VOLUMES DES REPRÉSENTATIONS SUR UN CORPS LOCAL

BRUNO KLINGLER

ENGLISH SUMMARY. Let Γ be a locally compact second countable group, F a local field of characteristic zero and $\mathbf{G}$ an F-almost-simple F-algebraic group. In this paper we study the space $\mathcal{X}(\Gamma, G)$ of Zariski-dense representations $\rho : \Gamma \longrightarrow G = \mathbf{G}(F)$ using the natural morphism of cohomological functors $\rho^* : H^*(G, \cdot) \longrightarrow H^*(\Gamma, \cdot)$ (where H^* denotes the continuous cohomology).

First let F be a p-adic field. We completely describe the relations between the geometry and the cohomology of G : using geometric properties of the Bruhat-Tits building of G we construct natural cocycles for any irreducible cohomological representation of G. We then adapt these results to the case where the field F is archimedean.

Using these cocycles we obtain a simple cohomological characterization of representations ρ with bounded image.

Our main result is then the construction, using the previous cocycles and dynamical properties at infinity of Γ, of cohomological invariants (called volumes) on the space $\mathcal{X}(\Gamma, G)$. These volumes describe how the image $\rho(\Gamma)$ goes to infinity in G. They have coefficients in the natural "universal" infinite-dimensional representation $L^\infty(\partial\Gamma, \mu_{\partial\Gamma})/\mathbb{C}$ of Γ.

In the case where Γ is a cocompact lattice of $SO(n, 1)$ or $SU(n, 1)$, we use these volumes to produce new non-trivial numerical invariants on $\mathcal{X}(\Gamma, G)$, which refine previously known invariants.

TABLE DES MATIÈRES

1. INTRODUCTION ET RÉSULTATS

1.1. **Introduction.** Etant donné un groupe Γ localement compact à base dénombrable (on a plus particulièrement en vue le cas où Γ est le groupe fondamental d'une variété différentielle compacte, muni de sa topologie discrète), l'étude de l'espace $\mathcal{X}(\Gamma, G)$ des représentations continues Zariski-denses $\rho : \Gamma \longrightarrow G = \mathbf{G}(F)$, où F désigne un corps local de caractéristique zéro et $\mathbf{G}$ un F-groupe algébrique F-presque-simple (par exemple $\mathbf{G} = \mathbf{SL(n)}$), est un problème

support post-doctoral de l'IHES et de l'ETHZ.

central pour la compréhension des propriétés algébriques ou géométriques de Γ. On aimerait en particulier :
- caractériser dans $\mathcal{X}(\Gamma, G)$ les représentations d'image bornée (pour la F-topologie de G), évidemment importantes d'un point de vue arithmétique.
- construire des invariants des représentations de $\mathcal{X}(\Gamma, G)$ apportant une information géométrique sur ces représentations.

La théorie de la rigidité, développée notamment par Margulis, s'intéresse à ces questions dans le cas où Γ est le réseau d'un groupe $H = \mathbf{H}(k)$ (où k désigne un corps local et $\mathbf{H}$ un k-groupe algébrique k-presque-simple) et les résoud complètement quand le groupe $\mathbf{H}$ est de k-rang supérieur ou égal à deux : d'après le théorème de superrigidité de Margulis une représentation $\rho \in \mathcal{X}(\Gamma, G)$ est alors soit d'image bornée dans G, soit ρ s'étend en un morphisme de H dans G, qui est essentiellement l'identité ([14, theor.7.5.6]).

De cette théorie on retient ici deux indications générales, formulées vaguement comme suit. D'abord, les propriétés cohomologiques du groupe Γ ont à voir avec la structure de $\mathcal{X}(\Gamma, G)$. Ainsi par exemple si Γ a la propriété (T) de Kazhdan (qui équivaut à $H^1(\Gamma, \tau) = 0$ pour toute représentation unitaire τ de Γ) et si $\mathbf{G}$ est de F-rang 1 avec F non-archimédien, toute représentation $\rho \in \mathcal{X}(\Gamma, G)$ est bornée. Ensuite, une grande part d'information sur ρ s'obtient en "comparant" (en tant que Γ-actions mesurables) l'action de Γ sur son bord $\partial\Gamma$ avec l'action de $\rho(\Gamma)$ sur le bord ∂G de G (on reviendra plus loin sur la notion de bord).

Dans ce papier nous étudions les représentations ρ de $\mathcal{X}(\Gamma, G)$ à partir du morphisme de foncteurs cohomologiques $\rho^* : H^*(G, .) \longrightarrow H^*(\Gamma, .)$ qui s'en déduit (où H^* désigne la cohomologie continue des groupes topologiques). Quelle information sur ρ peut-on déduire de ρ^* ? Cette question relie intimement les deux pistes mentionnées de la théorie de la rigidité : le rôle de la cohomologie de Γ y est évident ; par ailleurs les représentations cohomologiques de G (i.e. les représentations ayant une cohomologie non-triviale) les plus simples sont définies à partir de l'action à l'infini de G. Par représentation cohomologique de G on entend ici une représentation admissible ayant de la cohomologie. Il est crucial de ne pas se limiter aux représentations unitaires : les groupes p-adiques ont trop peu de telles représentations cohomologiques.

1.2. **Résultats.** Commençons par fixer quelques notations utiles. Soit F un corps local de caractéristique zéro et $\mathbf{G}$ un F-groupe F-presque-simple connexe de F-rang ≥ 1. Fixons $\mathbf{A}$ un F-tore F-déployé maximal de $\mathbf{G}$, notons Φ le système de racines de $\mathbf{G}$ relativement à $\mathbf{A}$ et $\Delta_G \subset \Phi$ l'ensemble des racines simples pour un ordre fixé sur Φ. Pour toute partie θ de Δ_G on note P_θ le sous-groupe parabolique standard de G associé à θ de rang parabolique $|\theta|$ le cardinal de θ (attention, notre convention sur l'indexation des paraboliques est inverse de celle de [2] par exemple), Y_θ la variété de drapeaux G/P_θ, I_θ le G-module admissible $I_{P_\theta}^G(1) = C^\infty(Y_\theta)$ des fonctions lisses sur Y_θ et V_θ le quotient de I_θ par le sous-module engendré par les $I_{\theta'}$, $\theta' \subsetneq \theta$. En particulier $V_\emptyset$ est la représentation triviale et V_{Δ_G} est la représentation de Steinberg.

1.2.1. Pour contrôler une représentation $\rho : \Gamma \longrightarrow G$ à partir de $\rho^* : H^*(G, .) \longrightarrow H^*(\Gamma, .)$, il faut dans un premier temps comprendre l'information géométrique contenue dans les classes de cohomologie des représentations cohomologiques de G.

Le premier résultat de ce papier décrit complètement la relation entre la cohomologie et la géométrie de G dans le cas où F est non-archimédien : nous construisons à l'aide de la géométrie de l'immeuble de Bruhat-Tits X de G des cocycles naturels pour toutes les classes de cohomologie de G à valeur dans ses représentations cohomologiques irréductibles.

Dans le cas non-archimédien et contrairement au cas $F = \mathbb{R}$, le groupe $G = \mathbf{G}(F)$ a peu de représentations irréductibles cohomologiques : d'après Casselman ([6]) toute représentation cohomologique irréductible de G est isomorphe à l'une des représentations V_θ, la cohomologie $H^r(G, V_\theta)$ est nulle en tout degré r différent de $|\theta|$, vaut $\mathbb{C}$ en degré $|\theta|$ et la flèche naturelle $H^{|\theta|}(G, I_\theta) \longrightarrow H^{|\theta|}(G, V_\theta) \simeq \mathbb{C}$ est un isomorphisme. Nous construisons des applications naturelles $\mathrm{vol}_{\theta,X} \in C^{|\theta|}(X, I_\theta)$, où $C^{|\theta|}(X, I_\theta)$ désigne l'espace des applications continues de $X^{|\theta|+1}$ dans I_θ, qui calculent le "volume de type θ" des $(|\theta|+1)$-uplet de points de X. En particulier pour $|\theta| = 1$ l'application $\mathrm{vol}_{\theta,X}$ n'est autre qu'une spécialisation du cocycle de Busemann de X aux points à l'infini de type θ (c.f. remarque 3.1.2). Soit $\mathrm{vol}_\theta \in C^{|\theta|}(G, I_\theta)$ l'application naturellement déduite de $\mathrm{vol}_{\theta,X}$ et $\overline{\mathrm{vol}_\theta} \in C^{|\theta|}(G, V_\theta)$ l'image naturelle de vol_θ via l'application quotient $I_\theta \longrightarrow V_\theta$. On montre le

Théorème 1. *Soit F un corps local non-archimédien de caractéristique zéro et $\mathbf{G}$ un F-groupe F-presque-simple connexe de F-rang ≥ 1. Pour toute représentation cohomologique irréductible V_θ de G, l'élément $\mathrm{vol}_\theta \in C^{|\theta|}(G, I_\theta)$ est un cocycle G-invariant pour la résolution homogène standard de I_θ, dont la classe $[\mathrm{vol}_\theta]$ engendre le $\mathbb{C}$-espace vectoriel $H^{|\theta|}(G, I_\theta) \simeq \mathbb{C}$. De même $H^{|\theta|}(G, V_\theta) \simeq \mathbb{C} \,.\, [\overline{\mathrm{vol}_\theta}]$.*

1.2.2. Dans un deuxième temps nous construisons des analogues des cocycles vol_θ dans le cas où F est archimédien. Les classes $[\mathrm{vol}_\theta] \in H^{|\theta|}(G, I_\theta)$ et $[\overline{\mathrm{vol}_\theta}] \in H^{|\theta|}(G, V_\theta)$ sont encore non-nulles (elles n'engendrent plus cette fois qu'un sous-groupe des groupes de cohomologie considérés).

1.2.3. Nous caractérisons ensuite en termes cohomologiques les représentations continues $\rho : \Gamma \longrightarrow G$ d'image bornée, pour F archimédien ou non. Comme le morphisme de foncteurs ρ^* factorise via le foncteur $H^*(\overline{\rho(\Gamma)}, .)$, où $\overline{\rho(\Gamma)}$ désigne l'adhérence de $\rho(\Gamma)$ dans G pour la F-topologie, le morphisme ρ^* est nul pour une représentation ρ d'image bornée. Réciproquement le caractère borné de ρ se lit très simplement sur le morphisme ρ^* en degré 1. Nous montrons le

Théorème 2. *Soit Γ un groupe localement compact (à base dénombrable), F un corps local de caractéristique zéro, $\mathbf{G}$ un F-groupe F-presque-simple de F-rang $r \geq 1$ et $\rho : \Gamma \longrightarrow G = \mathbf{G}(F)$ une représentation continue. Les quatre conditions suivantes sont équivalentes :*

1. *La représentation $\rho : \Gamma \longrightarrow G$ est d'image bornée.*
2. *Le morphisme de foncteurs de cohomologies continues $\rho^* : H^*(G, .) \longrightarrow H^*(\Gamma, .)$ est identiquement nul.*
3. *Il existe un F-sous-groupe parabolique propre maximal standard $P_\theta \subset G$, $\theta \subset \Delta_G$, $|\theta| = 1$ tel que la classe $\rho^*([\mathrm{vol}_\theta]) \in H^1(\Gamma, I_\theta \circ \rho)$ est nulle.*
4. *Pour tout F-sous-groupe parabolique propre maximal standard $P_\theta \subset G$, $\theta \subset \Delta_G$, $|\theta| = 1$, la classe $\rho^*([\overline{\mathrm{vol}_\theta}]) \in H^1(\Gamma, V_\theta \circ \rho)$ est nulle.*

Remarques :

0. Dans le cas où F est non-archimédien, il revient au même dans 3. (resp. 4.) de dire que le morphisme $\rho^* : H^{|\theta|}(G, I_\theta) \longrightarrow H^{|\theta|}(\Gamma, I_\theta \circ \rho)$ (resp. $\rho^* : H^{|\theta|}(G, V_\theta) \longrightarrow H^{|\theta|}(\Gamma, V_\theta \circ \rho)$) est nul.

1. Ce théorème était bien connu pour F non-archimédien et $\mathbf{G}$ de F-rang 1. L'immeuble X est alors un arbre, l'ensemble Δ_G est réduit à un élément et l'unique représentation cohomologique irréductible V_{Δ_G} s'identifie à la représentation de Steinberg $\mathbf{St}$ de G, c'est-à-dire au G-module des 1-formes simpliciales harmoniques L^2 sur l'arbre X. La simplicité de la preuve dans ce cas vient de ce que $\mathbf{St}$ est unitaire. La norme hilbertienne du cocycle $\rho^*\mathrm{vol}_\theta$ est essentiellement la distance à un point fixé y de l'arbre X de l'orbite $\rho(\Gamma).y$. Dire que $\rho^*[\mathrm{vol}_\theta] = 0$ implique que cette norme est bornée, donc que la représentation $\rho(\Gamma)$ est bornée d'après [5, prop.3.2.4]. Un raisonnement du même type implique que toute action isométrique sur un arbre d'un groupe ayant la propriété (T) de Kazhdan a un point fixe ([20]).

2. Pour F non-archimédien, une différence cruciale entre rang 1 et rang supérieur tient à ce que les représentations V_θ, $|\theta| = 1$, ne sont jamais unitaires dès que $\mathbf{G}$ est de F-rang supérieur ou égal à 2.

1.2.4. Le résultat principal de cet article consiste en la construction, à l'aide du morphisme de foncteurs ρ^*, d'invariants cohomologiques des représentations $\rho : \Gamma \longrightarrow G$, c'est-à-dire de fonctions non-triviales sur l'espace $\mathcal{X}(\Gamma, G)$ à valeur dans une cohomologie universelle de Γ. Les invariants que nous construisons décrivent la façon dont le groupe $\rho(\Gamma)$ part à l'infini dans G. On se débarrasse de la dépendance en ρ des espaces d'arrivée du morphisme ρ^* en utilisant les propriétés dynamiques des actions "à l'infini" de Γ et la théorie des frontières mesurables ([9], [14], [1]). On rejoint ici la deuxième piste de la théorie de la rigidité indiquée plus haut.

Précisément, l'espace $\mathcal{X} = \mathcal{X}(\Gamma, G)$ est naturellement stratifié. A toute représentation ρ de $\mathcal{X}$ on peut associer canoniquement d'après [1] une partie θ_ρ de Δ_G : c'est la plus grosse partie θ de Δ_G telle que le groupe $\rho(\Gamma)$ a la propriété de contraction sur la variété de drapeaux Y_θ (c.f. définition 15). L'ensemble θ_ρ est vide si et seulement si la représentation ρ est d'image bornée. Quand F est archimédien on a $\theta_\rho = \Delta_G$ pour toute représentation non-bornée ρ de $\mathcal{X}(\Gamma, G)$. Pour toute partie θ de Δ_G, notons $\mathcal{X}_{\geq\theta}$ le sous-ensemble de $\mathcal{X}$ des représentations ρ vérifiant $\theta \subset \theta_\rho$; c'est un ouvert de $\mathcal{X}$ pour la topologie compacte-ouverte, et les $\mathcal{X}_{\geq\theta}$ forment une stratification de $\mathcal{X}$. Fixons alors (S, μ_S) un Γ-espace moyennable au sens de Zimmer (c.f. [22, section 4.3]), où μ_S désigne une mesure de probabilité Γ-quasi-invariante sur S. Sous certaines hypothèses naturelles sur S, on construit pour toute partie θ de Δ_G et toute représentation ρ de $\mathcal{X}_{\geq\theta}$ des invariants cohomologiques $[\mathrm{vol}_\theta(\rho, S)] \in H^{|\theta|}(\Gamma, L^\infty(S, \mu_S))$:

Théorème 3. *Soit Γ un groupe localement compact (à base dénombrable), F un corps local de caractéristique zéro et $\mathbf{G}$ un F-groupe F-presque-simple de F-rang $r \geq 1$. Soit (S, μ_S) un Γ-espace moyennable tel qu'il existe une mesure de probabilité μ_Γ sur Γ avec $\mu_\Gamma * \mu_S = \mu_S$ et* $\mathrm{Supp}\, \mu_\Gamma = \Gamma$.

1. Pour toute partie $\theta \subset \Delta_G$, on définit un invariant cohomologique

$$[\mathrm{vol}_\theta(\cdot, S)] : \mathcal{X}_{\geq\theta}(\Gamma, G) \longrightarrow H^{|\theta|}(\Gamma, L^\infty(S, \mu_S))$$

appelé (θ, S)-volume (c.f. section 5.2.4).

2. Pour toute racine θ de Δ_G (i.e. une partie de cardinal $|\theta| = 1$) et toute représentation $\rho \in \mathcal{X}_{\geq\theta}(\Gamma, G)$, le (θ, S)-volume $[\overline{\mathrm{vol}_\theta}(\rho, S)]$ est non-nul dans $H^1(\Gamma, L^\infty(S, \mu_S)/\mathbb{C})$ (où $[\overline{\mathrm{vol}_\theta}(\cdot, S)]$ désigne l'image de $[\mathrm{vol}_\theta(\cdot, S)]$ via l'application naturelle $H^1(\Gamma, L^\infty(S, \mu_S)) \longrightarrow H^{|\theta|}(\Gamma, L^\infty(S, \mu_S)/\mathbb{C})$).

Une classe naturelle d'espaces vérifiant les hypothèses du théorème est fournie par les frontières de Poisson de Γ (c.f. [9], [10]), auquel cas on n'indique pas l'indice S. D'où le

Corollaire 1. *Soit Γ, F et $\mathbf{G}$ comme précédemment. Soit μ_Γ une mesure de probabilité sur Γ de support Γ et $(\partial\Gamma, \mu_{\partial\Gamma})$ la frontière de Poisson de (Γ, μ_Γ). Pour toute racine $\theta \in \Delta_G$, pour toute représentation $\rho \in \mathcal{X}_{\geq\theta}(\Gamma, G)$, le $(\theta, \partial\Gamma)$-volume $[\overline{\mathrm{vol}_\theta}(\rho)]$ est non-nul dans $H^1(\Gamma, L^\infty(\partial\Gamma, \mu_{\partial\Gamma})/\mathbb{C})$.*

La représentation $L^\infty(\partial\Gamma, \mu_{\partial\Gamma})/\mathbb{C}$ acquiert ainsi un caractère universel du point de vue de l'étude des variétés de représentations de dimension finie de Γ.

Remarque :
Pour les parties θ de Δ_G de cardinal $|\theta| \geq 2$, le recours à la théorie des frontières moyennables fait perdre beaucoup d'information cohomologique, c.f. appendice B. C'est par ailleurs une question ouverte de comprendre l'information contenue dans les classes $\rho^*[\mathrm{vol}_\theta]$ pour $|\theta| \geq 2$.

1.2.5. Dans une dernière partie, nous appliquons ces résultats à la théorie de la rigidité dans le cas où Γ est un réseau cocompact d'un groupe de Lie réel presque-simple non-compact H. D'après le théorème de superrigidité de Margulis déjà mentionné (et son extension à $Sp(n, 1)$ et F_4 par Corlette ([7]) et Gromov-Schoen ([11])), les seuls cas à considérer sont $H = SO(n, 1)$ ou $H = SU(n, 1)$, $n \geq 1$. Nous utilisons les propriétés cohomologiques de H pour construire à partir des invariants $[\mathrm{vol}_\theta(\rho)]$, θ racine de Δ_G, construits à la section précédente, des invariants cohomologiques plus simples, en fait numériques, que nous réinterprétons en terme de cohomologie de de Rham du quotient compact $\Gamma\backslash X_H$.

