogawski J., Cohomology of congruence subgroups and Hodge cycles, in *Regulators in Analysis, Geometry and Number Theory*, Progress in Math **171**, (2000)

[3] Bourbaki, Groupes et Algèbres de Lie, Chap. 4-6, Masson, (1981)

[4] Carlson J., Toledo D., Harmonic mappings of Kähler manifolds to locally symmetric spaces, *Publ. Math. IHES* 69, (1989), 173–201

[5] Corlette K., Archimedean superrigidity and hyperbolic geometry, *Annals of Math.* 135 (1992) 165-182

[6] Deligne P., Mostow G.D, Monodromy of hypergeometric functions and non-lattice integral monodromy, Publ. Math. IHES 63 (1986), 5-89

[7] Fujiki A., Finite automorphism groups of complex tori of dimension two, *Publ. RIMS* 24, 1 (1988) 1-98

[8] Griffiths P., Periods of integrals on algebraic manifolds III, *Publ. Math. IHES* 38 (1970) 125-180

[9] Griffiths P., Schmid W., Locally homogeneous complex manifolds, *Acta Math.* **123** 1969 253–302

[10] Gromov M., Piatetski-Shapiro I., Non-arithmetic groups in Lobachevsky spaces, *Publ. Math. IHES* 65 (1988), 93-103

[11] Gromov M., Schoen R., Harmonic maps into singular spaces and p-adic superrigidity for lattices in groups of rank one, *Publ. Math. IHES* 76 (1992), 165-246

[12] Grothendieck A., Cohomologie globale des faisceaux cohérents et Théorèmes de Lefschetz locaux et globaux (SGA2) (1962) *Advanced Studies in Pure Mathematics, Vol. 2.* North-Holland Publishing Co., Amsterdam ; Masson et Cie, Éditeur, Paris (1968)

[13] Hartman P., On homotopic harmonic maps, *Can. Journ. Math.*, **19** (1967), 673-687

[14] Jost J., Zuo K., Harmonic maps and $\mathbf{SL}(r, \mathbb{C})$-representations of π_1 of quasi-projective manifolds, *J.Alg. Geom* 5 (1996) 77-106

[15] Jost J., Zuo K., Harmonic maps into Bruhat-Tits buildings and factorizations of p-adically unbounded representations of π_1 of algebraic varieties, *J.Alg. Geom* 9 (2000), no. 1, 1–42

[16] Kato F., On p-adic uniformization of fake projective planes, (preprint)

[17] Katzarkov L., On the Shafarevich maps. Algebraic geometry, Santa Cruz 1995, 173–216, Proc. Sympos. Pure Math., 62, Part 2, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1997

[18] Katzarkov L., Pantev T., Representations of fundamental groups whose Higgs bundles are pullbacks. J. Differential Geom. 39 (1994), no. 1, 103–121.

[19] Makarov V.S, On a certain class of discrete subgroups of Lobachevsky space having an infinite fundamental region of finite measure, *Soviet Math. Dokl.* 7 (1966), 328-331

[20] Margulis G.A, Discrete subgroups of semisimple Lie groups, *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grengebiete* 17, Springer-Verlag, (1991)

[21] Mok N., *Metric rigidity theorem on Hermitian Symmetric Manifolds*, World Science Publishing, Singapore (1989)

[22] Mostow G.D., On a remarkable class of polyhedra in complex hyperbolic space, *Pacific J. Math.* 86, (1980), 171-276

[23] Mumford D., An algebraic surface with K ample, $(K^2) = 9$, $p_g = q = 0$, *Amer. J. Math.* 101 (1979), no. 1, 233–244

[24] Reznikov A., Simpson's theory and superrigidity of complex hyperbolic lattices, *C.R.A.S Math.* 320 (1995) 1061-1064

[25] Schoen R., Yau S.T., Lectures on harmonic maps, Conference Proceedings and Lecture Notes in Geometry and Topology, International Press, 1997.

[26] Serre J.P., Revêtements ramifiés du plan projectif, *Séminaire Bourbaki* 204 (1960)

[27] Simpson C., The ubiquity of variations of Hodge structure, *PSPM* vol. 53 (1991)

[28] Simpson C., Lefschetz theorems for the integral leaves of a holomorphic one-form, *Compos. Math.* 87 (1993), 99-113

[29] Simpson C., Higgs bundles and local systems, *Publ. Math. IHES*, 75, (1992), 5-95

[30] Simpson C., Moduli of representations of the fundamental group of a smooth projective variety I, *Publ. Math. IHES*, 79, (1994), 47-129

[31] Vinberg E.B., Discrete groups generated by reflections in Lobachevsky spaces, *Math. USSR SB* 1 (1967) 429-444

[32] Wang M., On representations of complex hyperbolic lattices, *Math Research Letters* 6, (1999), 99-105

[33] Zimmer R., Ergodic theory and semisimple groups. Monographs in Mathematics, 81, Birkhäuser Verlag, 1984.

[34] Zuo K., Factorization of non-rigid Zariski-dense representation of π_1 of projective manifolds, *Invent. Math.* 118 (1994) 37-46

Bruno Klingler
Institut Post-Doctoral Européen,
IHES 35 route de Chartres
91440 Bures-sur-Yvette France
klingler@math.polytechnique.fr