



Aufgaben - besprochen in den Übungen 23.04.18 – 27.04.18

Aufgabe 1

Sind die folgenden Aussagen wahr oder falsch?

- a) Die Vereinigung $\mathcal{F} \cup \mathcal{G}$ zweier σ -Algebren \mathcal{F} und \mathcal{G} auf einer gemeinsamen Grundmenge Ω ist wiederum eine σ -Algebra.
- b) Jede Lebesgue-Nullmenge ist abzählbar.
- c) Die Wahrscheinlichkeit, bei einmaligem Würfeln eine 6 zu bekommen, ist gleich der Wahrscheinlichkeit, mit zwei Würfeln einen Pasch zu erhalten.
- d) Die Vereinigung abzählbar vieler Nullmengen ist wiederum eine Nullmenge.
- e) Die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens eines von zwei Ereignissen eintritt, ist gleich der Summe der Einzelwahrscheinlichkeiten.
- f) Bei drei Würfeln ist die Wahrscheinlichkeit, einen Zweierpasch zu bekommen genau $\frac{15}{36}$.
- g) Es ist $\sigma(\{\Omega\}) = 2^\Omega$, wobei 2^Ω die Potenzmenge von Ω ist.
- h) Aus $\mathbb{P}[A] = 0$ folgt $\mathbb{P}[A \cup B] = \mathbb{P}[B]$ für Ereignisse $A, B \in \mathcal{F}$.
- i) Aus $\mathbb{P}[A] = 1$ folgt $A = \Omega$, falls $|\Omega| < \infty$ und $A \in \mathcal{F}$.
- j) Der Durchschnitt zweier σ -Algebren über Ω ist wiederum eine σ -Algebra über Ω .
- k) Es gibt eine σ -Algebra mit 42 Elementen.

Aufgabe 2

Zeigen Sie, dass $\mathcal{E} := \{(a, b] \subset \mathbb{R} \mid a \leq b \text{ für } a, b \in \mathbb{Q}\}$ ein abzählbarer Erzeuger der Borelschen σ -Algebra $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ auf \mathbb{R} ist.