Théorème 4. *Soit Γ un réseau cocompact de $H = SO(n, 1)$ ou $H = SU(n, 1)$, $n \geq 1$. Soit F un corps local de caractéristique zéro, $\mathbf{G}$ un F-groupe F-presque-simple de F-rang ≥ 1, et θ une racine de Δ_G. A toute représentation $\rho \in \mathcal{X}_{\geq\theta}(\Gamma, G)$ on attache naturellement un invariant cohomologique $[\kappa_\theta(\rho)] \in H^{n_H}(\Gamma, \mathbb{C}) \simeq \mathbb{C}$, où n_H désigne la dimension de l'espace symétrique associé à H ($n_H = n$ si $H = SO(n, 1)$, $n_H = 2n$ si $H = SU(n, 1)$). L'invariant $[\kappa_\theta]$ est non-trivial.*

Par la non-trivialité de $[\kappa_\theta]$ nous entendons qu'il existe un groupe $\mathbf{G}$, une racine $\theta \in \Delta_G$ et une représentation $\rho : \Gamma \longrightarrow G$ vérifiant les conditions du théorème et tels que $[\kappa_\theta(\rho)] \neq 0$. Il suffit de considérer $G = H$ et $i : \Gamma \longrightarrow H$ l'injection canonique du réseau cocompact Γ de H. Dans ce cas $[\kappa_{\Delta_H}(i)] = 1$.

Le cas des réseaux cocompacts de $SO(n, 1)$ fournit un exemple très intéressant. Dans [12], Johnson et Millson montrent que l'espace $\mathcal{X}(\Gamma, SO(n+1, 1))$ est non-trivial. Les déformations $\rho : \Gamma \longrightarrow SO(n+1, 1)$ quasi-fuchsiennes non-fuchsiennes dans $SO(n+1, 1)$ de l'injection canonique $i : \Gamma \longrightarrow SO(n, 1) \subset SO(n+1, 1)$ sont automatiquement d'image Zariski-dense dans $SO(n+1, 1)$. Elles forment un ouvert de $\mathcal{X}(\Gamma, SO(n+1, 1))$. Un raisonnement par continuité montre que pour de telles déformations notre invariant $[\kappa_{\Delta_{SO(n+1,1)}}(\rho)]$ est non-trivial.

L'invariant $[\kappa_\theta]$ reste mystérieux. Son étude et des exemples seront développés ailleurs. Au vu du théorème 3, je conjecture que pour tout $\theta \in \Delta_G$ avec $|\theta| = 1$ et toute représentation $\rho \in \mathcal{X}_{\geq\theta}(\Gamma, G)$ l'invariant $[\kappa_\theta](\rho)$ est non-nul.

Soulignons ici que pour toute racine $\theta \in \Delta_G$, les invariants $[\kappa_\theta] : \mathcal{X}_{\geq\theta}(\Gamma, G) \longrightarrow H^l(\Gamma, \mathbb{C})$ du théorème précédent construits pour Γ un réseau cocompact de $H = SO(n, 1)$ ou $H = SU(n, 1)$ sont des cas particuliers d'invariants

$$[\kappa_\theta] : \mathcal{X}_{\geq\theta}(\Gamma, G) \longrightarrow H^{n_H - r_H + 1}(\Gamma, \mathbb{C}) \quad ,$$

construits pour un réseau Γ d'un groupe de Lie réel presque-simple non-compact H de rang r_H, où n_H désigne la dimension de l'espace symétrique associé à H. C'est une conséquence des théorèmes de superrigidité précités que pour H différent de $SO(n,1)$ et $SU(n,1)$ l'espace $\mathcal{X}_{\geq\theta}(\Gamma, G)$ est essentiellement trivial (vide si $G \neq H$). Je ne sais pas si on peut utiliser les invariants $[\kappa_\theta]$ pour redémontrer ces résultats de superrigidité (au moins dans le cas cocompact).

Le papier est écrit comme suit : la section 2 est constituée de rappels fixant les notations. A la section 3 nous construisons les cocycles $\mathrm{vol}_{\theta,X}$ et montrons le théorème 1. A la section 4 nous démontrons le théorème 2. A la section 5 nous démontrons le théorème 3. A la section 6 nous démontrons le théorème 4.

2. Préliminaires

2.1. **Groupes algébriques.** Soit F un corps local de caractéristique zéro de valeur absolue $|\cdot|$. Lorsque $F = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, on note $F^0 =]0, \infty[$ et $F^+ = [1, \infty[$. Lorque F est non-archimédien on fixe ϖ une uniformisante de F et on pose $F^0 = \{\varpi^n,\, n \in \mathbb{Z}\}$ et $F^+ = \{\varpi^n,\, n \geq 0\}$. Soit $\mathbf{G}$ un F-groupe F-presque-simple de F-rang $r > 0$. Pour tout groupe algébrique $\mathbf{H}$ on notera H le groupe $\mathbf{H}(F)$ de ses F-points muni de la topologie induite de celle de F. Fixons $\mathbf{A}$ un F-tore F-déployé maximal de $\mathbf{G}$, soit $X^*(\mathbf{A}, F) = \mathrm{Hom}_F(\mathbf{A}, \mathbf{G}_m)$ (resp. $X_*(\mathbf{A}, F) = \mathrm{Hom}_F(\mathbf{G}_m, \mathbf{A})$) le groupe des F-caractères (resp. des F-cocaractères) de $\mathbf{A}$ (ce sont des $\mathbb{Z}$-modules de rang r), E le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $X_*(\mathbf{A}, F) \otimes \mathbb{R}$. On note $\Phi = \Phi(\mathbf{G}, \mathbf{A}) \subset X^*(\mathbf{A}, F)$ le système de racines de $\mathbf{G}$ relativement à $\mathbf{A}$: ce sont les poids non triviaux de $\mathbf{A}$ dans la représentation adjointe du groupe $\mathbf{G}$. Notons $\mathbf{N}$ (resp. $\mathbf{Z}$) le normalisateur (resp. centralisateur) de $\mathbf{A}$ dans $\mathbf{G}$, W le groupe de Weyl fini du système de racines Φ, $\Phi_{\mathrm{aff}} = \Phi_{\mathrm{aff}}(\mathbf{G}, \mathbf{A}, F)$ le système de racines affines de G, W_{aff} le groupe de Weyl affine du système de racines affines W_{aff}.

Choisissons un système de racines positives $\Phi^+ \subset \Phi$ et notons $\Delta_G = \{\alpha_1, \cdots, \alpha_r\}$ l'ensemble des racines simples associées. Reprenons les notations de [1, 3.3]. On pose $A^0 = \{a \in A \,/\, \forall \chi \in X^*(\mathbf{A}, F),\, \chi(a) \in F^0\}$ et $A^+ = \{a \in A^0 \,/\, \forall \chi \in \Phi^+,\, \chi(a) \in F^+\}$. La partie A^+ s'appelle la chambre de Weyl positive de A. Pour toute partie θ de Δ_G, on note :
- θ^c le complémentaire de θ dans Δ_G et $<\theta>$ l'ensemble des éléments de Φ^+ combinaisons linéaires d'éléments de θ,
- $\mathfrak{u}_\theta$ l'algèbre de Lie somme des espaces radiciels $\mathfrak{g}_\chi$ associés aux racines $\alpha \in \Phi^+ - <\theta^c>$,
- $\mathbf{U}_\theta$ l'unique F-sous-groupe unipotent normalisé par $\mathbf{A}$ d'algèbre de Lie $\mathfrak{u}_\theta$,
- $\mathbf{A}_\theta$ la composante Zariski-connexe de $(\bigcap_{\alpha \in \theta^c} \ker \alpha)$,
- $\mathbf{L}_\theta$ le centralisateur dans $\mathbf{G}$ de $\mathbf{A}_\theta$,
- $\mathbf{P}_\theta = \mathbf{L}_\theta \mathbf{U}_\theta$ le F-sous-groupe parabolique standard associé à θ.

On a $P_\emptyset = G$ et $P_{\Delta_G} = P$ le sous-groupe parabolique minimal standard de G. Le rang parabolique de $\mathbf{P}_\theta$ est alors égal à $|\theta|$. Un sous-groupe parabolique Q conjugué à P_θ est appelé sous-groupe parabolique de G de type θ. On note Y_θ l'ensemble des sous-groupes paraboliques de type θ de G : c'est une variété analytique sur F compacte qui s'identifie à G/P_θ, et qu'on appelle variété drapeau de type θ. Pour θ et θ' deux parties de Δ_G avec $\theta \subset \theta'$ on note $\pi_{\theta'\theta} : Y_{\theta'} \longrightarrow Y_\theta$ la projection naturelle.

2.2. Espaces géométriques associés à G.

2.2.1. *Immeubles.* Dans ce paragraphe, F est non-archimédien. Notons $\mathcal{A}_0 = \mathcal{A}(\mathbf{G}, \mathbf{A}, F)$ l'appartement associé à $\mathbf{A}$, c'est un $\mathbb{R}$-espace affine modelé sur E. On notera alors $X = X(\mathbf{G}, F)$ l'immeuble de Bruhat-Tits du F-groupe G et ∂X l'immeuble sphérique des sous-groupes paraboliques de G bord à l'infini de X. L'ensemble des facettes de type θ de ∂X s'identifie à Y_θ. Concernant la théorie des immeubles on renvoie le lecteur à [19] et [5] pour la théorie des immeubles associés aux groupes algébriques sur un corps valué, à [17] et [4] pour l'aspect combinatoire de la théorie, enfin à [13] pour l'approche géométrique. On fixe y un sommet spécial de $\mathcal{A}_0$.

2.2.2. *Espaces symétriques.* Si F est archimédien, on se ramène à $F = \mathbb{R}$ par restriction des scalaires. On notera alors X l'espace symétrique à courbure négative associé à G et $\mathcal{A}_0$ l'appartement (i.e. le sous-espace plat maximal) de X associé à $\mathbf{A}$. On fixe y un point base de X.

Pour F archimédien ou non, on notera $\mathcal{A}_{\theta,0}$ le sous-espace plat de $\mathcal{A}_0$ passant par y support de la facette de Weyl de type θ, $\theta \subset \Delta_G$. On munit les $\mathcal{A}_{\theta,0}$ d'orientations, données par un ordre fixé sur Δ_G. On notera K le sous-groupe compact maximal de G fixateur de y et pour toute partie θ de Δ_G, on notera ν_θ l'unique mesure de probabilité K-invariante sur Y_θ.

2.3. Cohomologie continue. Etant donné un groupe H localement compact dénombrable à l'infini, on utilisera la cohomologie continue de H pour deux types différents de coefficients.

D'une part un H-module topologique V désignera un $\mathbb{C}$-espace vectoriel topologique séparé de Fréchet, muni d'une H-action $H \times V \longrightarrow V$ continue. Notons $\mathcal{C}_H$ la catégorie des H-modules topologique avec morphismes continus et $\mathcal{C}_{H,s}$ la catégorie des H-modules topologiques avec s-morphismes (c.f. [2, IX, 1.5]). On définit $H^q(H, V)$ le q-ème foncteur dérivé dans $\mathcal{C}_{H,s}$ du foncteur des invariants $V \longrightarrow V^H$.

Soit $C(H^{q+1}, V)$ le $\mathbb{C}$-espace vectoriel des applications continues de H^{q+1} dans V (muni de la topologie compacte-ouverte qui en fait un Fréchet). On notera $C^q(H, V)$ le H-module topologique $C(H^{q+1}, V)$, où la H-action à gauche est définie par

$$\forall\, (g, g_0, \ldots, g_q) \in H^{q+2}, \;\; (g.f)(g_0, \ldots, g_q) = g(f(g^{-1}g_0, \ldots, g^{-1}g_q)) \;\; .$$

On appelle *résolution homogène standard* de V le complexe

$$0 \longrightarrow V \xrightarrow{\varepsilon} C^0(H, V) \xrightarrow{d_0} C^1(H, V) \xrightarrow{d_1} \cdots \xrightarrow{d_{q-1}} C^q(H, V) \xrightarrow{d_q} \cdots$$

où la différentielle d_q est définie par

$$\forall\, \underline{x} = (x_0, \ldots, x_q) \in H^{q+1}, \;\; d_q f(x_0, \ldots, x_{q+1}) = \sum_i (-1)^i f(x_0, \ldots, \hat{x_i}, \ldots, x_{q+1}) \;\; ,$$

et $\varepsilon : V \longrightarrow C^0(H, V)$ est le morphisme d'augmentation qui à $v \in V$ associe la fonction constante v sur H. C'est une résolution injective de V dans la catégorie $\mathcal{C}_{H,s}$, en particulier on a (c.f. [2, IX, 1.6]) :

$$H^q(H, V) = H^q(C^*(H, V)^H) \;\; .$$

D'autre part on s'intéressera au cas où V désigne un H-module de Banach, c'est-à-dire un espace de Banach munie d'une H-action isométrique *non-nécessairement continue* (ainsi l'espace $L^\infty(H)$ des classes de fonctions essentiellement bornée sur H pour la mesure de Haar de H est un H-module de Banach, qui n'est continu que si H est discret). L'égalité précédente définit alors la cohomologie continue $H^q(H,V)$.

Dorénavant on parlera de H-module sans plus de précision.

Nous utiliserons aussi la *résolution inhomogène standard* du H-module V. L'application naturelle de $C^q(H,V)^H$ dans $F^{q-1}(H,V) = C^{q-1}(H,V)$ qui à $f \in C^q(H,V)^H$ associe $f' \in F^{q-1}(H,V)$ définie par

$$f'(x_1,\dots x_q) = f(1,x_1,x_1x_2,\dots,x_1\cdots x_q)$$

induit un isomorphisme de $H^q(H,V)$ avec la cohomologie du complexe

$$0 \longrightarrow V \xrightarrow{d'_0} F^0(H,V) \xrightarrow{d'_1} F^1(H,V) \xrightarrow{d'_2} \dots \xrightarrow{d'_q} F^q(H,V) \xrightarrow{d'_{q+1}} \cdots$$

avec pour tout $\underline{x} = (x_0,\dots,x_q) \in H^{q+1}$,

$$d'_{q+1}f(x_0,\dots,x_q) = x_0.f(x_1,\dots,x_q) + \sum_{0\leq i<q} (-1)^{i+1} f(x_0,\dots,x_ix_{i+1},\dots,x_q) + (-1)^{q+1} f(x_0,\dots,x_{q-1}) \ .$$

2.4. **Représentations cohomologiques d'un groupe p-adique.** Dans cette section le corps F est non-archimédien. Soit (π,V) une représentation (non nécessairement continue) de G sur un $\mathbb{C}$-espace vectoriel V (sans topologie). Un vecteur $v \in V$ est dit lisse si son stabilisateur dans G est ouvert. On note V^∞ le G-module des vecteurs lisses de V (la structure d'espace vectoriel topologique de l'espace de ces vecteurs lisses est celle de limite inductive des V^K, K sous-groupe compact ouvert de G, chacun des V^K étant muni de sa topologie induite de V). Le module (π,V) est dit lisse si $V = V^\infty$, admissible si de plus le sous-espace des L-invariants V^L est de dimension finie pour tout sous-groupe compact ouvert L de G. On notera $C^\infty_{G,\mathrm{top}}$ la catégorie des G-modules lisses topologiques (notée C^∞_G dans [2, X,1.3]) et $V \longrightarrow V^\infty$ le foncteur naturel de $\mathcal{C}_G$ dans $C^\infty_{G,\mathrm{top}}$. Pour tout $(\pi,V) \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C}_G)$, on a l'égalité (c.f. [2, X,1.6]) :

$$H^*(G,V) = H^*(G,V^\infty) \ .$$

Soit $\mathbf{Q}$ un F-sous-groupe parabolique de $\mathbf{G}$ et $(\pi,U) \in \mathrm{Obj}(C^\infty_{Q,\mathrm{top}})$. On note $I^G_Q(U) \in \mathrm{Obj}(C^\infty_{G,\mathrm{top}})$ le G-module induit lisse (non-normalisé) défini par :

$$I^G_Q(U) = \mathrm{Ind}^G_Q(U)^\infty = \{f \in C^\infty(G,U),\ \ \forall g \in G,\ \forall h \in H,\ \ f(gh) = \pi(h)^{-1}f(g)\} \ .$$

L'action à gauche de G sur $I^G_Q(U)$ est donnée par :

$$(gf)(x) = f(g^{-1}x)$$

Si de plus le Q-module (π,U) est admissible, alors le G-module $I^G_Q(U)$ est admissible (c.f. [2, X, 1.8]).

Le G-module $I^G_Q(1)$ s'identifie à la représentation régulière $C^\infty(G/Q)$. Si $\mathbf{Q}$ et $\mathbf{Q'}$ sont deux F-sous-groupes paraboliques de $\mathbf{G}$ avec $\mathbf{Q} \subset \mathbf{Q'}$, on notera $\pi^*_{QQ'} : I^G_{Q'}(1) \longrightarrow I^G_Q(1)$ l'injection de G-modules déduite de la projection $\pi_{QQ'} : Y_Q \longrightarrow Y_{Q'}$. On notera U_Q le G-sous-module de $I^G_Q(1)$

engendré par les $\pi_{Q'Q}(I_{Q'}^G(1))$, $\mathbf{Q} \subset \mathbf{Q}'$, et V_Q le quotient $I_Q^G(1)/U_Q$. En particulier V_G est le module trivial 1 et V_P est le module de Steinberg $\mathbf{St}$.

Soit $\mathbf{P}_\theta$ le F-parabolique standard associé à une partie $\theta \subset \Delta_G$. Notons $I_\theta = I_{P_\theta}^G(1)$, $U_\theta = U_{P_\theta}$, $V_\theta = V_{P_\theta}$, $\pi_{\theta'\theta} = \pi_{P_{\theta'}P_\theta}$.

Le théorème suivant décrit les résultats qui nous serons utiles concernant les représentations cohomologiques de G (c.f. [2, X,4]).

Théorème 5 (Casselman). *1. Pour toute partie $\theta \subset \Delta_G$, le G-module V_θ est irréductible. Il est unitarisable si et seulement si $\theta = \emptyset$ (i.e. $V_\theta = 1$) ou $\theta = \Delta_G$ (i.e. $V_\theta = \mathbf{St}$).*
2. Soit V une représentation irréductible admissible de G telle que $H^*(G, V) \neq 0$ (on dira d'une telle représentation qu'elle est cohomologique). Alors il existe un unique sous-ensemble $\theta \subset \Delta_G$ tel que V est isomorphe au G-module V_θ.
3. La dimension du $\mathbb{C}$-espace vectoriel $H^q(G, V_\theta)$ est 1 si $q = |\theta|$, et 0 sinon.
4. Pour toute partie $\theta \subset \Delta_G$, le morphisme naturel $H^{|\theta|}(G, I_\theta) \longrightarrow H^{|\theta|}(G, V_\theta)$ est un isomorphisme.

Remarque : pour nos applications, dans le cas où la topologie sur le groupe Γ est discrète il n'y a pas lieu de s'embarrasser de considérations topologiques pour la cohomologie des groupes p-adiques. Notons ainsi $C^\infty_{G,\,\mathrm{alg}}$ la catégorie des G-modules algébriques (i.e. sans topologie) lisses. Elle équivaut à la catégorie des $\mathcal{H}(G)$-modules, où $\mathcal{H}(G) = C_c^\infty(G)$ désigne l'algèbre de Hecke de G. Cette catégorie a suffisamment d'injectifs et on peut définir une cohomologie $H^*_{\mathrm{alg}}(G, V)$ d'un objet $V \in \mathrm{Obj}C^\infty_{G,\,\mathrm{alg}}$ en prenant les foncteurs dérivés du foncteur des G-invariants dans cette catégorie. Le théorème précédent est alors encore valable en remplaçant H^* par H^*_{alg} (c.f. [6]).

2.5. Dans le cas où $F = \mathbb{R}$, les représentations I_θ et V_θ sont encore bien définies, mais V_θ n'est plus nécessairement irréductible. Le groupe G admet de nombreuses autres représentations cohomologiques, qui ne nous concerneront pas ici.

3. Cocycles des représentations cohomologiques de G

3.1. **Le cas p-adique.** Dans cette partie le corps local F est non-archimédien. Nous relions la cohomologie du groupe G a sa géométrie en construisant des cocycles naturels pour toutes les classes de cohomologie de G à valeur dans ses représentations cohomologiques irréductibles. Cette construction utilise les propriétés géométriques de l'immeuble de Bruhat-Tits X de G.

3.1.1. *Construction des cocycles.* Dans cette section, on entendra par sous-espace plat de X un sous-espace affine d'un appartement de X de direction le support d'une facette de Weyl de X. De tels sous-espaces sont naturellement munis d'une métrique euclidienne. Etant donnés deux sous-espaces plats $\mathcal{A}_1$ et $\mathcal{A}_2$ de X vérifiant $\mathcal{A}_1 \subset \mathcal{A}_2$, leurs métriques euclidiennes sont compatibles et on notera $p_{\mathcal{A}_2,\mathcal{A}_1}$ la projection orthogonale de $\mathcal{A}_2$ sur $\mathcal{A}_1$. Rappelons alors ([5, prop.7.4.25], [4, p.170-171], [17, p.121]) la

Définition 1. Etant donné un appartement $\mathcal{A}$ de l'immeuble X et un point $s \in Y_{\Delta_G}$ tel que s appartient au bord $\partial\mathcal{A}$ de A, on note $r_{s,\mathcal{A}} : X \longrightarrow \mathcal{A}$ la rétraction sur $\mathcal{A}$ de centre à l'infini s.

Lemme 1. *Soient $\mathcal{A}_i$, $i = 1, 2$, deux appartements de X et $s \in Y_{\Delta_G}$ une chambre à l'infini dans l'intersection $\partial\mathcal{A}_1 \cap \partial\mathcal{A}_2$. Alors $r_{s,\mathcal{A}_2} = r_{s,\mathcal{A}_2} \circ r_{s,\mathcal{A}_1}$.*

Preuve :
Notons N_s le radical unipotent du parabolique minimal de G stabilisateur de s. Soit $\mathcal{A}$ un appartement de X tel que $s \in \partial A$. Pour tout point x de X le point $r_{s,\mathcal{A}}(x)$ de $\mathcal{A}$ n'est autre que l'unique point d'intersection de $\mathcal{A}$ avec l'orbite $N_s.x$. L'égalité du lemme s'en déduit aussitôt. $\square$

Corollaire 2. *Les applications $r_{s,\mathcal{A}_2}|\mathcal{A}_1 : \mathcal{A}_1 \longrightarrow \mathcal{A}_2$ et $r_{s,\mathcal{A}_1}|\mathcal{A}_2 : \mathcal{A}_2 \longrightarrow \mathcal{A}_1$ sont des isométries inverses l'une de l'autre.*

Preuve :
Comme $r_{s,\mathcal{A}_1} = r_{s,\mathcal{A}_1} \circ r_{s,\mathcal{A}_2}$, on a l'égalité $r_{s,\mathcal{A}_2} \circ r_{s,\mathcal{A}_1} = r_{s,\mathcal{A}_2} \circ r_{s,\mathcal{A}_1} \circ r_{s,\mathcal{A}_2}$. Comme $r_{s,\mathcal{A}_2} \circ r_{s,\mathcal{A}_1} = r_{s,\mathcal{A}_2}$, on en déduit :

$$r_{s,\mathcal{A}_2} \circ r_{s,\mathcal{A}_1} \circ r_{s,\mathcal{A}_2} = r_{s,\mathcal{A}_2} \quad .$$

De cette égalité en restriction à $\mathcal{A}_2$ et comme $r_{s,\mathcal{A}_2}|\mathcal{A}_2 = 1$, on obtient :

$$r_{s,\mathcal{A}_2}|\mathcal{A}_1 \circ r_{s,\mathcal{A}_1}|\mathcal{A}_2 = 1 \quad .$$

D'où le résultat. On peut aussi remarquer que $r_{s,\mathcal{A}_2}|\mathcal{A}_1$ n'est autre que la restriction à $\mathcal{A}_1$ de l'action sur X de l'unique élément g de N_s envoyant $\mathcal{A}_1$ sur $\mathcal{A}_2$. Son inverse n'est autre que l'action de g^{-1} sur $\mathcal{A}_2$, c'est-à-dire $r_{s,\mathcal{A}_1}|\mathcal{A}_2$. $\square$

Définition 2. Soit θ une partie fixée de Δ_G et s_θ un point de la variété de drapeaux Y_θ.
1. Un sous-espace plat $\mathcal{A}_\theta$ de X est dit s_θ-admissible s'il est de dimension $|\theta|$ et tel que s_θ soit une facette de dimension maximale de $\partial\mathcal{A}_\theta$.
2. Etant donné un sous-espace plat $\mathcal{A}_\theta$ de X, et une chambre à l'infini $s \in Y_{\Delta_G}$, le couple $(\mathcal{A}_\theta, s)$ est dit s_θ-admissible si $\mathcal{A}_\theta$ l'est et si $s \in Y_{\Delta_G}$ a s_θ pour facette de type θ (i.e. $s \in p^{-1}_{\Delta_G\theta}(s_\theta)$).
3. Etant donné un sous-espace plat $\mathcal{A}_\theta$ de X, une chambre à l'infini $s \in Y_{\Delta_G}$, et un appartement $\mathcal{A}$ de X, le triplet $(\mathcal{A}_\theta, s, \mathcal{A})$ est dit s_θ-admissible si le couple $(\mathcal{A}_\theta, s)$ l'est, l'appartement $\mathcal{A}$ contient $\mathcal{A}_\theta$, et s définit une chambre à l'infini de $\partial\mathcal{A}$.

Remarque :
Soit θ une partie de Δ_G. Il résulte des propriétés du bord à l'infini d'un immeuble affine qu'il existe toujours un sous-espace s_θ-admissible $\mathcal{A}_\theta$, qu'étant donné un tel sous-espace il existe toujours $(\mathcal{A}_\theta, s)$ un couple s_θ-admissible, enfin qu'étant donné un tel couple il existe toujours $(\mathcal{A}_\theta, s, \mathcal{A})$ un triplet s_θ-admissible.

Dorénavant on suppose θ et $s_\theta \in Y_\theta$ fixés.

Définition 3. Soit $(\mathcal{A}_\theta, s, \mathcal{A})$ un triplet s_θ-admissible. On définit $r_{(s_\theta,\mathcal{A}_\theta,s,\mathcal{A})} : X \longrightarrow \mathcal{A}_\theta$ comme la composée de la rétraction $r_{s,\mathcal{A}} : X \longrightarrow \mathcal{A}$ avec la projection orthogonale de $\mathcal{A}$ sur $\mathcal{A}_\theta$.

Corollaire 3. *Soit $(\mathcal{A}_\theta, s)$ un couple s_θ-admissible et $(\mathcal{A}_\theta, s, \mathcal{A}_i)$, $i = 1, 2$, deux triplets s_θ-admissibles de base le couple $(\mathcal{A}_\theta, s)$. Alors $p_{\mathcal{A}_2,\mathcal{A}_\theta} \circ r_{s,\mathcal{A}_2}|\mathcal{A}_1 = p_{\mathcal{A}_1,\mathcal{A}_\theta}$.*

Preuve :
Comme $r_{s,\mathcal{A}_i}|\mathcal{A}_j$, $i \neq j$, est l'identité en restriction à $\mathcal{A}_i \cap \mathcal{A}_j$ et comme $\mathcal{A}_\theta \subset \mathcal{A}_i \cap \mathcal{A}_j$, l'application $r_{s,\mathcal{A}_i}|\mathcal{A}_j$ fixe $\mathcal{A}_\theta$. Notons ${\mathcal{A}_\theta}^{\perp,i}$ la direction orthogonale de $\mathcal{A}_\theta$ dans $\mathcal{A}_i$. Comme $r_{s,\mathcal{A}_i}|\mathcal{A}_j : \mathcal{A}_j \longrightarrow \mathcal{A}_i$ est une isométrie d'après le corollaire 2, on en déduit que $r_{s,\mathcal{A}_i}$ envoie isométriquement tout sous-espace affine de $\mathcal{A}_j$ de direction ${\mathcal{A}_\theta}^{\perp,j}$ sur un sous-espace affine de $\mathcal{A}_i$ de direction ${\mathcal{A}_\theta}^{\perp,i}$. Comme $p_{\mathcal{A}_i,\mathcal{A}_\theta}$ est la projection orthogonale de $\mathcal{A}_i$ sur $\mathcal{A}_\theta$, on en déduit l'égalité cherchée. $\square$

Lemme 2. *Soit* $(\mathcal{A}_\theta, s)$ *un couple* s_θ*-admissible et* $(\mathcal{A}_\theta, s, \mathcal{A}_i)$*,* $i = 1, 2$*, deux triplets* s_θ*-admissibles de base le couple* $(\mathcal{A}_\theta, s)$*. Alors* $r_{s_\theta,\mathcal{A}_\theta,s,\mathcal{A}_1} = r_{s_\theta,\mathcal{A}_\theta,s,\mathcal{A}_2}$.

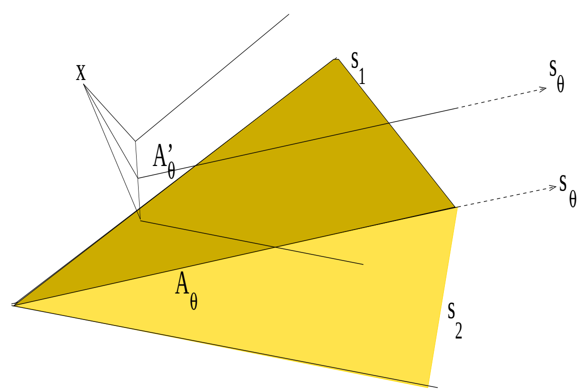
Preuve :
On a la suite d'égalités $r_{s_\theta,\mathcal{A}_\theta,s,\mathcal{A}_2} = p_{\mathcal{A}_2,\mathcal{A}_\theta} \circ r_{s,\mathcal{A}_2} = p_{\mathcal{A}_2,\mathcal{A}_\theta} \circ r_{s,\mathcal{A}_2} \circ r_{s,\mathcal{A}_1} = p_{\mathcal{A}_2,\mathcal{A}_\theta} \circ r_{s,\mathcal{A}_2}|\mathcal{A}_1 \circ r_{s,\mathcal{A}_1} = p_{\mathcal{A}_1,\mathcal{A}_\theta} \circ r_{s,\mathcal{A}_1} = r_{s_\theta,\mathcal{A}_\theta,s,\mathcal{A}_1}$. La deuxième égalité est une conséquence du lemme 1, l'avant-dernière du corollaire 3. □

Corollaire 4. *Soit* $(\mathcal{A}_\theta, s, \mathcal{A})$ *un triplet* s_θ*-admissible. L'application* $r_{s_\theta,\mathcal{A}_\theta,s,\mathcal{A}} : X \longrightarrow \mathcal{A}_\theta$ *ne dépend pas de* $\mathcal{A}$*. Pour tout couple* s_θ*-admissible* $(\mathcal{A}_\theta, s)$ *on notera* $r_{s_\theta,\mathcal{A}_\theta,s} : X \longrightarrow \mathcal{A}_\theta$ *l'application ainsi obtenue.*

Lemme 3. *Soit* $(\mathcal{A}_\theta, s_i)$*,* $i = 1, 2$*, deux couples* s_θ*-admissibles. Soit* $\mathcal{A}$ *un appartement de* X *tel que les deux triplets* $(\mathcal{A}_\theta, s_i, \mathcal{A})$*,* $i = 1, 2$*, sont* s_θ*-admissibles. Alors* $r_{s_\theta,\mathcal{A}_\theta,s_1,\mathcal{A}} = r_{s_\theta,\mathcal{A}_\theta,s_2,\mathcal{A}}$.

Preuve :
Soit x un point de X.
1^er^ cas : il existe un appartement $\mathcal{A}'$ contenant x dont le bord à l'infini contient à la fois s_1 et s_2. Notons $\mathcal{A}'_\theta$ le sous-espace plat de $\mathcal{A}'$ de dimension $|\theta|$ de direction s_θ passant par x. L'intersection $\mathcal{A} \cap A'$ est non-vide et à distance de x suffisamment grande les sous-espaces $\mathcal{A}'_\theta$ et $\mathcal{A}_\theta$ de $\mathcal{A}$ sont parallèles. On a alors $r_{s_1,\mathcal{A}}(x) = r_{s_2,\mathcal{A}}(x)$ et a fortiori $r_{s_\theta,\mathcal{A}_\theta,s_1,\mathcal{A}}(x) = r_{s_\theta,\mathcal{A}_\theta,s_2,\mathcal{A}}(x)$.

FIG. 1 – 1er cas

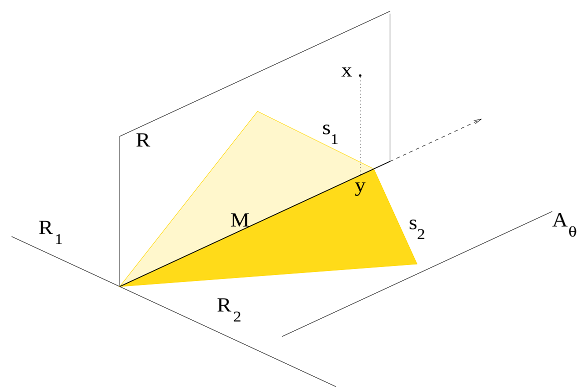


2ème cas : il existe un mur M de $\mathcal{A}$ de bord à l'infini ∂M contenant s_θ divisant $\mathcal{A}$ et deux racines $\mathcal{R}_i$, $i = 1, 2$, de bord à l'infini $\partial\mathcal{R}_i$ contenant s_i, et une racine $\mathcal{R}$ de X de bord M et contenant x. Mais alors $r_{s_1,\mathcal{A}}(x)$ et $r_{s_2,\mathcal{A}}(x)$ sont images l'un de l'autre par la réflexion orthogonale de $\mathcal{A}$ d'axe M. Ils ont donc même projection y sur M. Comme ∂M contient s_θ, les projectés orthogonaux $r_{s_\theta,\mathcal{A}_\theta,s_i,\mathcal{A}}(x)$ de $r_{s_i,\mathcal{A}}(x)$, $i = 1, 2$, sur $\mathcal{A}_\theta$ sont aussi les projetés orthogonaux de y sur $\mathcal{A}_\theta$. Ils sont donc égaux.

□

Corollaire 5. *Soit* $(\mathcal{A}_\theta, s)$ *un couple* s_θ*-admissible. L'application* $r_{s_\theta,\mathcal{A}_\theta,s} : X \longrightarrow \mathcal{A}_\theta$ *ne dépend pas de* s*. Pour tout sous-espace* s_θ*-admissible* $\mathcal{A}_\theta$ *on notera* $r_{s_\theta,\mathcal{A}_\theta} : X \longrightarrow \mathcal{A}_\theta$ *l'application ainsi obtenue.*

FIG. 2 – $2^{\text{ème}}$ cas



Preuve :
Soit $(\mathcal{A}_\theta, s_i)$, $i = 1,2$, deux couples s_θ-admissibles. Il existe un appartement $\mathcal{A}$ tel que les triplets $(\mathcal{A}_\theta, s_i, \mathcal{A})$, $i = 1,2$, sont s_θ-admissibles. Le lemme 3 implique immédiatement l'égalité $r_{s_\theta,\mathcal{A}_\theta,s_1,\mathcal{A}} = r_{s_\theta,\mathcal{A}_\theta,s_2,\mathcal{A}}$. Pour $i = 1,2$, on a d'après le lemme 2 l'égalité $r_{s_\theta,\mathcal{A}_\theta,s_i} = r_{s_\theta,\mathcal{A}_\theta,s_i,\mathcal{A}}$. D'où l'égalité $r_{s_\theta,\mathcal{A}_\theta,s_1} = r_{s_\theta,\mathcal{A}_\theta,s_2}$. □

Finalement on a la

Proposition 1. *Pour tout sous-espace s_θ-admissible $\mathcal{A}_\theta$, on a défini une application*

$$r_{s_\theta,\mathcal{A}_\theta} : X \longrightarrow \mathcal{A}_\theta \quad ,$$

qui généralise au cas $\theta \subset \Delta_G$ quelconque la rétraction classique $r_{s,\mathcal{A}}$ (cas $\theta = \Delta_G$).

Soit $\mathcal{A}_\theta$ un sous-espace s_θ-admissible. Remarquons que la donnée de s_θ oriente canoniquement $\mathcal{A}_\theta$: comme s_θ est une face à l'infini de $\mathcal{A}_\theta$, il existe à translation près une unique isométrie $f : \mathcal{A}_{\theta,0} \longrightarrow \mathcal{A}_\theta$ préservant les types. L'orientation de $\mathcal{A}_{\theta,0}$ détermine via f une orientation sur $\mathcal{A}_\theta$. Le corollaire 2 se généralise immédiatement au :

Lemme 4. *Soient $\mathcal{A}_{\theta,i}$, $i = 1,2$, deux sous-espaces s_θ-admissibles. Alors les applications $r_{s_\theta,\mathcal{A}_{\theta,1}}|_{\mathcal{A}_{\theta,2}} : \mathcal{A}_{\theta,2} \longrightarrow \mathcal{A}_{\theta,1}$ et $r_{s_\theta,\mathcal{A}_{\theta,2}}|_{\mathcal{A}_{\theta,1}} : \mathcal{A}_{\theta,1} \longrightarrow \mathcal{A}_{\theta,2}$ sont des isométries orientées, inverses l'une de l'autre.*

Définition 4. Pour tout sous-espace s_θ-admissible $\mathcal{A}_\theta$, on note $\mathrm{vol}_{\mathcal{A}_\theta}$ sa forme volume canonique.

Corollaire 6. *Pour tout $(|\theta|+1)$-uplet $(x_0, \ldots, x_{|\theta|})$ de points de X, le volume*

$$\mathrm{vol}_{\mathcal{A}_\theta}(r_{s_\theta,\mathcal{A}_\theta}(x_0), \ldots, r_{s_\theta,\mathcal{A}_\theta}(x_{|\theta|}))$$

est indépendant du choix du sous-espace s_θ-admissible $\mathcal{A}_\theta$.

Définition 5. On définit la fonction $\mathrm{vol}_{\theta,X} : X^{|\theta|+1} \longrightarrow I_\theta$ par :

$$\forall \underline{x} = (x_0, \ldots, x_{|\theta|}) \in X^{|\theta|+1}, \forall s_\theta \in Y_\theta, \quad \mathrm{vol}_{\theta,X}(\underline{x})(s_\theta) = \mathrm{vol}_{\mathcal{A}_\theta}(r_{s_\theta,\mathcal{A}_\theta}(\underline{x})) \quad .$$

Remarque : La fonction $\mathrm{vol}_{\theta,X}$ est bien-sûr continue.

Définition 6. Soit θ une partie de Δ_G. On définit $\mathrm{vol}_\theta \in C^{|\theta|}(G, I_\theta)$ par :

$$\forall \underline{g} = (g_0, \ldots, g_{|\theta|}) \in G^{|\theta|+1}, \mathrm{vol}_\theta(\underline{g}) = \mathrm{vol}_{\theta,X}(\underline{g}.y) \quad .$$

On notera $\overline{\mathrm{vol}_\theta} \in C^{|\theta|}(G, V_\theta)$ l'image de vol_θ par l'application quotient naturelle $I_\theta \longrightarrow V_\theta$.

3.1.2. *Preuve du théorème 1 dans le cas p-adique.* Au vu du théorème 5, il suffit de démontrer le théorème pour vol_θ. Commençons par montrer que vol_θ est un cocycle G-invariant. Remarquons que l'application $\mathrm{ev}_y : G \longrightarrow X$ qui à g associe le point $g.y$ induit un G-morphisme de complexes $C^*(X, I_\theta) \longrightarrow C^*(G, I_\theta)$, qui envoie naturellement $\mathrm{vol}_{\theta,X}$ sur vol_θ. Il suffit donc de montrer que $\mathrm{vol}_{\theta,X} \in C^{|\theta|}(X, I_\theta)$ est un cocycle G-invariant. Comme la fonction volume d'un $(n+1)$-uplet de points dans un n-espace euclidien est un cocycle, on déduit immédiatement de la construction de $\mathrm{vol}_{\theta,X}$ que c'est un cocycle de $C^{|\theta|}(X, I_\theta)$. Montrons alors la G-invariance de $\mathrm{vol}_{\theta,X}$. Remarquons d'abord que pour toute chambre a l'infini s d'un appartement $\mathcal{A}$, et pour tout élément de G, on a l'égalité de rétractions $r_{gs,g\mathcal{A}} = g \circ r_{s,\mathcal{A}} \circ g^{-1}$. On en déduit :

$$\forall x \in X,\ \ r_{gs_\theta, g\mathcal{A}_\theta}(g.x) = r_{gs_\theta, g\mathcal{A}_\theta, gs, g\mathcal{A}}(g.x) = g(r_{s_\theta, \mathcal{A}_\theta}(x)) \ \ ,$$

puis

$$\forall \underline{x} \in X^{(|\theta|+1)},\ \ \mathrm{vol}_{g\mathcal{A}_\theta}(r_{gs_\theta, g\mathcal{A}_\theta}(g.\underline{x}) = \mathrm{vol}_{g\mathcal{A}_\theta}(g(r_{s_\theta, \mathcal{A}_\theta}(\underline{x})) = \mathrm{vol}_{\mathcal{A}_\theta}(r_{s_\theta, \mathcal{A}_\theta}(\underline{x})) \ \ ,$$

ce qui achève la preuve de la G-invariance de $\mathrm{vol}_{\theta,X}$.

Reste à montrer que le cocycle vol_θ n'est pas un cobord. Commençons par rappeler le

Lemme 5. *Soit Q un sous-groupe fermé de G et U un Q-module. Alors $C^r(G, I_Q^G U)^G \simeq C^r(G, U)^Q$ via l'application qui à un élément $\tau \in C^r(G, I_Q^G U)^G$ associe l'élément $\lambda \in C^r(G, U)^Q$ défini par $\lambda(\underline{g}) = \tau(\underline{g})(1)$.*

Preuve :
On a une identification canonique de G-modules $C^r(G, I_Q^G(U)) \simeq I_Q^G(C^r(G, U))$ en envoyant un élément $\tau \in C^r(G, I_Q^G U)$ sur l'élément $\kappa \in I_Q^G(C^r(G, U))$ défini par $\kappa(g)(\underline{h}) = \tau(\underline{h})(g)$. Donc :

$$\begin{aligned} C^r(G, I_Q^G U)^G &= \mathrm{Hom}_G(1, C^r(G, I_Q^G(U))) \\ &= \mathrm{Hom}_G(1, I_Q^G(C^r(G, U))) \\ &= \mathrm{Hom}_Q(1, C^r(G, U)) \\ &= C^r(G, U)^Q \ \ , \end{aligned}$$

où l'avant-dernière égalité est l'identité de Frobenius. □

Il existe donc un morphisme de complexes (la compatibilité avec les différentielles est évidente) $C^*(G, I_{P_\theta}^G(1))^G \simeq C^*(G, 1)^{P_\theta} \xrightarrow{\mathrm{res}} C^*(P_\theta, 1)^{P_\theta}$ où res désigne la restriction naturelle des fonctions sur G aux fonctions sur P_θ. Ce morphisme de complexe est image via ev_y d'une flèche naturelle de complexes $C^*(X, I_{P_\theta}^G(1))^G \longrightarrow C^*(X, 1)^{P_\theta}$.

Remarquons que les inclusions $\mathcal{A}_{\theta,0} \subset X$ et $A_\theta \subset P_\theta$ et la stabilité de $\mathcal{A}_{\theta,0}$ sous l'action de A_θ induisent par restriction un morphisme de complexe $C^*(X, 1)^{P_\theta} \longrightarrow C^*(\mathcal{A}_{\theta,0}, 1)^{A_\theta}$. Finalement on obtient le diagramme commutatif suivant :

$$(1) \qquad \begin{array}{ccccc} C^*(X, I_{P_\theta}^G(1))^G & \longrightarrow & C^*(X, 1)^{P_\theta} & \longrightarrow & C^*(\mathcal{A}_{\theta,0}, 1)^{A_\theta} \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ C^*(G, I_{P_\theta}^G(1))^G & \longrightarrow & C^*(P_\theta, 1)^{P_\theta} & \longrightarrow & C^*(A_\theta, 1)^{A_\theta} \end{array}$$

Pour montrer que $\mathrm{vol}_\theta \in C^*(G, I^G_{P_\theta}(1))^G$ n'est pas un cobord, il suffit de montrer que son image dans $C^*(A_\theta, 1)^{A_\theta}$ n'en n'est pas un. Remarquons qu'une préimage de vol_θ dans $C^*(X, I^G_{P_\theta}(1))^G$ n'est autre que $\mathrm{vol}_{\theta,X}$ et que l'image de $\mathrm{vol}_{\theta,X}$ dans $C^*(\mathcal{A}_\theta, 1)^{A_\theta}$ n'est autre que $\mathrm{vol}_{\mathcal{A}_{\theta,0}}$. Mais la flèche verticale $C^*(\mathcal{A}_{\theta,0}, 1)^{A_\theta} \longrightarrow C^*(A_\theta, 1)^{A_\theta}$ induit un isomorphisme en cohomologie (ce sont deux manières de calculer la cohomologie du tore $\mathcal{A}_{\theta,0}/\Lambda$, où Λ désigne le réseau de $\mathcal{A}_{\theta,0}$ tel que $W_{\text{aff}} = W \ltimes \Lambda$). Comme $\mathrm{vol}_{\mathcal{A}_{\theta,0}}$ engendre évidemment $H^{max}(\mathcal{A}_{\theta,0}/\Lambda, \mathbb{C})$, on en déduit que l'image de vol_θ dans $C^*(A_\theta, 1)^{A_\theta}$ est non-triviale en cohomologie. Ce qui achève la preuve du théorème 1. □

Remarques :

0. Rappelons que l'immeuble X est naturellement muni d'une distance $d(.,.)$ qui en fait un espace CAT(0) (c.f. [13], [3]). Notons $\partial_\infty X$ son bord visuel à l'infini, qui s'identifie naturellement à l'immeuble sphérique de G. Comme pour tout espace CAT(0) on dispose d'un cocycle de Busemann $B \in C^1(X, C(\partial_\infty X))$ défini par :

$$B(y_0, y_1)(\xi) = \lim_{z \longrightarrow \xi} d(x,z) - d(y,z) \quad .$$

Pour toute partie θ de Δ_G avec $|\theta| = 1$, on vérifie facilement que le cocycle $\mathrm{vol}_{\theta,X} \in C^1(X, C^\infty(Y_\theta))$ n'est autre que la restriction du cocycle de Busemann B aux points ξ de $Y_\theta \subset \partial_\infty X$.

1. Dans le diagramme 1, la ligne du bas induit en fait un isomorphisme en cohomologie (c.f. [2, X, 4.7]) mais il semble qu'on ne puisse pas éviter le recours à une suite spectrale pour le montrer.

3.2. **Le cas des groupes réels.** Dans cette section le corps F est $\mathbb{R}$. On se ramène du cas complexe à ce cas par restriction des scalaires. Le groupe G a alors de nombreuses représentations cohomologiques, nous nous contentons ici d'étendre les résultats de la section précédente.

Soit θ une partie de Δ_G. La cohomologie $H^{\cdot}(G, I_\theta)$ est plus compliquée que dans le cas non-archimédien. D'après le théorème de Van Est ([2, IX, 5.6]), on a un isomorphisme :

$$H^{\cdot}(G, I_\theta) \simeq H^{\cdot}(\mathfrak{g}, K, I_\theta) \quad .$$

Adoptons les notations de [2, III], notons $P_\theta = {}^0M_\theta A_\theta N_\theta$ une décomposition de Langlands de P_θ. D'après [2, III, theor.3.3] appliqué avec $s = 1$, on obtient :

$$\begin{aligned} \forall q \in \mathbb{N}, \quad H^q(G, I_\theta) &= (H^{\cdot}({}^0\mathfrak{m}_\theta, K_{P_\theta}, \mathbb{C}) \otimes \wedge \mathfrak{a}^*_{\theta,\mathbb{C}})^q \\ &= \oplus_{i+j=q} H^i({}^0\mathfrak{m}_\theta, K_{P_\theta}, \mathbb{C}) \otimes \wedge^j \mathfrak{a}^*_{\theta,\mathbb{C}} \end{aligned}$$

d'après la formule de Künneth. En particulier comme $H^0({}^0\mathfrak{m}_\theta, K_{P_\theta}, \mathbb{C}) \simeq \mathbb{C}$, la cohomologie $H^{|\theta|}(\mathfrak{a}_\theta, \mathbb{C}) \simeq \wedge^{|\theta|}\mathfrak{a}^*_{\theta,\mathbb{C}} \simeq \mathbb{C}$ s'injecte dans $H^{|\theta|}(G, I_\theta)$. Nous allons construire un cocycle $\mathrm{vol}_\theta \in C^{|\theta|}(G, I_\theta)$ dont la classe $[\mathrm{vol}_\theta]$ dans $H^{|\theta|}(G, I_\theta)$ engendre $H^{|\theta|}(\mathfrak{a}_\theta, \mathbb{C})$.

La construction est analogue à celle effectuée à la section précédente dans le cas non-archimédien. Soit s un point de Y_{Δ_G}, P_s le parabolique minimal de G stabilisateur de s et N_s le radical unipotent de P_s. Soit $\mathcal{A}$ un appartement de l'espace symétrique X tel que $s \in \partial\mathcal{A}$ (c'est-à-dire tel que $\mathcal{A}$ est asymptote à s). Pour tout point $x \in X$, l'orbite $N_s.x$ coupe $\mathcal{A}$ en un unique point. L'analogue de la définition 1 est la

Définition 7. Etant donné un appartement $\mathcal{A}$ de l'espace symétrique X et un point $s \in Y_{\Delta_G}$ tel que $s \in \partial\mathcal{A}$, on note $r_{s,\mathcal{A}} : X \longrightarrow \mathcal{A}$ et on appelle rétraction sur $\mathcal{A}$ de centre à l'infini s l'application qui à un point x de X associe le point $N_s.x \cap \mathcal{A}$.

Toutes les définitions et lemmes du paragraphe précédents sont encore valables à partir de cette définition, ainsi que la preuve du théorème 1. Nous obtenons ainsi la

Proposition 2. *Soit* $\mathbf{G}$ *un* $\mathbb{R}$*-groupe* $\mathbb{R}$*-presque-simple de* $\mathbb{R}$*-rang* ≥ 1*. Soit* θ *une partie de* Δ_G*. Alors l'élément* $\mathrm{vol}_\theta \in C^{|\theta|}(G, I_\theta)$ *est un cocycle* G*-invariant pour la résolution homogène standard de* I_θ*. Son image* $[\mathrm{vol}_\theta] \in H^{|\theta|}(G, I_\theta)$ *est non-nulle.*

4. Caractérisation des représentations bornées

Dans cette partie F désigne un corps local de caractéristique zéro.

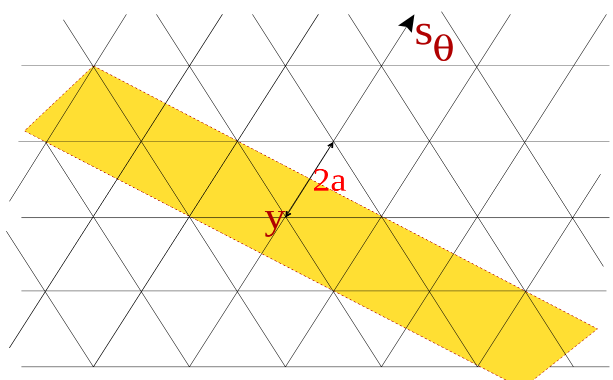
4.1. **Boules simpliciales.** Soit θ une partie de Δ_G avec $|\theta| = 1$. Rappelons que y désigne un sommet spécial de l'immeuble X fixé (cas F non-archimédien), ou un point base de l'espace symétrique X (cas $F = \mathbb{R}$). Soit $\mathcal{A}$ un appartement de X contenant y, soit $s_\theta \in Y_\theta \cap \partial\mathcal{A}$ et a un nombre réel positif.

Définition 8. On pose $\mathrm{Bande}_{\theta,\mathcal{A},s_\theta}(y,a) = \{x \in \mathcal{A},\ |\mathrm{vol}_{\theta,X}(y,x)(s_\theta)| \leq a\}$.

Notons v_{s_θ} le vecteur unité d'origine y de direction s_θ. Si x désigne un point de $\mathcal{A}$ on note $v_{s_\theta}.x$ le produit scalaire euclidien de v_{s_θ} et $\vec{yx}$ dans $\mathcal{A}$. On a encore la définition équivalente suivante :

$$\mathrm{Bande}_{\theta,\mathcal{A},s_\theta}(y,a) = \{x \in \mathcal{A}, |v_{s_\theta}.x| \leq a\} \quad .$$

FIG. 3 – $\mathrm{Bande}_{\theta,\mathcal{A},s_\theta}(y,a)$ pour $\mathbf{G} = SL(3)$

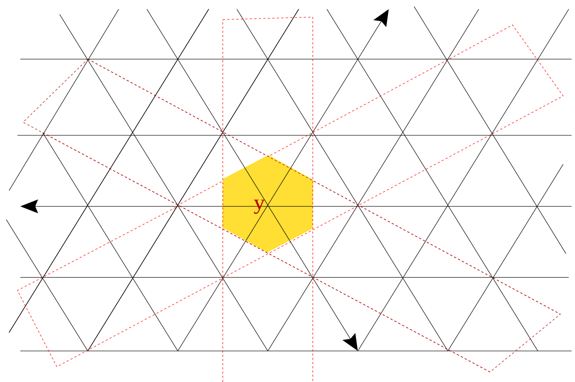


Définition 9. On définit la boule simpliciale de type θ dans l'appartement $\mathcal{A}$ par

$$\mathrm{B}_{\theta,\mathcal{A}}(y,a) = \bigcap_{s_\theta \in Y_\theta \cap \partial\mathcal{A}} \mathrm{Bande}_{\theta,\mathcal{A},s_\theta}(y,a) \quad .$$

Lemme 6. *La boule simpliciale* $\mathrm{B}_{\theta,\mathcal{A}}(y,a)$ *de* $\mathcal{A}$ *est bornée.*

FIG. 4 – $\mathrm{B}_{\theta,\mathcal{A}}(y,a)$ pour $\mathbf{G} = SL(3)$



Preuve :
Il suffit de montrer que les formes linéaires $x \longrightarrow v_{s_\theta}.x$, $s_\theta \in Y_\theta \cap \partial\mathcal{A}$, engendrent l'espace vectoriel dual $\mathcal{A}^*$ (où l'on a fixé le point y comme origine de $\mathcal{A}$). Autrement dit, que les vecteurs v_{s_θ}, $s_\theta \in Y_\theta \cap \partial\mathcal{A}$, engendrent $\mathcal{A}$. Mais l'ensemble de ces vecteurs s'identifient à l'orbite d'un quelconque d'entre eux sous l'action du groupe de Weyl fini W de $\mathcal{A}$. Comme W agit irréductiblement sur E car $\mathbf{G}$ est F-presque-simple, cette orbite engendre $\mathcal{A}$. $\square$

Définition 10. On définit la boule simpliciale de type θ dans l'immeuble X par

$$\mathrm{B}_\theta(y,c) = \bigcup_{\mathcal{A} \text{ appartement de } X} \mathrm{B}_{\theta,\mathcal{A}}(y,c) \quad .$$

Comme les boules $\mathrm{B}_{\theta,\mathcal{A}}(y,a)$ sont évidemment uniformément bornée, on en déduit le

Corollaire 7. *Le boule simpliciale $\mathrm{B}_\theta(y,c)$ de X est bornée.*

4.2. **Preuve du théorème 2.** Notons H l'adhérence (pour la topologie usuelle) du groupe $\rho(\Gamma)$ dans G, H est un sous-groupe fermé de G donc localement compact. Remarquons que pour tout G-module V, le morphisme $\rho^* : H^*(G,V) \longrightarrow H^*(\Gamma, V \circ \rho)$ factorise via $H^*(H,V)$. Si la représentation ρ est d'image bornée, le groupe H est compact. L'implication 1. $\Longrightarrow$ 2. résulte alors de la remarque précédente et de la nullité de la cohomologie continue d'un groupe compact (c.f. [2, IX, 2.7]). Les implications 2. $\Longrightarrow$ 3. et 2. $\Longrightarrow$ 4. sont évidentes. Il suffit donc de montrer 3. $\Longrightarrow$ 1. et 4. $\Longrightarrow$ 1.

Pour 3. $\Longrightarrow$ 1. : soit $\rho : \Gamma \longrightarrow G$ une représentation continue et θ une racine de Δ_G tels que $\rho^*[\mathrm{vol}_\theta] = 0$ dans $H^1(\Gamma, I_\theta \circ \rho)$. Pour simplifier puisque nous sommes en degré 1, travaillons avec la résolution inhomogène standard. Le cocycle de $F^0(\Gamma, I_\theta \circ \rho)$ correspondant au cocycle $\rho^*\mathrm{vol}_\theta \in C^1(\Gamma, I_\theta \circ \rho)^\Gamma$ n'est autre que $\gamma \longrightarrow \mathrm{vol}_{\theta,X}(y, \rho(\gamma)y)$. Dire que $\rho^*[\mathrm{vol}_\theta] = 0$, c'est dire qu'il existe une fonction η de I_θ telle que

$$\forall\, \gamma \in \Gamma,\ \forall\, s_\theta \in Y_\theta,\ \ \mathrm{vol}_{\theta,X}(y,\rho(\gamma)y)(s_\theta) = \eta(\gamma^{-1}s_\theta) - \eta(s_\theta) \quad .$$

Comme la fonction η est localement constante sur Y_θ compact, la fonction η est bornée. Il existe donc une constante $a \in \mathbb{R}^+$ telle que

$$\forall\, \gamma \in \Gamma,\ \forall\, s_\theta \in Y_\theta,\ \ |\mathrm{vol}_{\theta,X}(y,\rho(\gamma)y)(s_\theta)| \le a \quad . \tag{2}$$

Pour tout élément $\gamma \in \Gamma$, il existe un appartement $\mathcal{A}_\gamma$ de X contenant les points y et $\rho(\gamma)y$. On déduit de l'inégalité 2

$$\forall \gamma \in \Gamma, \quad \rho(\gamma)y \in \ \mathrm{B}_{\theta,\mathcal{A}_\gamma}(y,a) \quad .$$

Donc : $\rho(\Gamma).y \subset \ \mathrm{B}_\theta(y,a)$. D'après le lemme 7 l'ensemble $\mathrm{B}_\theta(y,c)$ est borné, donc l'orbite $\rho(\Gamma).y$ est bornée. D'après [3, II.2.8] (le lemme original dans le cas p-adique est [5, prop.3.2.4]), $\rho(\Gamma)$ est borné dans G.

Pour 4. $\Longrightarrow$ 1. : montrons la contraposée. Soit donc $\rho : \Gamma \longrightarrow G$ une représentation continue non-bornée. D'après la preuve de l'implication précédente, il existe une racine $\theta \in \Delta_G$, une suite (γ_n) de Γ et une suite $(s_{\theta n})$ de Y_θ tels que $\lim_{n\to+\infty} |\mathrm{vol}_{\theta,X}(y,\rho(\gamma_n)y)(s_{\theta n})| = +\infty$. Quitte à remplacer γ_n par γ_n^{-1} et $s_{\theta n}$ par $\gamma_n^{-1}s_{\theta n}$, on peut supposer que $\lim_{n\to+\infty} \mathrm{vol}_{\theta,X}(y,\rho(\gamma_n)y)(s_{\theta n}) = +\infty$.

Supposons par l'absurde que $\rho^*[\overline{\mathrm{vol}_\theta}] = 0$ dans $H^1(\Gamma, V_\theta \circ \rho)$. D'après la suite exacte longue de cohomologie

$$\cdots \longrightarrow H^1(\Gamma,\mathbb{C}) \longrightarrow H^1(\Gamma, I_\theta \circ \rho) \longrightarrow H^1(\Gamma, V_\theta \circ \rho) \longrightarrow \cdots \quad ,$$

on en déduit qu'il existe une classe de cohomologie $[c]$ dans $H^1(\Gamma,\mathbb{C})$ telle que dans $H^1(\Gamma, I_\theta \circ \rho)$ on a $\rho^*[\mathrm{vol}_\theta] = [c]$.

On travaille à nouveau avec la résolution inhomogène standard. Soit $c \in F^0(\Gamma,\mathbb{C})$ d'image $[c]$ dans $H^1(\Gamma,\mathbb{C})$. L'égalité $\rho^*[\mathrm{vol}_\theta] = [c]$ se réécrit en termes de cocycles : il existe une fonction $\eta \in I_\theta$ telle que

$$\forall\ \gamma \in \Gamma,\ \forall\ s_\theta \in Y_\theta, \quad \mathrm{vol}_{\theta,X}(y,\rho(\gamma)y)(s_\theta) - c(\gamma) = \eta(\gamma^{-1}s_\theta) - \eta(s_\theta) \quad .$$

Là-encore la fonction η est bornée, il existe donc une constante $a \in \mathbb{R}^+$ telle que

$$\forall\ \gamma \in \Gamma,\ \forall\ s_\theta \in Y_\theta, \quad |\mathrm{vol}_{\theta,X}(y,\rho(\gamma)y)(s_\theta) - c(\gamma)| \le a \quad .$$

Comme $\lim_{n\to+\infty}(\mathrm{vol}_{\theta,X}(y,\rho(\gamma_n)y)(s_{\theta n})) = +\infty$ on déduit de l'inégalité précédente d'abord que $\lim_{n\to+\infty} c(\gamma_n) = +\infty$, puis

$$\forall\ s_\theta \in Y_\theta, \quad \lim_{n\to+\infty} \mathrm{vol}_{\theta,X}(y,\rho(\gamma_n)y)(s_\theta) = +\infty \quad .$$

Cette conclusion est absurde : quitte à extraire une sous-suite de (γ_n), on peut supposer que la suite $(\rho(\gamma_n)y)$ de X converge vers un point s du bord ∂X. Pour tout $s_\theta \in Y_\theta$ sauf un nombre fini, on a alors $\lim_{n\to+\infty} \mathrm{vol}_{\theta,X}(y,\rho(\gamma_n)y)(s_\theta) = -\infty$. D'où la contradiction. $\square$

5. Volumes des représentations

Soit θ une partie de Δ_G. Dans cette section on construit des invariants cohomologiques $[\mathrm{vol}_\theta(\rho,S)] \in H^{|\theta|}(\Gamma, L^\infty(S,\mu_S))$ sur $\mathcal{X}_{\ge\theta}(\Gamma,G)$, pour (S,μ_S) un Γ-espace moyennable convenable. En particulier on se débarrasse de la dépendance en ρ de l'espace d'arrivée du morphisme $\rho^* : H^1(G,I_\theta) \longrightarrow H^1(\Gamma, I_\theta \circ \rho)$.

5.1. **Moyennabilité et (θ,S)-volumes.**

5.1.1. *Rappels sur les actions moyennables.* Soit S un espace de Borel standard muni d'une Γ-action mesurable, et μ_S une mesure σ-finie positive sur S, qui est Γ-quasi-invariante (i.e. pour toute partie mesurable A de S et tout élément γ de Γ, $\mu(\gamma A) = 0$ si et seulement si $\mu(A) = 0$). Soit E un espace de Banach séparable et $\alpha \in Z^1_{\mathrm{mes}}(\Gamma, F(S, \mathrm{Iso}\, E))$ un 1-cocycle mesurable de Γ à valeur dans l'espace $F(S, \mathrm{Iso} E))$ des applications mesurables de S dans le groupe $\mathrm{Iso}\, E$ des isométries de E. Supposons donné, pour tout s de S, un sous-ensemble convexe compact $A_s \subset E_1^*$ de la boule unité E_1^* du dual E^*, tel que l'ensemble $\{(s, A_s) \subset S \times E_1^*\}$ est borélien et vérifie $\alpha^*(\gamma, s)\mathcal{A}_{\gamma s} = \mathcal{A}_s$ pour μ_S-presque tout s de S (où $\alpha^* \in Z^1_{\mathrm{mes}}(\Gamma, F(S, \mathrm{Iso}\, E^*))$ désigne le cocycle dual de α). Notons $F(S, \{\mathcal{A}_s\}) = \{\phi : S \longrightarrow E_1^* \text{ mesurable}, \ \phi(s) \in \mathcal{A}_s \text{ pour presque tout s}\}$, c'est un sous-ensemble convexe compact de $L^\infty(S, E^*)$ (muni de sa topologie $*$-faible de dual de $L^1(S, E)$), clairement invariant par la Γ-action α^*-twistée. Rappelons la

Définition 11. ([22, 4.3.1, p.78]) Un Γ-espace affine de la forme $F(S, \{\mathcal{A}_s\})$ est appelé un Γ-espace affine sur S. L'action de Γ sur S est dite moyennable si tout Γ-espace affine sur S a un point fixe.

Si Y désigne un espace localement compact séparable, rappelons qu'une mesure borélienne sur Y est une mesure définie sur la σ-algèbre borélienne de Y et bornée sur les compacts. L'ensemble $\mathcal{M}(Y)$ des mesures régulières boréliennes sur Y s'identifie d'après le théorème de Riesz au dual de l'espace des fonctions continues sur Y à support compact. On notera $\mathcal{P}(Y)$ le sous-espace des probabilités (mesures positives de poids 1) de $\mathcal{M}(Y)$. Si $\mu \in \mathcal{P}(Y)$, on appelle support de μ, noté $\mathrm{Supp}\, \mu$, le complémentaire de la réunion des ouverts de Y de mesure nulle.

Le résultat sur les Γ-actions moyennables qui nous intéresse est la

Proposition 3. [22, 4.3.9 p.81] *Soit (S, μ_S) un Γ-espace moyennable et Y un Γ-espace métrique compact. Il existe alors une application mesurable Γ-équivariante $\phi : S \longrightarrow \mathcal{P}(Y)$ (bien définie en dehors d'un sous-ensemble borélien Γ-invariant de S de mesure nulle).*

5.1.2. *(θ, S)-volumes.* Soit (S, μ_S) un Γ-espace moyennable et $\rho : \Gamma \longrightarrow G$ une représentation continue. Soit $\theta \subset \Delta_G$ une partie quelconque. Comme le Γ-espace Y_θ est métrique compact, il existe d'après la proposition précédente une application mesurable ρ-équivariante $\phi : S \longrightarrow \mathcal{P}(Y_\theta)$. Rappelons que l'action de G sur $\mathcal{P}(Y_\theta)$ est donnée par : $\forall\, \tau \in \mathcal{P}(Y_\theta), \ \ g.\tau = g_*\tau$, c'est-à-dire

$$\forall\, h \in \mathcal{C}(Y_\theta), \ \ < g.\tau, h > = < \tau, g^{-1}h > \ ,$$

où on a noté $< \tau, h > = \int_{Y_\theta} h(z) d\tau(z)$. On a donc : $< g\tau, h > = \int_{Y_\theta} h(gz) d\tau(z)$.

L'application mesurable $\phi : S \longrightarrow \mathcal{P}(Y_\theta)$ induit une application

$$\Phi : I_\theta \longrightarrow L^\infty(S, \mu_S)$$

définie par

$$\forall p.t. \ s \in S, \ \ \Phi(h)(s) = < \phi(s), h > \ .$$

Remarques :

1. L'application Φ est bien à valeur dans $L^\infty(S, \mu_S)$:

$$|\Phi(h)(s)| = |\int_{Y_\theta} h(z) d\phi(s)(z)| \leq \int_{Y_\theta} |h(z)| d\phi(s)(z) \leq ||h||_\infty \ .$$

2. L'application Φ est continue (et même 1-Lipschitz) :

$$||\Phi(h') - \Phi(h)||_\infty = \text{sup ess}_{s\in S}|\Phi(h')(s) - \Phi(h)(s)| = \text{sup ess}_{s\in S}|\int_{Y_\theta} (h'(u) - h(u))d\phi(s)(u)| \\ \leq ||h' - h|| \quad .$$

Lemme 7. $\forall\, h \in I_\theta,\ \ \forall\, \gamma \in \Gamma,\ \ \Phi_(\rho(\gamma)h) = \gamma.\Phi(h)$.

Preuve :

Pour presque tout $s \in S$:

$$\begin{aligned}\Phi(\rho(\gamma)h)(s) &= < \phi(s), \rho(\gamma)h > = < \rho(\gamma)^{-1}\phi(s), h > \\ &= < \phi(\gamma^{-1}s), h > = \Phi(h)(\gamma^{-1}s) \\ &= (\gamma.\Phi(h))(s) \quad .\end{aligned}$$

□

Définition 12. Soit $\rho : \Gamma \longrightarrow G$ une représentation continue, (S, μ_S) un Γ-espace moyennable et θ une partie de Δ_G. Soit $\phi : S \longrightarrow \mathcal{P}(Y_\theta)$ une application mesurable Γ-équivariante. On définit $\mathrm{vol}_\theta(\rho, S, \phi) \in C^{|\theta|}(\Gamma, L^\infty(S, \mu_S))$ par $\mathrm{vol}_\theta(\rho, S) = \Phi \circ \rho^*\mathrm{vol}_\theta$.

Lemme 8. *L'application* $\mathrm{vol}_\theta(\rho, S, \phi)$ *est un* $|\theta|$*-cocycle de* $C^{|\theta|}(\Gamma, L^\infty(S, \mu_S))^\Gamma$.

Preuve :

L'application Φ est linéaire et $d\mathrm{vol}_\theta = 0$, donc $d\mathrm{vol}_\theta(\rho, S, \phi) = 0$. Reste à vérifier la Γ-invariance. Comme pour tout $\gamma \in \Gamma$, $\gamma.(\rho^*\mathrm{vol}_\theta) = \rho^*\mathrm{vol}_\theta$ (c'est-à-dire $\rho^*\mathrm{vol}_\theta \circ \gamma = \rho(\gamma) \circ \rho^*\mathrm{vol}_\theta$), on déduit du lemme 7 :

$$\mathrm{vol}_\theta(\rho, S, \phi) \circ \gamma = \Phi \circ \rho^*\mathrm{vol}_\theta \circ \gamma = \Phi \circ \rho(\gamma) \circ \rho^*\mathrm{vol}_\theta = \gamma(\Phi(\rho^*\mathrm{vol}_\theta)) = \gamma\mathrm{vol}_\theta(\rho, S, \phi) \quad .$$

□

Définition 13. Soit $\rho : \Gamma \longrightarrow \mathbf{G}$ une représentation continue, (S, μ_S) un Γ-espace moyennable et θ une partie de Δ_G. Soit $\phi : S \longrightarrow \mathcal{P}(Y_\theta)$ une application mesurable Γ-équivariante. On appelle (θ, S)-volume de la représentation ρ associé à ϕ la classe de cohomologie

$$[\overline{\mathrm{vol}_\theta}(\rho, S, \phi)] \in H^{|\theta|}(\Gamma, L^\infty(S, \mu_S)/\mathbb{C}),$$

où $\overline{\mathrm{vol}_\theta}(\rho, S, \phi)$ désigne le cocycle image de $\mathrm{vol}_\theta(\rho, S, \phi)$ dans $C^{|\theta|}(\Gamma, (L^\infty(S, \mu_S)/\mathbb{C}))^\Gamma$.

Supposons maintenant $|\theta| = 1$. Comme le (θ, S)-volume $[\overline{\mathrm{vol}_\theta}(\rho, S, \phi)] \in H^{|\theta|}(\Gamma, L^\infty(S, \mu_S)/\mathbb{C})$ s'obtient à partir de $[\rho^*\mathrm{vol}_\theta]$ et que le théorème 2 caractérise l'annulation de $[\rho^*\mathrm{vol}_\theta]$, on voudrait caractériser l'annulation de $[\overline{\mathrm{vol}_\theta}(\rho, S, \phi)]$. Montrons brièvement que c'est impossible sans choix judicieux de S et θ. Supposons donc $[\overline{\mathrm{vol}_\theta}(\rho, S, \phi)] = 0$. Par le même raisonnement qu'à la partie précédente, on obtient :

(3) $\quad \exists\, \eta \in L^\infty(S, \mu_S),\ \exists\, c \in F^0(\Gamma, \mathbb{C}),\ \forall\, \gamma \in \Gamma,\ p.p.t.\ s \in S,$

$$\int_{Y_\theta} \mathrm{vol}_{\theta,X}(y, \rho(\gamma)y)(s_\theta)d\phi(s)(s_\theta) - c(\gamma) = \eta(\gamma^{-1}s) - \eta(s) \quad .$$

D'où l'inégalité :

(4) $\qquad \exists\, a \in \mathbb{R}^+,\ \forall\, \gamma \in \Gamma,\ p.p.t.\ s \in S,\ \ |\int_{Y_\theta} \mathrm{vol}_{\theta,X}(y, \rho(\gamma)y)(s_\theta)d\phi(s)(s_\theta) - c(\gamma)| \leq a.$

On voit qu'on ne peut rien conclure sur cette inégalité moyennée. Notons δ_{Y_θ} l'image de Y_θ dans $\mathcal{P}(Y_\theta)$ par l'application qui à un point s_θ associe la mesure de Dirac en ce point δ_{s_θ}. Pour obtenir une information de l'inégalité 4, on va choisir θ et S de façon à ce que l'image essentielle de $\phi : S \longrightarrow \mathcal{P}(Y_\theta)$ soit dans δ_{Y_θ}. Pour ce faire un concept clef est celui de proximalité, dont nous rappelons les aspects qui nous seront utiles.

5.2. **Proximalité et ensembles limites.**

5.2.1. *Définitions.* Cette section de rappels est incluse de façon à fixer les notations et pour la commodité du lecteur. Nous renvoyons à [14, chap. VI] pour plus de détails.

Soit M un Γ-espace métrique. Un sous-ensemble $F \subset M$ est dit contractible s'il existe une suite (γ_n) dans Γ avec $\lim_{n\to+\infty} \mathrm{diam}\gamma_n F = 0$. Le Γ-espace M est dit proximal si tout ensemble de M constitué de deux points est contractible. Il est dit fortement proximal si pour toute mesure de probabilité $\mu \in \mathcal{P}(M)$, il existe une suite (γ_n) dans Γ et un point x de M tel que la suite de mesures $(\gamma_n\mu)$ converge vers δ_x. D'après [14, VI 1.6 p.197], on a la

Proposition 4 (Margulis). *Si le Γ-espace M est proximal et si tout point de M admet un voisinage contractible, alors M est fortement proximal.*

Soit μ_Γ une mesure de probabilités sur Γ. Rappelons que la mesure de probabilité $\mu_\Gamma * \mu$ sur M est définie par

$$\mu_\Gamma * \mu = \int_\Gamma (g\mu) d\mu_\Gamma(g) \quad .$$

La probabilité μ est dite μ_Γ-stationnaire si $\mu_\Gamma * \mu = \mu$. On dit encore que (M, μ) est un (Γ, μ_Γ)-espace. Notons $\Omega = \oplus_{n=1}^\infty \Gamma_n$ muni de la mesure produit $\tau = \oplus_{n=1}^\infty \tau_n$, où pour tout n on pose $\Gamma_n = \Gamma$ et $\tau_n = \mu_\Gamma$. Pour τ-presque toute suite $(g_1, g_2, \dots) \in \Omega$, la suite $(g_1 \cdots g_n \mu)$ converge dans $\mathcal{P}(M)$ ([14, VI prop.2.4]).

Définition 14. On dit que le (Γ, μ_Γ)-espace (M, μ) est une μ_Γ-frontière si pour τ-presque toute suite $(g_1, g_2, \dots) \in \Omega$, la limite $\lim(g_1 \cdots g_n\mu)$ est dans δ_M. Le Γ-espace M est dit μ_Γ-proximal si pour toute probabilité μ_Γ-stationnaire $\mu \in \mathcal{P}(M)$, le (Γ, μ_Γ)-espace (M, μ) est une μ_Γ-frontière. Enfin le Γ-espace M est dit proximal en moyenne s'il est μ_Γ-proximal pour toute probabilité $\mu_\Gamma \in \mathcal{P}(\Gamma)$ de support $\mathrm{supp}\mu_\Gamma = \Gamma$.

5.2.2. *Proximalité des actions sur les variétés de drapeaux.* Soient F, $\mathbf{G}$, Φ et Δ_G comme à la section 2, et $\rho : \Gamma \longrightarrow G$ une représentation continue Zariski-dense (i.e. telle que l'image $\rho(\Gamma)$ est Zariski-dense dans G). Notons $\omega_1, \dots, \omega_r$ les poids fondamentaux de Φ. Une version à priori plus faible de la proximalité de la ρ-action de Γ sur les variétés de drapeaux Y_θ est étudiée par Benoist dans [1]. Commençons par rappeler les résultats qui nous seront utiles.

Soit V un F-espace vectoriel de dimension finie. Un élément g de $\mathrm{End}V - \{0\}$ est dit proximal dans $\mathbb{P}V$ s'il a une seule valeur propre de module maximal et si cette valeur propre a multiplicité 1 (cette valeur propre est alors dans F). La proximalité de la ρ-action de Γ sur Y_θ s'étudie via la proximalité de la ρ-action de Γ sur certains espaces projectifs associés à G. Précisément, rappelons le

Lemme 9 (Tits). *Il existe r représentations irréductibles ρ_i de G dans des F-espaces vectoriels V_i dont les plus hauts poids χ_i sont des multiples entiers des poids fondamentaux ω_i et telles que* $\dim(V_i)_{\chi_i} = 1$.

Définition 15 (Benoist). 1. Soit g un élément de G, notons θ_g la plus grande partie de Δ_G telle que pour tout $\alpha_i \in \theta_g$ l'élément $\rho_i(g)$ est proximal dans $\mathbb{P}V_i$. Etant donnée une partie θ de Δ_G, on dira que g est θ-proximal si $\theta \subset \theta_g$.
2. Etant donnée une représentation continue Zariski-dense $\rho : \Gamma \longrightarrow G$ on définit la partie $\theta_\rho \subset \Delta_G$ par $\theta_\rho = \cup_{\gamma\in\Gamma}\theta_{\rho(\gamma)}$.
3. Rappelons que ν_θ désigne la probabilité K-invariante sur Y_θ. Une suite (g_n) de G est dite contractante dans Y_θ si $\lim_{n\to+\infty} g_n\nu_\theta$ est une masse de Dirac δ_x. Le groupe $\rho(\Gamma)$ est dit avoir la propriété de contraction dans Y_θ s'il existe une suite (γ_n) de Γ qui est ρ-contractante dans Y_θ. On appelle point limite de $\rho(\Gamma)$ dans Y_θ un point limite d'une telle suite. Etant donné un élément θ-proximal g de G, la suite (g^n) est contractante dans Y_θ et a un unique point limite, noté y_g.

Lemme 10 (Benoist). *1. L'image $\rho(\Gamma)$ est bornée dans G si et seulement si $\theta_\rho = \emptyset$.*
2. Le groupe $\rho(\Gamma)$ a la propriété de contraction dans Y_θ si et seulement si $\theta \subset \theta_\rho$.

Remarquons que si on remplace dans la définition de la propriété de contraction la mesure ν_θ par "pour toute mesure $\mu \in \mathcal{P}(Y_\theta)$" on obtient la notion de proximalité forte. La proposition qui nous sera utile généralise la proposition précédente de Benoist :

Proposition 5. *Soit $\rho : \Gamma \longrightarrow G$ une représentation continue Zariski-dense. Pour toute partie $\theta \subset \theta_\rho$, la ρ-action de Γ sur Y_θ est fortement proximale et proximale en moyenne.*

Preuve :
La preuve de cette proposition est une transposition fidèle de la preuve de [14, theor.3.5 p.205]. Soit donc θ une partie de θ_ρ.

Montrons que la ρ-action de Γ sur Y_θ est proximale. Notons $P_\theta{}^-$ le parabolique opposé à P_θ et $Y_\theta{}^-$ la variété drapeau $G/P_\theta{}^-$ associée. On dit qu'un couple de points (y, y^-) de $Y_\theta \times Y_\theta{}^-$ est en position générale s'il appartient à l'orbite ouverte de G dans $Y_\theta \times Y_\theta{}^-$. Pour y^- un point de $Y_\theta{}^-$, on note U_{y^-} l'ouvert de Zariski des points y de Y_θ tels que le couple (y, y^-) est en position générale, et Z_{y^-} le fermé de Zariski complémentaire. Comme le groupe $\rho(\Gamma)$ a la propriété de contraction sur Y_θ, d'après [1, lemme 3.5] il existe un couple (y^+, y^-) de $Y_\theta \times Y_\theta{}^-$ et une suite (γ_n) de Γ tels que :

$$\forall\, z \in U_{y^-},\ \lim_{n\to\infty} \rho(\gamma_n).z = y^+ \ .$$

Soient alors (u, v) deux points de Y_θ. Notons $\mathbf{H}_u$ (resp. $\mathbf{H}_v$) le sous-groupe algébrique des éléments $\{h \in \mathbf{G},\, h.u \in \mathbf{Z}_{y^-}\}$ (resp. idem pour v). Comme l'action de G est transitive sur Y_θ, les groupes $\mathbf{H}_u$ et $\mathbf{H}_v$ sont strictement inclus dans $\mathbf{G}$. Comme $\rho(\Gamma)$ est Zariski-dense dans G, il existe γ dans Γ tel que $\rho(\gamma).u \notin Z_{y^-}$ et $\rho(\gamma).v \notin Z_{y^-}$. Donc

$$\lim_{n\to\infty} \rho(\gamma_n\gamma)u = y^+$$

et

$$\lim_{n\to\infty} \rho(\gamma_n\gamma)v = y^+ \ .$$

Donc l'action de Γ sur Y_θ est proximale.

Montrons que la ρ-action de Γ sur Y_θ est fortement proximale. D'après [14, VI, 1.6.a], il suffit de montrer que tout point de Y_θ a un voisinage $\rho(\Gamma)$-contractile. Notons Z l'ensemble des points de Y_θ n'ayant pas de voisinage contractile. Comme tout point de l'ouvert de Zariski U_{y^-} a un voisinage contractile, l'adhérence de Zariski $\overline{Z}$ de Z est propre dans Y_θ. Comme Z est $\rho(\Gamma)$-invariant, $\overline{Z}$ aussi. Finalement $\overline{Z}$ est une sous-variété algébrique propre Γ-invariante de Y_θ. Par Zariski-densité de ρ, l'ensemble Z est vide.

Montrons que la ρ-action de Γ sur Y_θ est proximale en moyenne. D'après [14, VI, prop.2.13], il suffit de vérifier qu'il existe $r \in \mathbb{N}$, des sous-ensembles $C_1, \dots, C_r$ de Γ et des ouverts $U_1, \dots, U_r$ de Y_θ tels que $\cup_{1 \leq j \leq r} C_j = \Gamma$, $\rho(\Gamma).U_j = Y_\theta$ et pour tout j, $1 \leq j \leq r$, l'ensemble C_j est équicontinu sur U_j au sens de [14, VI.2.11]. C'est une généralisation laborieuse de [14, VI.3.2] et [14, VI.3.4] dont on laisse les détails au lecteur.

$\square$

5.2.3. *Ensembles limites.* Une autre notion dont nous auront besoin est celle d'ensemble limite. Rappelons d'abord le

Lemme 11 (Benoist)**.** *Pour toute partie $\theta \subset \theta_\rho$, on appelle θ-ensemble limite de ρ l'ensemble $\Lambda_{\rho,\theta}$ des points limites de $\rho(\Gamma)$ dans la variété des drapeaux Y_θ (c.f. définition 15). C'est un fermé Γ-invariant Zariski-dense de Y_θ, et tout fermé Γ-invariant non-vide de Y_θ le contient.*

Donnons une caractérisation de l'ensemble limite $\Lambda_{\rho,\theta}$ qui nous sera utile. Soit $G = KA^+K$ la décomposition de Cartan de G et $\mu : G \longrightarrow A^+$ la projection de Cartan (i.e. pour $g \in G$, $\mu(g)$ est l'unique élément de A^+ tel que $g \in K\mu(g)K$).

Lemme 12. *Soit θ une partie de θ_ρ. L'ensemble limite $\Lambda_{\rho,\theta}$ est l'ensemble des éléments kP_θ de Y_θ vérifiant la condition : il existe une suite (γ_n) de Γ, de décomposition de Cartan $\rho(\gamma_n) = k_{1,n}a_nk_{2,n}$ tels que $k = \lim_{n\to\infty} k_{1,n}$ et pour toute racine $\alpha_i \in \theta$, $\lim_{n\to\infty} \alpha_i(\mu_n) = +\infty$.*

Preuve :
se déduit immédiatement de [1, p.17]. $\square$

Proposition 6. *Soit $\rho : \Gamma \longrightarrow G$ une représentation Zariski-dense. Soit (S, μ_S) un Γ-espace moyennable et $\mu_\Gamma \in \mathcal{P}(\Gamma)$ vérifiant $\mu_\Gamma * \mu_S = \mu_S$ et* $\operatorname{Supp} \mu_\Gamma = \Gamma$*. Pour toute partie $\theta \in \theta_\rho$, il existe une application mesurable Γ-équivariante $\phi : S \longrightarrow \Lambda_{\rho,\theta}$ (bien définie en dehors d'un ensemble de mesure nulle de S). De plus toute application mesurable Γ-équivariante $\psi : S \longrightarrow \mathcal{P}(Y_\theta)$ s'identifie à ϕ presque partout.*

Preuve :
Sous les hypothèses faites sur ρ et θ, l'ensemble $\Lambda_{\rho,\theta}$ est un fermé Γ-invariant non-vide de la variété de drapeaux Y_θ. D'après la proposition 3, il existe donc une application mesurable Γ-équivariante $\phi : S \longrightarrow \mathcal{P}(\Lambda_{\rho,\theta})$. D'après la proposition 5, le Γ-espace Y_θ est proximal en moyenne, donc μ_Γ-proximal. On déduit immédiatement de l'inclusion $\Lambda_{\rho,\theta} \subset Y_\theta$ que le Γ-espace $\Lambda_{\rho,\theta}$ est lui-aussi μ_Γ-proximal. Rappelons alors ([14, VI 2.10 p.201])

Proposition 7 (Margulis)**.** *Soit (S, μ_S) et M deux Γ-espaces et $\mu_\Gamma \in \mathcal{P}(\Gamma)$ telle que $\mu_\Gamma * \mu_S = \mu_S$ et M est μ_Γ-proximal. Si $\phi : S \longrightarrow \mathcal{P}(M)$ est une application mesurable Γ-équivariante, alors pour μ_S-presque tout s de S on a $\phi(s) \in \delta_S$. De plus deux telles applications sont égales presque partout.*

Appliquons cette proposition pour $M = \Lambda_{\rho,\theta}$, on en déduit que pour presque tout $s \in S$ on $\phi(s) \in \Lambda_{\rho,\theta}$. Réappliquons cette proposition pour $M = Y_\theta$, on en déduit l'assertion d'unicité.

□

5.2.4. *Définition des invariants cohomologiques.* Soit θ une partie de Δ_G et $\rho : \Gamma \longrightarrow G$ une représentation de $\mathcal{X}_{\geq\theta}(\Gamma, G)$. D'après la proposition précédente, le cocycle $\mathrm{vol}_\theta(\rho, S, \phi)$ ne dépend donc que de ρ, θ et S. On le notera $\mathrm{vol}_\theta(\rho, S)$ et on notera $\overline{\mathrm{vol}_\theta}(\rho, S)$ son image dans $C^{|\theta|}(\Gamma,$-$L^\infty(S, \mu_S)/\mathbb{C})$. On appellera (θ, S)-volumes de ρ les classes $[\mathrm{vol}_\theta(\rho, S)] \in H^{|\theta|}(\Gamma, L^\infty(S, \mu_S))$ et $[\overline{\mathrm{vol}_\theta}(\rho, S)] \in H^{|\theta|}(\Gamma, L^\infty(S, \mu_S)/\mathbb{C})$

5.3. **Ensembles limites et (θ, S)-volumes.** Dans cette section nous précisons le lien entre ensembles limites et (θ, S)-volumes.

Définition 16. Soit θ une racine de θ_ρ. Soit $L_{\rho,\theta}$ le sous-ensemble de Y_θ des points $s_\theta \in Y_\theta$ vérifiant la condition : il existe une suite (γ_n) de Γ telle que $\lim_{n\to\infty} \mathrm{vol}_{\theta,X}(u, \rho(\gamma_n)v)(s_\theta) = +\infty$. Soit $\Xi_{\rho,\theta}$ l'ensemble des points fixes des éléments θ-proximaux et presque-simples de $\rho(\Gamma)$.

Proposition 8. *Soit θ une racine de θ_ρ. Alors :*
1. *Si u, v désignent deux points quelconques de X, $L_{\rho,\theta}$ est l'ensemble des points $s_\theta \in Y_\theta$ vérifiant la condition : il existe une suite (γ_n) de Γ telle que $\lim_{n\to\infty} \mathrm{vol}_{\theta,X}(u, \rho(\gamma_n)v)(s_\theta) = +\infty$.*
2. *L'ensemble $L_{\rho,\theta}$ est Γ-invariant.*
3. *L'ensemble $\Xi_{\rho,\theta}$ est non-vide et on a l'inclusion $\Xi_{\rho,\theta} \subset L_{\rho,\theta} \cap \Lambda_{\rho,\theta}$. En particulier $L_{\rho,\theta}$ est non-vide.*

Preuve :
Pour 1. : soit $s_\theta \in Y_\theta$. Alors
$$\begin{aligned}\mathrm{vol}_{\theta,X}(u, \rho(\gamma_n)v)(s_\theta) - \mathrm{vol}_{\theta,X}(y, \rho(\gamma_n)y)(s_\theta) &= \mathrm{vol}_{\theta,X}(u, y)(s_\theta) + \mathrm{vol}_{\theta,X}(\rho(\gamma_n)y, \rho(\gamma_n)v)(s_\theta)\\ &= \mathrm{vol}_{\theta,X}(u, y)(s_\theta) + \mathrm{vol}_{\theta,X}(y, v)(\rho(\gamma_n)^{-1}s_\theta)\ ,\end{aligned}$$
d'après les propriétés de cocycle et d'invariance de $\mathrm{vol}_{\theta,X}$. Comme la fonction $\mathrm{vol}_{\theta,X}(y, v)$ est une fonction bornée sur le compact Y_θ, le volume $\mathrm{vol}_{\theta,X}(u, \rho(\gamma_n)v)(s_\theta)$ tend vers $+\infty$ si et seulement si le volume $\mathrm{vol}_{\theta,X}(y, \rho(\gamma_n)y)(s_\theta)$ fait de même.

Pour 2. : il suffit de noter que $\mathrm{vol}_{\theta,X}(u, \rho(\gamma_n)v)(\gamma s_\theta) = \mathrm{vol}_{\theta,X}(\rho(\gamma^{-1})u, \rho(\gamma^{-1}\gamma_n)v)(s_\theta)$ et d'utiliser 1.

Pour 3. : d'après [1, prop. 3.2], l'ensemble des éléments θ-proximaux de $\rho(\gamma)$ est encore Zariski-dense dans G. Comme l'ensemble des éléments semi-simples de G est un ouvert de Zariski de G, il existe $\gamma \in \Gamma$ tel que $\rho(\gamma)$ soit θ-proximal et presque-simple. Donc l'ensemble $\Xi_{\rho,\theta}$ est non-vide. L'inclusion $\Xi_{\rho,\theta} \subset \Lambda_{\rho,\theta}$ découle immédiatement des définitions. Reste à montrer $\Xi_{\rho,\theta} \subset L_{\rho,\theta}$. Soit γ un élément de Γ tel que $\rho(\gamma)$ est θ-proximal et semi-simple. Notons $s_\theta = y_{\rho(\gamma)}$ l'unique point fixe attracteur de $\rho(\gamma)$ dans Y_θ. Quitte à remplacer γ par l'une de ses puissances, l'élément $\rho(\gamma)$ admet une décomposition de Jordan $\rho(\gamma) = g_e g_h$, où g_e est elliptique dans G et g_h est hyperbolique (c'est-à-dire de la forme uau^{-1}, $a \in A^+$), et $g_e g_h = g_h g_e$. Comme $\rho(\gamma)$ est θ-proximal, la partie hyperbolique g_h est non-nulle. Le point s_θ est encore l'unique point fixe attracteur de g_h dans Y_θ et s'identifie donc à $uP_\theta u^{-1}$. On notera $y' = uy$ et $\mathcal{A}'$ l'appartement $u\mathcal{A}$. Comme g_e est elliptique, g_e fixe un point z de X. Donc
$$\begin{aligned}\mathrm{vol}_{\theta,X}(z, \rho(\gamma^n)z)(s_\theta) &= \mathrm{vol}_{\theta,X}(z, (g_h)^n z)(s_\theta)\\ &= \mathrm{vol}_{\theta,X}(y, (g_h)^n y)(s_\theta) + \mathrm{vol}_{\theta,X}(z, y)(s_\theta) + \mathrm{vol}_{\theta,X}(y, z)((g_h)^{-n}s_\theta)\ .\end{aligned}$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, le point $(g_h)^n y'$ appartient à $\mathcal{A}'^+$ et $\lim_{n\to+\infty} \mathrm{vol}_{\theta,X}(y', \rho(\gamma^n)y')(s_\theta) = +\infty$. Les deux autres termes du membre de droite de l'égalité précédente sont évidemment bornés. Donc

$$\lim_{n\to+\infty} \mathrm{vol}_{\theta,X}(z, \rho(\gamma^n)z)(s_\theta) = +\infty \quad ,$$

et $s_\theta \in L_{\rho,\theta}$. □

5.4. **Fin de la preuve du théorème 3.** Soit (S, μ_S) un Γ-espace moyennable tel qu'il existe $\mu_\Gamma \in \mathcal{P}(\Gamma)$ avec $\mu_\Gamma * \mu_S = \mu_S$ et $\mathrm{Supp}\ \mu_\Gamma = \Gamma$. Soit θ une racine de Δ_G et $\rho : \Gamma \longrightarrow G$ une représentation de $\mathcal{X}_{\geq\theta}(\Gamma, G)$. Montrons que $[\overline{\mathrm{vol}_\theta}(\rho, S)] \neq 0$. Supposons par l'absurde que $[\overline{\mathrm{vol}_\theta}(\rho, S)] = 0$. Notons $\phi : S \longrightarrow \Lambda_{\rho,\theta}$ l'application mesurable Γ-équivariante de la proposition 6, l'inégalité 4 se réécrit :

$$\forall\, \gamma \in \Gamma,\ p.p.t\ s \in S,\ \ |\mathrm{vol}_{\theta,X}(y, \rho(\gamma)y)(\phi(s)) - c(\gamma)| \leq a \quad .$$

Comme l'action de Γ sur $\Lambda_{\rho,\theta}$ est minimale ([1, lemme 3.6]), l'image essentielle de l'application $\phi : S \longrightarrow \Lambda_{\rho,\theta}$ n'est autre que $\Lambda_{\rho,\theta}$. L'inégalité précédente se réécrit :

$$\forall\, \gamma \in \Gamma,\ \forall s_\theta \in \Lambda_{\rho,\theta},\ \ |\mathrm{vol}_{\theta,X}(y, \rho(\gamma)y)(s_\theta) - c(\gamma)| \leq a \quad .$$

D'après la proposition 8, 4., l'ensemble $\Xi_{\rho,\theta}$ est non-vide et vérifie $\Xi_{\rho,\theta} \subset L_{\rho,\theta}$. Il existe donc un élément $s \in \Xi_{\rho,\theta}$ et une suite (γ_n) de Γ telle que $\lim_{n\to+\infty} \mathrm{vol}_{\theta,X}(y, \rho(\gamma_n)y)(s) = +\infty$. Comme on a aussi l'inclusion $\Xi_{\rho,\theta} \subset \Lambda_{\rho,\theta}$, on déduit de l'inégalité précédente que la suite $(c(\gamma_n))$ converge vers $+\infty$, puis que

$$\forall s_\theta \in \Lambda_{\rho,\theta},\ \ \lim_{n\to*\infty} \mathrm{vol}_{\theta,X}(y, \rho(\gamma_n)y)(s_\theta) = +\infty \quad .$$

Donc l'ensemble limite $\Lambda_{\rho,\theta}$ est fini. Contradiction à la Zariski-densité de $\Lambda_{\rho,\theta}$ dans Y_θ. □

6. Invariants cohomologiques des représentations des réseaux hyperboliques cocompacts

Dans cette partie H désigne un groupe de Lie réel presque-simple non-compact, de compact maximal K_H et d'espace symétrique associé $X_H = H/K_H$. On notera r_H le rang réel de H et n_H la dimension de X_H.

6.1. **L'induite parabolique duale.** Dans cette section nous exhibons une classe de cohomologie naturelle de H et construisons un cocycle géométrique la représentant (c.f. proposition 10). On utilisera ces résultats aux sections suivantes pour construire les invariants $[\kappa_\theta(\rho)]$ du théorème 4.

Soit P_H un sous-groupe parabolique minimal de H et supposons donnée une décomposition de Langlands $P_H = {}^0M_H A_H N_H$, où A_H désigne un tore déployé maximal de H. Comme P_H est minimal le groupe ${}^0M_H$ est compact. Notons $S = H/P_H$ la variété des drapeaux maximaux de H et ν la mesure de probabilité K_H-invariante sur S. A ces adaptations près on adopte les notations de [2, chap.III]. En particulier $\rho_{P_H} : \mathfrak{a}_H \longrightarrow \mathbb{R}$ désigne la demi-somme des racines positives de $\Phi(P_H, A_H)$.

Notons V l'espace des fonctions complexes C^∞ sur S, muni de la H-action suivante :

$$\forall g \in H,\ \forall f \in V,\ \ (g.f)(s) = f(g^{-1}s)\frac{dg^{-1}\nu}{d\nu}(s) \quad ,$$

où $\frac{dg^{-1}\nu}{d\nu}(s)$ désigne le cocycle de Radon-Nikodym de (S,ν).

Lemme 13. *Le H-module V est isomorphe à la représentation induite $I_{P_H,1,\rho_{P_H}}$.*

Preuve :
Remarquons que

$$\forall p \in P_H, \quad \frac{dp\nu}{d\nu}(eP_H) = e^{-2\rho_{P_H}(p)} \quad .$$

On vérifie alors facilement que l'application $\phi : V \longrightarrow I_{P_H,1,\rho_{P_H}}$ qui à $f \in V$ associe $\phi(f) : H \longrightarrow \mathbb{C}$ définie par $\phi(f)(h) = f(hP_H)(dh\nu/d\nu)(eP_H)$ est bien définie et est un isomorphisme de H-modules. □

Proposition 9 (Borel-Wallach). *Soit H un groupe de Lie réel presque-simple non-compact de rang r_H, n_H la dimension de l'espace symétrique X_H associé, et P_H un sous-groupe parabolique minimal de H. Alors $H^{n_H - r_H}(H, I_{P_H,1,\rho_{P_H}}) \simeq \mathbb{C}$.*

Preuve :
Appliquons [2, III, 3.3] pour $s = w_M w_G$, $l(s) = \dim N_H$. On obtient

$$\forall q \geq 0, \quad H^{\dim N_H + q}(H, I_{P_H,1,\rho_{P_H}}) \simeq (H^*({}^0\mathfrak{m}, K_{P_H}, E_{-w_M\rho-\rho}) \otimes \wedge\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*)^q \quad .$$

Remarquons que le ${}^0\mathfrak{m}$-module $E_{-w_M\rho-\rho}$ est trivial, que le groupe ${}^0M$ est compact car P_H est minimal, enfin que $\dim N_H = n_H - r_H$ d'après la décomposition d'Iwasawa de H. On obtient donc

$$\forall q \geq 0, \quad H^{n_H - r_H + q}(H, I_{P_H,1,\rho_{P_H}}) \simeq \wedge^q \mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^* \quad .$$

D'où l'énoncé pour $q = 0$. □

Remarque : Ce lemme est utilisé pour H de rang 1 dans [2, VI,4] lors du calcul des cohomologies des représentations cohomologiques irréductibles de $SO(n,1)$ et $SU(n,1)$.

Nous allons construire un cocycle dans la résolution homogène standard de H représentant la classe de cohomologie non-triviale exhibée par le lemme précédent. La construction s'appuie sur la géométrie des horocycles dans l'espace symétrique X_H et sur une idée de [8].

6.1.1. *Simplexes géodésiques.* Commençons par la

Définition 17. On dira qu'une variété riemannienne (M,τ) a la propriété d'atteignabilité si pour tout point m de M l'exponentielle riemannienne $\exp_{\tau,m} : T_m M \longrightarrow M$ est un difféomorphisme.

Une classe bien connue de variétés ayant cette propriété est la classe des variétés d'Hadamard (i.e. les variétés riemanniennes connexes simplement connexes à courbure ≤ 0). Nous nous intéressons ici au cas suivant :

Lemme 14. *Soit N un groupe de Lie connexe simplement connexe. Pour toute métrique riemannienne τ sur N invariante à gauche, la variété riemannienne (N,τ) a la propriété d'atteignabilité.*

Preuve :
Comme la métrique τ est N-invariante à gauche, il suffit de vérifier que l'exponentielle riemannienne $\exp_{\tau,e} : T_e N \longrightarrow N$ en l'identité e de N est un difféomorphisme. Cette exponentielle

riemannienne s'identifie essentiellement à l'exponentielle de groupe $\exp : \mathfrak{n} \longrightarrow N$, qui est un difféomorphisme sous les hypothèses faites sur N. $\square$

Soit (M, τ) une variété riemannienne ayant la propriété d'atteignabilité. Si Δ^q désigne le simplexe standard de dimension q et $(x_0, \ldots, x_q)$ un $(q+1)$-uplet de points de M, on définit le q-simplexe géodésique $\Delta(x_0, \ldots, x_q)$ de façon récursive : l'application $\Delta(x_0, \ldots, x_q) : \Delta^q \longrightarrow M$ est le cône géodésique de sommet x_0 de base $\Delta(x_1, \ldots, x_q)$ et $\Delta(x_0) : \Delta^0 \longrightarrow M$ envoie le point Δ^0 sur x_0. On notera encore $\Delta(x_0, \ldots, x_q)$ l'image $\Delta(x_0, \ldots, x_q)(\Delta^q)$ quand il n'y a pas d'ambiguïté. Si M est de dimension n et λ_τ désigne la forme volume riemannienne de (M, τ), l'application

$$\kappa_{M,\tau} : \begin{array}{lcl} M^{n+1} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x_0, \ldots, x_n) & \longrightarrow & \int_{\Delta(x_0, \ldots, x_n)} \lambda_\tau \end{array}$$

est un cocycle homogène de $C^n(M, \mathbb{R})$: cela découle automatiquement de la formule de Stokes dans M.

Dans le cas où M est une variété d'Hadamard, la notion de simplexe géodésique a été utilisée dans [8].

6.1.2. *Géométrie des horocycles de X_H.* Fixons K_H un sous-groupe compact maximal de H et notons $b = eK_H$ le point base correspondant de l'espace symétrique $X_H = H/K_H$. Soit ξ un point de la variété de drapeaux maximaux S, de stabilisateur le parabolique minimal P_ξ. La donnée de K_H et de P_ξ induit une décomposition de Langlands $P_\xi = {}^0M_\xi A_\xi N_\xi$, où N_ξ désigne le radical unipotent de P_ξ, A_ξ désigne l'unique tore déployé maximal de H correspondant à l'unique appartement de X_H passant par b et asymptote à ξ, et ${}^0M_\xi = Z_{K_H}(A_\xi)$ est le centralisateur de A_ξ dans K_H.

Rappelons que l'horocycle $S_\xi = S_{\xi,0}$ de centre à l'infini ξ passant par b est l'orbite $N_\xi.b$, sur laquelle le groupe de Lie nilpotent N_ξ agit simplement transitivement. Pour tout $v \in \mathfrak{a}_\xi$, notons $S_{\xi,v}$ le translaté $\exp v.S_\xi$ de S_ξ. Comme le tore A_ξ normalise N_ξ, la variété $S_{\xi,v}$ n'est autre que l'horocycle de centre ξ passant par le point $\exp v.b$ de X_H. L'application

$$\begin{array}{lcl} N_\xi \times \mathfrak{a}_\xi & \longrightarrow & X_H \\ (n, v) & \longrightarrow & n.\exp v \end{array}$$

est un difféomorphisme. Dans ces coordonnées $e^{v'}(n, v) = (Ad\, e^{v'}.n, v + v')$ et la métrique canonique τ de X_H s'écrit $\tau = \tau_{\xi,v} \oplus dv^2$. La métrique $\tau_{\xi,v}$ sur $S_{\xi,v}$ (ou de façon équivalente sur N_ξ) est N_ξ-invariante à gauche. On notera $\lambda_{\xi,v}$ la forme volume riemannienne de $(S_{\xi,v}, \tau_{\xi,v})$ et $\pi_{\xi,v} : X \longrightarrow S_{\xi,v}$ la projection orthogonale. Pour simplifier les notations on n'indiquera pas l'indice v lorsqu'il vaut zéro.

6.1.3. *Cocycle pour $H^{n_H - r_H}(H, I_{P_H,1,\rho_{P_H}})$.* Le groupe N_ξ est nilpotent connexe simplement connexe. D'après le lemme 14, la variété riemannienne $(S_{\xi,v}, \tau_{\xi,v})$ a donc la propriété d'atteignabilité. Définissons l'application

$$\kappa_{X_H} : \begin{array}{lcl} X_H^{n_H - r_H + 1} & \longrightarrow & V \\ (x_0, \ldots, x_{n_H - r_H}) & \longrightarrow & \{\xi \longrightarrow \kappa_{S_\xi, \tau_\xi}(\pi_\xi x_0, \ldots, \pi_\xi x_{n_H - r_H})\} \end{array}$$

et posons :

$$\begin{array}{rlcl} \kappa_H : & H^{n_H - r_H + 1} & \longrightarrow & V \\ & (h_0, \ldots, h_{n_H - r_H}) & \longrightarrow & \kappa_{X_H}(h_0.b, \ldots, h_{n_H - r_H}.b) \ . \end{array}$$

Proposition 10. *L'élément κ_H de $C^{n_H - r_H}(H, V)$ est un cocycle H-invariant de la résolution homogène standard du H-module $V \simeq I_{P_H, 1, \rho_{P_H}}$. On a l'égalité $H^{n_H - r_H}(H, I_{P_H, 1, \rho_{P_H}}) = \mathbb{C}.[\kappa_H]$.*

Preuve :
Le fait que κ_H soit un cocycle découle de ce que $\kappa_{S_\xi, \tau_\xi} \in C^{n_H - r_H}(X_H, \mathbb{R})$ en est un. Montrons alors la H-invariance de κ_H. Il suffit de montrer celle de κ_{X_H}. Notons $t = n_H - r_H$ et soit g un élément de H. Alors

$$\begin{aligned} \kappa_{X_H}(g^{-1}x_0, \ldots, g^{-1}x_t)(\xi) &= \int_{\Delta_{S_\xi}(\pi_\xi g^{-1} x_0, \ldots, \pi_\xi g^{-1} x_t)} \lambda_\xi \\ &= \int_{g\Delta_{S_\xi}(\pi_\xi g^{-1} x_0, \ldots, \pi_\xi g^{-1} x_t)} (g^{-1})^* \lambda_\xi \ . \end{aligned}$$

Notons $g = a_{g\xi} n_{g\xi} k_{g\xi}$ (resp. $g = a_\xi n_\xi k_\xi$) la décomposition de g dans $H = A_{g\xi} N_{g\xi} K$ (resp. $H = A_\xi N_\xi K$). L'horocycle gS_ξ est l'horocycle de centre à l'infini $g\xi$ passant par $gb = a_{g\xi} n_{g\xi} b$, c'est-à-dire l'horocycle $S_{g\xi, a_{g\xi}}$. Comme g est une isométrie de X, on a d'abord

$$g \circ \pi_\xi = \pi_{g\xi, a_{g\xi}} \circ g \ ,$$

d'où

$$g\Delta_{S_\xi}(\pi_\xi g^{-1} x_0, \ldots, \pi_\xi g^{-1} x_t) = \Delta_{S_{g\xi, a_{g\xi}}}(\pi_{g\xi, a_{g\xi}} x_0, \ldots, \pi_{g\xi, a_{g\xi}} x_t) = \pi_{g\xi, a_{g\xi}}(\Delta_{S_{g\xi}}(\pi_{g\xi} x_0, \ldots, \pi_{g\xi} x_t) \ .$$

Par ailleurs, toujours comme g est une isométrie de X_H :

$$(g^{-1})^* \lambda_\xi = \lambda_{g\xi, a_{g\xi}} \ .$$

Un calcul facile montre que le difféomorphisme $\pi_{g\xi, a_{g\xi}} : S_{g\xi} \longrightarrow S_{g\xi, a_{g\xi}}$ vérifie l'égalité

$$\pi^*_{g\xi, a_{g\xi}} \lambda_{g\xi, a_{g\xi}} = e^{-2\rho_{P_{g\xi}}(a_{g\xi})} \lambda_{g\xi} \ .$$

Finalement

$$\begin{aligned} \kappa_{X_H}(g^{-1}x_0, \ldots, g^{-1}x_t)(\xi) &= \int_{\pi_{g\xi, a_{g\xi}}(\Delta_{S_{g\xi}}(\pi_{g\xi} x_0, \ldots, \pi_{g\xi} x_t)} \lambda_{g\xi, a_{g\xi}} = \int_{\Delta_{S_{g\xi}}(\pi_{g\xi} x_0, \ldots, \pi_{g\xi} x_t)} \pi^*_{g\xi, a_{g\xi}} \lambda_{g\xi, a_{g\xi}} \\ &= e^{-2\rho_{P_{g\xi}}(a_{g\xi})} \int_{\Delta_{S_{g\xi}}(\pi_{g\xi} x_0, \ldots, \pi_{g\xi} x_t)} \lambda_{g\xi} \\ &= e^{-2\rho_{P_{g\xi}}(a_{g\xi})} \kappa_{X_H}(x_0, \ldots, x_t)(g\xi) \\ &= e^{-2\rho_{P_\xi}(a_\xi)} \kappa_{X_H}(x_0, \ldots, x_t)(g\xi) \end{aligned} \ .$$

Ce qui prouve bien, vue la définition de la H-action sur V :

$$\forall g \in H, \ \kappa_{X_H} \circ g^{-1} = g^{-1} \circ \kappa_{X_H}$$

et achève la preuve de la H-invariance du cocycle κ_H.

Montrons enfin que $[\kappa_H]$ engendre $H^{n_H - r_H}(H, I_{P_H, 1, \rho_{P_H}})$. D'après [2, III, 3.3], la suite spectrale calculant $H^\cdot(H, I_{P_H, 1, \rho_{P_H}})$ dégénère en E_2 et

$$H^{n_H - r_H}(H, I_{P_H,1,\rho_{P_H}}) \simeq H^0(\mathfrak{a}, H^{n_H-r_H}(\mathfrak{n}, \mathbb{C}) \otimes \mathbb{C}_{2\rho}) \ .$$

Dans cette identification $\Delta_{S_\xi} : N_\xi^{n_H-r_H} \longrightarrow \mathbb{C}$ représente $H^{n_H-r_H}(\mathfrak{n}, \mathbb{C})$ et engendre $\mathbb{C}_{-2\rho}$ comme $\mathfrak{a}$-module. D'où le résultat. □

6.2. **Les cocycles vol_{Δ_H} et κ_H en termes de formes différentielles sur l'espace symétrique X_H.**

6.2.1. *Construction des formes différentielles $\lambda_{rd,H}$ et $\lambda_{hc,H}$.* Rappelons que si V désigne un H-module et si on note $A^*(X_H, V)$ le H-module des formes différentielles sur X_H à valeur dans V, on a un isomorphisme $H^*(H, V) \simeq H^*(A^*(X_H, V)^H)$ (c.f. [2, IX,th.5.6]). D'autre part un cocycle $c \in C^q(X_H, V)$ est dit totalement antisymétrique si pour toute permutation σ

$$c(\sigma(\underline{x})) = (-1)^{\mathrm{sign}(\sigma)} c(\underline{x}) \ .$$

Pour passer d'un cocycle lisse totalement antisymétrique $c \in C^q(X_H, V)^H$ à un cocycle $c' \in A^q(X_H, V)^H$ représentant la même classe de cohomologie de H, il suffit de faire un passage à la limite infinitésimale :

$$\forall\, x \in X_H,\ \forall\,(v_1, \ldots, v_q) \in T_x X_H,\ \ c'(x)(v_1, \ldots, v_q) = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t^q} c(x, e_x^{t.v_1}, \ldots, e_x^{t.v_q}) \ .$$

D'après la section 3.2, on dispose d'une classe non-nulle $[\mathrm{vol}_{\Delta_H}]$ dans $H^{r_H}(H, I_{P_H,1,-\rho_{P_H}})$. Etant donné un point ξ de S, notons $\lambda_{rd,H}(\xi)$ la r_H-forme différentielle "volume radial"sur X_H : la forme $\lambda_{rd,H}(\xi)$ en un point x de X_H est la forme volume euclidienne de l'unique appartement passant par x asymptote à ξ. Le cocycle $\mathrm{vol}_{X,\Delta_H}$ est évidemment totalement antisymétrique et son image par passage à la limite infinitésimale n'est autre que la r_H-forme différentielle $\lambda_{rd,H} \in A^{r_H}(X_H, I_{P_H,1,-\rho_{P_H}})$. D'où en particulier le

Lemme 15. *L'image de la classe $[\lambda_{rd,H}] \in H^{r_H}(A^{\cdot}(X_H, I_{P_H,1,-\rho_{P_H}})^H)$ par l'isomorphisme naturel $H^*(H, I_{P_H,1,-\rho_{P_H}}) \simeq H^*(A^{\cdot}(X_H, I_{P_H,1,-\rho_{P_H}})^H)$ est la classe $[\mathrm{vol}_{\Delta_H}] \in H^{r_H}(H, I_{P_H,1,-\rho_{P_H}})$.*

Remarque : Par un procédé analogue on construit pour toute partie θ de Δ_H une forme $\lambda_{\theta,H} \in A^{|\theta|}(X_H, I_{P_\theta,1,-\rho_{P_\theta}})^H)$ dont la classe $[\lambda_{\theta,H}]$ représente $[\mathrm{vol}_{\theta,H}] \in H^{|\theta|}(H, I_{P_\theta,1,-\rho_{P_\theta}})$. Avec ces notations $\lambda_{rd,H} = \lambda_{\Delta_H,H}$.

De même d'après la section précédente on dispose d'une classe non-nulle $[\kappa_H] \in H^{n_H-r_H}(H, I_{P_H,1,\rho_{P_H}})$. Etant donné un point ξ de S notons $\lambda_{hc,H}(\xi)$ la $(n_H - r_H)$-forme différentielle "volume horocyclique" sur X_H : la forme $\lambda_{hc,H}(\xi)$ en un point x de X_H est la forme volume $\lambda_{S_\xi(x)}$, où $S_\xi(x)$ désigne l'horocycle de centre ξ passant par x muni de sa métrique riemannienne τ_ξ. Là-encore le cocycle κ_{X_H} est évidemment totalement antisymétrique et son image par passage à la limite infinitésimale n'est autre que la forme différentielle $\lambda_{hc,H} \in A^{n_H-r_H}(X_H, I_{P_H,1,\rho_{P_H}})$. En particulier on a le

Lemme 16. *L'image de la classe $[\lambda_{hc,H}] \in H^{n_H-r_H}(H, I_{P_H,1,\rho_{P_H}})$ par l'isomorphisme naturel $H^*(H, I_{P_H,1,\rho_{P_H}}) \simeq H^*(A^{\cdot}(X_H, I_{P_H,1,\rho_{P_H}})^H)$ est la classe $[\mathrm{vol}_{\Delta_H}] \in H^{n_H-r_H}(A^{\cdot}(X_H, I_{P_H,1,\rho_{P_H}})^H)$.*

6.2.2. *Décomposition de la forme volume de X_H.* Notons

$$\wedge : H^{r_H}(H, I_{P_H,1,-\rho_{P_H}}) \times H^{n_H - r_H}(H, I_{P_H,1,\rho_{P_H}}) \longrightarrow \mathbb{C}$$

le pairing naturel entre $H^{r_H}(H, I_{P_H,1,-\rho_{P_H}}) \simeq H^{r_H}(A^{\cdot}(X_H, I_{P_H,1,-\rho_{P_H}})^H)$ et $H^{n_H-r_H}(H, I_{P_H,1,\rho_{P_H}}) \simeq H^{n_H-r_H}(A^{\cdot}(X_H, I_{P_H,1,\rho_{P_H}})^H)$ induit par le produit extérieur entre formes différentielles et par le pairing naturel de H-modules entre fonctions et densités $I_{P_H,1,-\rho_{P_H}} \times I_{P_H,1,\rho_{P_H}} \longrightarrow \mathbb{C}$. Notons que $H^{n_H}(H, \mathbb{C}) \simeq \mathbb{C}$ est engendré par la classe $[\lambda_\tau]$ de la forme volume riemannienne λ_τ de X_H. La décomposition métrique $\tau = \tau_\xi \oplus dv^2$ en tout point de X_H induit immédiatement la

Proposition 11. $\lambda_{rd,H} \wedge \lambda_{hc,H} = \lambda_\tau$.

D'où au vu des deux lemmes précédents le

Corollaire 8. *Le produit* $[\mathrm{vol}_{\Delta_H}] \wedge [\kappa_H]$ *engendre* $H^{n_H}(H, \mathbb{C})$.

6.3. **Du groupe H au réseau Γ.** Rappelons que l'information cohomologique contenue dans la classe $[\kappa_H] \in H^{n_H-r_H}(H, I_{P_H,1,\rho_{P_H}})$ n'est pas tuée par restriction de H à ses réseaux cocompacts :

Lemme 17. *Soit* $\Gamma \overset{i}{\hookrightarrow} H$ *un réseau* **cocompact** *de H. Alors la flèche*

$$i^* : H^{n_H-r_H}(H, I_{P_H,1,\rho_{P_H}}) = \mathbb{C}.[\kappa_H] \longrightarrow H^{n_H-r_H}(\Gamma, I_{P_H,1,\rho_{P_H}})$$

est une injection.

Remarque :
je ne sais pas si cette proposition reste vraie lorsque le réseau Γ n'est pas cocompact.

Preuve :
c'est une conséquence de [2, theor.5.2 p.148]. □

6.4. **Les invariants $[\kappa_\theta(\rho)]$ et le théorème 4.** Soit $i : \Gamma \hookrightarrow H$ un réseau de H. Soit θ une partie de Δ_G et soit $\rho : \Gamma \longrightarrow G$ une représentation de $\mathcal{X}_{\geq\theta}(\Gamma, G)$. Le bord de Poisson $\partial\Gamma$ pour une mesure μ_Γ sur Γ de support Γ peut être réalisé sur la variété de drapeaux maximaux S de H et la mesure de Poisson μ_Γ est équivalente à la mesure K_H-invariante ν sur S (c.f. [9]). On dispose ainsi d'un invariant $[\mathrm{vol}_\theta(\rho)]$ dans $H^{|\theta|}(\Gamma, L^\infty(S))$.

Remarquons que le pairing naturel de H-modules $I_{P_H,1,-\rho_{P_H}} \times I_{P_H,1,\rho_{P_H}} \longrightarrow \mathbb{C}$ s'étend en un pairing naturel de H-module, donc aussi de Γ-modules $L^\infty(S) \times I_{P_H,1,\rho_{P_H}} \longrightarrow \mathbb{C}$. On pose alors la

Définition 18. Soit $i : \Gamma \hookrightarrow H$ un réseau d'un groupe de Lie réel presque-simple H de rang r_H, notons n_H la dimension de l'espace symétrique associé à H. Soit F un corps local de caractéristique zéro et $\mathbf{G}$ un F-groupe F-presque-simple de F-rang ≥ 1. Pour toute partie θ de Δ_G et toute représentation $\rho : \Gamma \longrightarrow G$ de $\mathcal{X}_{\geq\theta}(\Gamma, G)$, on définit la classe $[\kappa_\theta(\rho)]$ de $H^{n_H-r_H+|\theta|}(\Gamma, \mathbb{C})$ par $[\kappa_\theta(\rho)] = [\mathrm{vol}_\theta(\rho)] \wedge i^*[\kappa_H]$.

Dans le cas où $F = \mathbb{R}$ et Γ est sans torsion, pour toute partie θ de Δ_G l'invariant $[\kappa_\theta(\rho)]$ de $H^{n_H-r_H+|\theta|}(\Gamma, \mathbb{C})$ se réinterprète en cohomologie de de Rham de la variété localement symétrique $\Gamma\backslash X_H$ comme suit. Comme la représentation ρ est d'image Zariski-dense il existe une application harmonique ρ-équivariante $f : X_H \longrightarrow X_G$, où X_G désigne l'espace symétrique de G. A l'aide des applications ρ-équivariantes $f : X_H \longrightarrow X_G$ et $\phi : S \longrightarrow Y_\theta$, on peut tirer en arrière la forme $\lambda_{rd,G} \in A^{|\theta|}(X_G, I_{P_\theta,1,-\rho_{P_\theta}})^G$ en $(f,\phi)^*\lambda_{rd,G} \in A^{|\theta|}(X_G, I_{P_H,1,-\rho_{P_H}})^\Gamma$. Le produit extérieur $(f,\phi)^*\lambda_{rd,G} \wedge$

$\lambda_{hc,H}$ est une forme dans $A^{n_H - r_H + |\theta|}(X_H, \mathbb{C})^\Gamma$ qui descend donc en une forme différentielle encore notée $(f, \phi)^* \lambda_{rd,G} \wedge \lambda_{hc,H}$ dans $A^{n_H - r_H + |\theta|}(\Gamma \backslash X_H, \mathbb{C})$. La classe de cette forme en cohomologie de de Rham n'est autre que $[\kappa_\theta(\rho)]$.

Dans le cas où F est quelconque et θ est une racine de Δ_G, la classe $[\mathrm{vol}_\theta(\rho)]$ est non-nulle d'après le théorème 3. Si de plus Γ est cocompact, la classe $i^*[\kappa_H]$ est non-nulle d'après le lemme 17. Dans ce cas l'invariant $[\kappa_\theta(\rho)]$ n'a aucune raison d'être nul en général. Je ne sais pas ce qu'il en est pour Γ non-cocompact.

6.4.1. *Cas particulier : $F = \mathbb{R}$, $G = H$.* La classe $[\kappa_{\Delta_H}] \in H^{n_H}(\Gamma, \mathbb{C})$ n'est autre que la classe de la forme volume canonique du quotient $\Gamma \backslash X_H$. Si Γ n'est pas cocompact cette classe est nulle car Γ est de dimension cohomologique $\leq n_H - 1$. Si par contre Γ est cocompact $[\kappa_{\Delta_H}]$ est le générateur canonique de $H^{n_H}(\Gamma, \mathbb{C}) \simeq \mathbb{C}$. En particulier l'invariant $[\kappa_\theta]$ est non-trivial au sens du théorème 4.

6.4.2. *Cas* $\mathrm{rang}\, H \geq 2$ *(resp. $H = Sp(n,1)$, $n \geq 1$ ou $H = F_4$).* D'après le théorème de superrigidité de Margulis (resp. de Corlette et Gromov-Schoen) pour toute représentation $\rho \in \mathcal{X}_{\geq \theta}(\Gamma, G)$ soit $\theta_\rho = \emptyset$ (i.e. ρ est bornée) et les invariants précédemment construits ne nous servent à rien, soit $F = \mathbb{R}$, $H = G$, $\rho = i$ et on est dans le cas particulier sus-mentionné. Je ne sais pas si on peut utiliser les invariants $[\kappa_\theta]$ pour redémontrer ces théorèmes de superrigidité, au moins dans le cas cocompact.

6.4.3. *Cas $H = SO(n,1)$ ou $H = SU(n,1)$, $n \geq 1$.* Si Γ n'est pas cocompact Γ est de dimension cohomologique $\leq n_H - 1$ et les invariants $[\kappa_\theta(\rho)]$ sont triviaux. Si par contre Γ est cocompact Γ est de dimension cohomologique n_H. Pour toute racine θ de Δ_G et toute représentation $\rho \in \mathcal{X}_{\geq \theta}(\Gamma, G)$, l'invariant $[\kappa_\theta(\rho)]$ est dans $H^{n_H}(\Gamma, \mathbb{C}) \simeq \mathbb{C}$. Je conjecture qu'en général pour Γ cocompact, pour toute racine θ de Δ_G et toute représentation $\rho \in \mathcal{X}_{\geq \theta}(\Gamma, G)$, l'invariant $[\kappa_\theta(\rho)]$ est non nul.

6.4.4. *Cas des déformations quasi-fuchsiennes de Johnson et Millson (c.f.* [12]*).* Soit $i : \Gamma \longrightarrow SO(n,1)$ un réseau cocompact de $SO(n,1)$. Dans [12] Johnson et Millson montrent que l'espace $\mathcal{X}(\Gamma, SO(n+1,1))$ est non-trivial. Les déformations $\rho : \Gamma \longrightarrow SO(n+1,1)$ quasi-fuchsiennes non-fuchsiennes dans $SO(n+1,1)$ de l'injection canonique $i : \Gamma \longrightarrow SO(n,1) \subset SO(n+1,1)$ sont automatiquement d'image Zariski-dense dans $SO(n+1,1)$. Elles forment un ouvert U de $\mathcal{X}(\Gamma, SO(n+1,1))$. Il résulte facilement de la définition de κ_θ que les invariants $[\kappa_{\Delta_{SO(n+1,1)}}(\rho)]$ convergent vers $[\kappa_{\Delta_{SO(n,1)}}(i)]$ quand ρ tend vers i dans $\overline{U} \subset \mathrm{Hom}(\Gamma, SO(n+1,1))$. On déduit du cas particulier 6.4.1 que les invariants $[\kappa_{\Delta_{SO(n+1,1)}}(\rho)]$ sont non nuls pour ρ dans U suffisamment proche de i.

L'étude des invariants $[\kappa_\theta]$ sera poursuivie ailleurs.

7. Appendice A

Dans cet appendice nous remarquons que la cohomologie des groupes p-adiques est "entièrement engendrée en degré 1". Cette propriété explique immédiatement l'implication 4. $\Longrightarrow$ 2. du théorème 2.

Les notations sont les mêmes que dans le corps du texte. Rappelons que si V_i, $i = 1, 2$, sont des G-modules et $\lambda_i \in C^{r_i}(G, V_i)$, $i = 1, 2$, sont deux cocycles de la résolution standard homogène de V_i, on définit le cocycle cup-produit $\lambda_1 \cup \lambda_2 \in C^{r_1+r_2}(G, V_1 \otimes V_2)$ de la résolution standard homogène de $V_1 \otimes V_2$ par la formule

$$\lambda_1 \cup \lambda_2(g_0, \ldots, g_{r_1+r_2}) = \lambda_1(g_0, \ldots, g_{r_1}) \otimes \lambda_2(g_{r_1}, \ldots, g_{r_1+r_2}) \enspace .$$

Ce cup-produit passe bien-sûr à la cohomologie.

Proposition 12. *Soit $\theta = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_r\}$ une partie de Δ_G. Notons $\det(\mathrm{vol}_{\alpha_1}, \ldots, \mathrm{vol}_{\alpha_r})$ le cocycle de $C^r(G, I_\theta)$ image du cocycle*

$$\sum_{\sigma \in \Sigma_r} (-1)^{\mathrm{sign}\,\sigma}\, \mathrm{vol}_{\alpha_{\sigma(1)}} \cup \cdots \cup \mathrm{vol}_{\alpha_{\sigma(r)}} \in C^{|\theta|}(G, I_{\alpha_1} \otimes \cdots \otimes I_{\alpha_r})$$

par le G-morphisme naturel $I_{\alpha_1} \otimes \cdots \otimes I_{\alpha_r} \longrightarrow I_\theta$ induit par les projections naturelles $Y_\theta \longrightarrow Y_{\alpha_i}$, $i = 1, \ldots, r$. Il existe alors une constante $c_\theta \in \mathbb{R}^*$ telle que dans $C^{|\theta|}(G, I_\theta)$ on a l'égalité

$$\mathrm{vol}_\theta = c_\theta \det(\mathrm{vol}_{\alpha_1}, \ldots, \mathrm{vol}_{\alpha_r}) \enspace .$$

Preuve :
Notons $p_i : Y_\theta \longrightarrow Y_{\alpha_i}$ la projection naturelle. Les propriétés du volume euclidien et la définition de vol_θ impliquent immédiatement qu'il existe une constante c_θ non-nulle, ne dépendant que de la géométrie de l'immeuble X et de θ, telle que pour tout $(r+1)$-uplet $(g_0, \ldots, g_r) \in G^{r+1}$ et tout point s_θ de Y_θ on a l'égalité :

$$\mathrm{vol}_\theta(g_0, \ldots, g_r)(s_\theta) = \det((\mathrm{vol}_{\alpha_i}(g_{j-1}, g_j)(p_i(s_\theta)))_{i,j}) \enspace .$$

La multilinéarité du déterminant et la définition du cup-produit impliquent directement la formule de la proposition. $\square$

8. Appendice B : lien avec la cohomologie bornée

Je remercie Nicolas Monod pour ses remarques. Concernant la cohomologie continue bornée $H_b^\cdot$ des groupes topologiques, on pourra consulter [16]. Rappelons seulement qu'étant donné un groupe topologique H (localement compact à base dénombrable) et E un H-module de Banach, il existe une application de comparaison (en général ni injective ni surjective) ([16, 9.2])

$$\psi : H_b^\cdot(H, E) \longrightarrow H^\cdot(H, E) \enspace .$$

Etant donné G et θ comme à la section 2, notons tout d'abord que la classe $[\mathrm{vol}_\theta]$ n'est pas une classe de cohomologie bornée. Précisément, notons C_θ le G-module de Banach des fonctions continues sur Y_θ munies de la norme sup et remarquons que I_θ s'identifie à l'ensemble ${C_\theta}^\infty$ des vecteurs lisses de C_θ. D'après [2, X, 1.6] la flèche naturelle $H^\cdot(G, I_\theta) \longrightarrow H^\cdot(G, C_\theta)$ est un isomorphisme. Il résulte d'autre part de [2, X, 4.7] que la flèche naturelle $H^{|\theta|}(G, I_\theta) \longrightarrow H^{|\theta|}(G, I_{\Delta_G})$ est injective. Notons encore $[\mathrm{vol}_\theta]$ la classe non-nulle de $H^{|\theta|}(G, C_{\Delta_G})$ déduite de $[\mathrm{vol}_\theta] \in H^{|\theta|}(G, I_\theta)$. Comme Y_{Δ_G} est G-moyennable, le G-module $L^\infty(Y_{\Delta_G})$ est relativement injectif ([16, theorem 5.7.1]). D'après [16, lemma 4.1.5] le G-module C_{Δ_G} est donc également relativement injectif, d'où $H_b^{|\theta|}(G, C_{\Delta_G}) = 0$. En particulier $[\mathrm{vol}_\theta] \notin \mathrm{Im}\,(\psi : H_b^\cdot(G, C_{\Delta_G}) \longrightarrow H^\cdot(G, C_{\Delta_G}))$.

Une seconde remarque est que dans le théorème 3, le recours à la théorie des frontières moyennables fait perdre beaucoup d'information cohomologique en degré supérieur ou égal à 2. Remarquons en effet que pour tout groupe Γ comme dans l'énoncé du corollaire, le Γ-module borné $L^\infty(\partial\Gamma, \mu_{\partial\Gamma})$ est relativement injectif puisque $(\partial\Gamma, \mu_{\partial\Gamma})$ est Γ-moyennable. La cohomologie bornée $H_b^{\geq 1}(\Gamma, L^\infty(\partial\Gamma, \mu_{\partial\Gamma}))$ est donc nulle. Supposons alors que Γ soit un groupe Gromov-hyperbolique. D'après [15, theor.11], l'application de comparaison

$$\psi : H_b^{\cdot}(\Gamma, L^\infty(\partial\Gamma, \mu_{\partial\Gamma})) \longrightarrow H^{\cdot}(\Gamma, L^\infty(\partial\Gamma, \mu_{\partial\Gamma}))$$

est surjective en tout degré $n \geq 2$. On en déduit que $H^{\geq 2}(\Gamma, L^\infty(\partial\Gamma, \mu_{\partial\Gamma}))$ est nul. D'où le

Lemme 18. *Soit Γ un groupe Gromov-hyperbolique et $\rho : \Gamma \longrightarrow G$ une représentation Zariski-dense. Alors pour toute partie θ de Δ_G avec $|\theta| \geq 2$, la classe $[\mathrm{vol}_\theta(\rho, \partial\Gamma)]$ est identiquement nulle.*

Par ailleurs il n'y a aucune raison a priori pour que, sous les mêmes hypothèses, la classe $\rho^*([\mathrm{vol}_\theta])$ soit nulle.

Références

[1] Benoist Y., Propriétés asymptotiques des groupes linéaires, *GAFA* vol.7 (1997) 1-47

[2] Borel A., Wallach N., Continuous cohomology, discrete subgroups, and representations of reductive groups, Princeton University Press, 1980

[3] Bridson M.R., Haefliger A., Metric spaces of non-positive curvature. Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, 319. Springer-Verlag, Berlin, 1999

[4] Brown K., Buildings, Springer (1989)

[5] Bruhat F., Tits J., Groupes réductifs sur un corps local I, *Publ. Math. IHES* 41 (1972) 1-251, II, *Publ. Math. IHES* 60 (1984) 197–376

[6] Casselman W., A new nonunitarity argument for p-adic representations, *J.Fac.Sci.Univ.Tokyo* 28 (1981) 907-928

[7] Corlette K., Archimedean superrigidity and hyperbolic geometry, *Annals of Math.* 135 (1992) 165-182

[8] Dupont J.L., Simplicial de Rham cohomology and characteristic classes of flat bundles, *Topology* 15 (1976) 233-245

[9] Furstenberg H., Random walks and discrete subgoups of Lie groups, in Advances in Probability and Related Topics, Vol.1, Dekker (1971) 1-63

[10] Furstenberg H., Boundary theory and stochastic processes on homogeneous spaces, PSPM 26 (1972) 193-229

[11] Gromov M., Schoen R., Harmonic maps into singular spaces and p-adic superrigidity for lattices in groups of rank one, *Publ. Math. IHES* 76 (1992), 165-246

[12] Johnson D., Millson J., Deformation spaces associated to compact hyperbolic manifolds, in *Discrete groups in Geometry and Analysis* Progr.Math. 67 (1987) Birkhäuser

[13] Kleiner B., Leeb B. Rigidity of quasi-isometries for symmetric spaces and Euclidean buildings, *Publ.Math. IHES* 86 (1997) 115-197

[14] Margulis G., Discrete subgroups of Semisimple Lie Groups, Springer, 1991

[15] Mineyev I., Straightening and bounded cohomology of hyperbolic groups, GAFA 11 (2001) 807-839

[16] Monod N., Continuous bounded cohomology of locally compact groups, LNM 1758, Springer-Verlag, Berlin, 2001

[17] Ronan M., Lectures on Buildings, Perspectives in Mathematics 7, Academic Press (1989)

[18] Tits J., Reductive groups over local fields, in Automorphic forms, representations and L-functions, PSPM 33 Corvallis part 1 (1979) 29-69

[19] Tits J., Représentations linéaires irréductibles d'un groupe réductif sur un corps quelconque, *Journ. Reine Angw. Math.* 247 (1971) 196-220

[20] Watatani Y., Property T of Kazhdan implies property FA of Serre. Math. Japon. 27 (1982), no. 1, 97–103

[21] Zimmer R., Amenable ergodic group actions and an application to Poisson boundaries of random walks, *Journ. of Funct.Analysis* 27, 350-372 (1978)

[22] Zimmer R., Ergodic theory and Semisimple Groups, Birkhäuser, 1984